







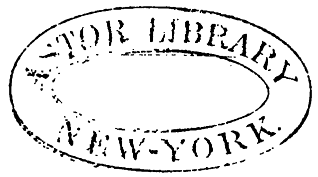
Archiv

der

[M]athematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.



Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

17

Siebzehnter Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung.

(Th. Kunike.)

1851.

Inhaltsverzeichniss des siebzehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hiebei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Versuch einer Theorie der homogenen Funktionen des dritten Grades mit zwei Variabeln.

Von

dem Herrn Doctor F. Arndt

Lehrer an dem Gymnasium zu Stralsund.

Die wissenschaftliche Theorie der binären quadratischen Formen verdanken wir Gauss. In Rücksicht auf Allgemeinheit, Einfachheit und Reichhaltigkeit ihres Inhalts gehört sie unstreitig zu den schönsten Arbeiten dieses grossen Mathematikers. Ausserdem enthält der fünfte Abschnitt der Disquisitiones Arithmeticae den Anfang zu einer Theorie der ternären Formen des zweiten Grades, durch deren Untersuchung Gauss nur dahin gelangen wollte, der Theorie der binären quadratischen Formen eine grössere Vollständigkeit zu verschaffen. Die Betrachtung der Formen von höhern Graden und mit mehreren Variabeln hat Gauss nicht zum Gegenstand seiner Untersuchungen gemacht, wiewohl er dieses weite Feld der Aufmerksamkeit der Geometer angelegentlichst empfiehlt. Seitdem ist nun zwar die Theorie der ternären quadratischen Formen, namentlich von Dirichlet und Eisenstein, weiter geführt worden, aber über die binären kubischen Formen ist meines Wissens bis jetzt nichts veröffentlicht worden. Die folgenden Blätter sind der Untersuchung dieser Formen gewidmet; was hier darüber gesagt wird, ist aber nur als der Anfang zu einem grösseren Werke über diesen Gegenstand zu betrachten.

1. Die homogene Funktion des dritten Grades mit zwei Variabeln $f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ heisst eine binäre Form des dritten Grades, indem a, b, c, d gegebene ganze (positive oder negative) Zahlen, x und y unbestimmte Grössen bedeuten, denen man jedoch nur ganze Werthe beilegt. Den Coefficienten

des zweiten und dritten Gliedes haben wir grösserer Einfachheit wegen den Faktor 3 gegeben; sind diese Coefficienten nicht durch 3 theilbar, so hat man nur die gegebene Form mit 3 zu multipliciren, und die resultirende Form statt der ursprünglichen in Betracht zu ziehen. In den Fällen, wo keine Zweideutigkeit entstehen kann, oder wo es auf die Unbestimmten x, y nicht besonders ankommt, werden wir die Form f kurz mit (a, b, c, d) bezeichnen.

2. Eine ganze Zahl M wird durch die kubische Form $f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ dargestellt, wenn der Werth der Form $= M$ wird, indem man statt x, y bestimmte ganze Zahlen setzt.

Jede kubische Form kann ohne Unterschied positive, oder negative Zahlen darstellen. Denn wenn f für $x = \alpha$, $y = \gamma$ den Werth M erlangt, so erhält diese Form für $x = -\alpha$, $y = -\gamma$ offenbar den Werth $-M$. Nicht verhält es sich so mit den binären quadratischen Formen.

3. Wenn die Formen $f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$; $f' = a'x'^3 + 3b'x'^2y' + 3c'x'y'^2 + d'y'^3$ so beschaffen sind, dass f in f' durch die lineare Substitution $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, oder, um uns kürzer auszudrücken, durch die Substitution α, β, γ, δ übergeht, wo α, β, γ, δ ganze Zahlen vorstellen, so sagt man, die Form f' sei unter der Form f enthalten, oder auch, f' werde von f eingeschlossen. Dieser Bedingung sind folgende Relationen zwischen den Coefficienten beider Formen genau gleichgeltend:

$$a' = a\alpha^3 + 3b\alpha^2\gamma + 3c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3,$$
$$b' = a\alpha^2\beta + b\alpha(\alpha\delta + 2\beta\gamma) + c\gamma(\beta\gamma + 2\alpha\delta) + d\gamma^2\delta,$$
$$c' = a\alpha\beta^2 + b\beta(\beta\gamma + 2\alpha\delta) + c\delta(\alpha\delta + 2\beta\gamma) + d\gamma\delta^2,$$
$$d' = a\beta^3 + 3b\beta^2\delta + 3c\beta\delta^2 + d\delta^3.$$

4. Wenn die Form f' unter f enthalten ist, so ist jede durch die erste Form darstellbare Zahl auch durch die zweite darstellbar. Wenn nämlich f' den Werth M erlangt, indem man den Variabeln x', y' resp. die besondern Werthe p, q beilegt, und wenn f in f' durch die Substitution $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ übergeht, so ist ersichtlich, dass f durch die Substitution $x = \alpha p + \beta q$, $y = \gamma p + \delta q$ in $a'p^3 + 3b'p^2q + 3c'pq^2 + d'q^3$ übergeht, d. h. den Werth M erlangt, indem man den Variabeln x, y diese eben genannten besondern Werthe ertheilt.

Giebt es mehrere Darstellungen der Zahl M durch die Form f', so entspricht jeder derselben auch eine bestimmte Darstellung dieser Zahl durch die Form f. Sind nun $x' = p$, $y' = q$; $x' = p'$, $y' = q'$ zwei verschiedene Darstellungen, so werden die entsprechenden $x = \alpha p + \beta q$, $y = \gamma p + \delta q$; $x = \alpha p' + \beta q'$, $y = \gamma p' + \delta q'$ ebenfalls verschiedene sein, wenn nicht $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ ist, wie leicht erhellt. Mit Ausnahme dieses Falls giebt es also mindestens eben so viele verschiedene Darstellungen einer Zahl M durch die Form f, als es verschiedene Darstellungen von M durch die unter f enthaltene Form f' giebt.

Endlich erhellt aus den Gleichungen in 3., dass das grösste gemeinschaftliche Maass von a, $b(3b)$, $c(3c)$, d in dem grössten gemeinschaftlichen Maass von a', $b'(3b')$, $c'(3c')$ d' aufgeht, wenn f' unter f enthalten ist.

5. Die Substitution α, β, γ, δ, durch welche sich f in f' verwandelt, heisse eigentlich, oder uneigentlich, jenachdem die Grösse $\alpha\delta-\beta\gamma$, welche wir durch e bezeichnen wollen, positiv oder negativ ist; und die Form f schliesst f' eigentlich, oder uneigentlich ein, jenachdem f' aus f mittelst einer eigentlichen oder uneigentlichen Substitution erhalten wird.

Diese Distinktion, welche zuerst von Gauss über die quadratischen Formen aufgestellt worden, hat auch in der Theorie der kubischen Formen, wie wir sehen werden, wesentliche Bedeutung.

6. Wenn f die Form f', f' die Form f'' einschliesst, so schliesst auch f die Form f'' ein, und zwar eigentlich oder uneigentlich, jenachdem die beiden ersten Einschliessungen einander ähnlich oder unähnlich sind.

Verwandelt sich nämlich f in f' durch die Substitution α, β, γ, δ; f' in f'' durch die Substitution α', β', γ', δ', so ist ersichtlich, dass f in f'' durch die Substitution

$$\alpha\alpha'+\beta\gamma',\ \alpha\beta'+\beta\delta',\ \gamma\alpha'+\delta\gamma',\ \gamma\beta'+\delta\delta'$$

übergeht, und die Grösse

$$(\alpha\alpha'+\beta\gamma')(\gamma\beta'+\delta\delta')-(\alpha\beta'+\beta\delta')(\gamma\alpha'+\delta\gamma')=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')$$

ist positiv, oder negativ, jenachdem die Factoren $\alpha\delta-\beta\gamma$, $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'$ gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

Hieraus folgt weiter. Sind f, f', f'', f''', etc. beliebig viele kubische Formen, von denen jede die folgende einschliesst, so schliesst die erste die letzte ein, und zwar eigenrlich oder uneigentlich, jenachdem die Menge der ihre folgende uneigentlich einschliessenden Formen gerade, oder ungerade ist.

7. Die Formen f, f' heissen äquivalent, wenn jede derselben die andere einschliesst. In diesem Falle sind die grössten gemeinschaftlichen Maasse von a, $b(3b)$, $c(3c)$, d und von a', $b'(3b')$, $c'(3c')$, d' einander gleich, indem jedes derselben in dem andern aufgehen muss. Ferner folgt, dass aequivalente Formen dieselben Zahlen darstellen, und dass eine Zahl durch eine der Formen auf gerade eben so viele verschiedene Arten dargestellt werden kann, wie durch die andere.

Geht f in f' durch die Substitution α, β, γ, δ über, wo $\alpha\delta-\beta\gamma=e$, so geht durch die Substitution δ, $-\beta$, $-\gamma$, α, f' offenbar in dieselbe Form über, in welche sich f durch die Substitution e, 0, 0, e verwandelt (6.), also in die Form ae^3, be^3, ce^3, de^3). Wenn mithin $e=\pm 1$ ist, so geht f' in f durch die Substitution $\pm\delta$, $\mp\beta$, $\mp\gamma$, $\pm\alpha$ über, die obern oder untern Zeichen genommen, jenachdem e positiv oder negativ ist.

Hieraus ersieht man, dass sich immer unendlich viele Formen f' finden lassen, welche einer gegebenen Form f aequivalent sind. Denn transformirt man f durch eine derartige Substitution α, β, γ, δ, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, was auf unendlich viele Arten möglich, so geht die resultirende Form immer in f zurück durch die Substitution $\pm\delta$, $\mp\beta$, $\mp\gamma$, $\pm\alpha$, ist folglich mit f aequivalent. Und jenachdem α, β, γ, δ eine eigentliche, oder eine uneigentliche Substitution ist, wird die entsprechende von f' in f ebenfalls resp. eigentlich, oder uneigentlich sein. — Zwei kubische Formen heissen eigentlich aequivalent, wenn die eine in die andere, also auch diese in die vorhergehende durch eine eigentliche Substitution übergeht. Einen ähnlichen Begriff hat die uneigentliche Aequivalenz.

8. Die elementare Theorie der kubischen Formen hat sich nun folgende Hauptprobleme zu ihrem Gegenstande zu machen. 1°. Es ist zu untersuchen, ob zwei gegebene kubische Formen aequivalent sind, oder nicht, und im ersten Falle werden alle Transformationen der einen Form in die andere verlangt. Auch werden dabei die eigentlichen Transformationen von den uneigentlichen gehörig zu unterscheiden sein. 2°. Dasselbe Problem ist in Bezug auf die Einschliessung zu lösen. 3°. ist zu untersuchen, ob eine Klassification der kubischen Formen möglich ist, oder nicht, und im ersten Falle sind die Umstände zu erwägen, von welchen die Eintheilung in Klassen abhängt. Man soll alle Darstellungen einer gegebenen Zahl M durch die gegebene kubische Form $f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ finden, falls M überhaupt durch diese Form darstellbar ist.

Es ist uns gelungen, die drei ersten Probleme in aller Vollständigkeit zu lösen. Das vierte betreffend, hat eine völlig allgemeine, und den praktischen Anforderungen zugleich genügende Lösung noch nicht erreicht werden können. Doch scheint es nach unseren bisherigen Untersuchungen, dass die sich noch darbietenden Schwierigkeiten ebenfalls beseitigt werden können.

Die Vergleichung der Resultale, zu denen wir, das uns vorgesteckte Ziel verfolgend, gelangen werden, mit den entsprechenden in der Theorie der quadratischen Formen, zeigt in vieler Hinsicht eine grosse Verschiedenheit, auf die wir am gehörigen Orte aufmerksam machen werden.

9. Zunächst werden wir eine Bedingung entwickeln, ohne welche die Aequivalenz zweier Formen des dritten Grades schlechterdings nicht statt finden kann.

Verwandelt sich die kubische Form $f = (a, b, c, d)$ in die kubische Form $f' = (a', b', c', d')$ mit Hülfe der Substitution α, β, γ, δ, so hat man die in 3. aufgestellten Relationen zwischen den Coefficienten beider Formen. Aus diesen leitet man nun durch Rechnung folgende Gleichungen ab:

$$A' = e^2(A\alpha\alpha + 2B\alpha\gamma + C\gamma\gamma),$$
$$B' = e^2(A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\delta),$$
$$C' = e^2(A\beta\beta + 2B\beta\delta + C\delta\delta);$$

wo

$$A=2(bb-ac),\ B=bc-ad,\ C=2(cc-bd)$$

ist, und A', B', C' eine analoge Bedeutung in Bezug auf die Form f' haben. Mit e ist die Grösse $\alpha\delta-\beta\gamma$ bezeichnet, wie oben.

Hieraus folgt der Satz: Wenn die kubische Form $f=(a, b, c, d)$ in die kubische Form $f'=(a', b', c', d')$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ übergeht, so ist $e^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ ein gemeinschaftlicher Theiler von A', B', C', und die quadratische Form (A, B, C) geht in die quadratische Form $\left(\frac{A'}{e^2}, \frac{B'}{e^2}, \frac{C'}{e^2}\right)$ durch die nämliche Substitution über

Setzt man ferner

$$BB-AC=D,\ B'B'-A'C'=D',$$

so ist nach der Theorie der quadratischen Formen $\frac{D'}{e^4}=De^2$, folglich $D'=De^6$.

Die quadratische Form $\varphi=(A, B, C)$, welche im Folgenden eine so grosse Rolle spielen wird, soll die Charakteristik der kubischen Form $f=(a, b. c, d)$ genannt werden. Die Determinante dieser quadratischen Form $D=BB-AC$ soll Determinante der kubischen Form beissen. Man findet durch Substitution der Werthe von A, B, C:

$$\begin{aligned}D&=(bc-ad)^2-4(bb-ac)(cc-bd)\\&=a^2d^2-3b^2c^2+4ac^3+4db^3-6abcd,\end{aligned}$$

wo D unmittelbar durch die Coefficienten der kubischen Form $f=(a, b, c, d)$ ausgedrückt ist. Noch merke man:

$$(a^2d+2b^3-3abc)^2-4(bb-ac)^3-a^2D=0,$$
$$(d^2a+2c^3-3bcd)^2-4(cc-bd)^3-d^2D=0.$$

Aus diesen Relationen ersieht man 1°. dass die Determinante jeder kubischen Form entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 1$ (mod. 4.) ist, mithin keine kubischen Formen mit der Determinante $4h+2$ oder $4h+3$ existiren, und 2°. dass eine kubische Form von negativer Determinante stets eine positive quadratische Form zur Charakteristik hat*).

---

*) Wir nennen hier mit Gauss eine quadratische Form $\varphi=(A, B, C)$ von negativer Determinante $BB-AC$ positiv, oder negativ, jenachdem die äussern Glieder A, C positiv, oder negativ sind. Eine Form der ersten Art stellt nämlich nur positive, eine Form der letzten Art nur negative Zahlen dar.

10. Die Grösse D, deren Werth in der vorigen Nummer angegeben, bedingt die Natur der kubischen Form wesentlich. Sie steht auch im Zusammenhange mit der Beschaffenheit der Wurzeln der kubischen Gleichung

$$az^3+3bz^2+3cz+d=0.$$

Man weiss, dass diese Gleichung eine reelle Wurzel und zwei imaginäre, oder drei verschiedene reelle Wurzeln hat, jenachdem D positiv, oder negativ ist. In dem Falle $D=0$ hat die Gleichung drei gleiche reelle Wurzeln, oder zwei gleiche reelle Wurzeln, jenachdem $bb-ac=0$, oder $bb-ac>0$ ist. Man kann diese Resultate auf eine sehr einfache Weise aus dem bekannten Sturm'schen Satze über die algebraischen Gleichungen herleiten.

11. In Nr. 9. fanden wir zwischen den Determinanten der beiden Formen

$$f=(a,\ b,\ c,\ d);\ f'=(a',\ b',\ c',\ d')$$

die Relation $D'=D.e^6$. Wenn also f' unter f enthalten ist, so ist die Determinante von f' durch die Determinante von f theilbar, und der Quotient eine sechste Potenz. Sind mithin f und f' aequivalent, so muss auch umgekehrt D durch D' theilbar sein, und daraus ergiebt sich $D=D'$, $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1$, d. h. aequivalente kubische Formen haben einerlei Determinante. Dies ist eine nothwendige, aber, wie die nachfolgenden Betrachtungen lehren werden, noch keineswegs ausreichende, Bedingung der Aequivalenz zweier Formen des dritten Grades.

12. Sind

$$f=(a,\ b,\ c,\ d);\ f'=(a',\ b',\ c',\ d')$$

aequivalente kubische Formen, und man bezeichnet irgend eine Transformation aus f in f' mit α, β, γ, δ, so ist nach 11. $\alpha\delta-\beta\gamma=e=\pm1$, nach 9. geht mithin die quadratische Form $(A,\ B,\ C)$ in die Form $(A',\ B',\ C')$ durch die nämliche Substitution über, d. h. sind zwei kubische Formen aequivalent, so müssen es ihre Charakteristiken auch sein, und jenachdem die Aequivalenz der ersteren eigentlich, oder uneigentlich, wird auch die der letzteren eigentlich, oder uneigentlich resp. sein.

13. Die kubischen Formen

$$(a,\ b,\ c,\ d);\ (-a,\ -b,\ -c,\ -d),$$

welche offenbar dieselbe Charakteristik haben, werden wir conträre Formen nennen. Sie sind immer eigentlich aequivalent, indem jede derselben in die andere durch die Substitution -1, 0, 0, -1 übergeht, welche eigentlich ist.

Die kubischen Formen (a, b, c, d); $(a, -b, c, -d)$, welche offenbar entgegengesetzte Charakteristiken haben*), werden wir **entgegengesetzte** Formen nennen. Sie sind stets uneigentlich aequivalent, indem jede derselben in die andere durch die Substitution $1, 0, 0, -1$ übergeht, welche uneigentlich ist. — Ebenso sind (a, b, c, d); $(-a, b, -c, d)$ entgegengesetzte Formen.

14. *Aufgabe.* **Zu beurtheilen, ob zwei kubische Formen von derselben Charakteristik eigentlich aequivalent sind, oder nicht.**

Auflösung. Die gegebenen Formen seien

$$f=(a, b, c, d);\ f'=(a', b', c', d'),$$

ihre gemeinschaftliche Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$. Sind f, f' eigentlich aequivalent, so muss jede eigentliche Substitution, durch welche f in f' übergeht, unter den sämmtlichen eigentlichen Substitutionen, durch welche φ in φ übergehen kann, begriffen sein (12). Man würde mithin alle eigentlichen Substitutionen aus φ in φ aufstellen, und untersuchen, ob durch irgend eine, oder mehrere derselben f in f' übergehe. Fände man solche Substitutionen, so würde f mit f' eigentlich aequivalent sein, fände man keine, so könnte auch zwischen f, f' keine eigentliche Aequivalenz statt finden.

Eine bekannte eigentliche Transformation aus φ in φ ist $1, 0, 0, 1$; jede andere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist bekanntlich**) durch folgende Formeln bestimmt, wo m das grösste gemeinschaftliche Maass von $A, 2B, C$; T, U alle Werthe bedeuten, welche der Gleichung $TT-DUU=mm$ genügen (D ist die Determinante von φ oder f):

$$\alpha=\frac{1}{m}(T-BU),\ \beta=-\frac{1}{m}CU,\ \gamma=\frac{1}{m}AU,\ \delta=\frac{1}{m}(T+BU).$$

Den Inbegriff der sämmtlichen Formen, in welche f durch diese Substitution übergeht, und welche alle unter einander eigentlich aequivalent sind, wollen wir durch $\mathfrak{f}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ bezeichnen. Man findet nun

$$m^3\mathfrak{a}=aT^3+3(bA-aB)T^2U+(cA^2-2bAB+aB^2)TU^2$$
$$+(dA^3-3cA^2B+3bAB^2-aB^3)U^3,$$

$$m^3\mathfrak{b}=bT^3+(2cA-bB-aC)T^2U+(dA^2-2bAC-bB^2+2aBC)TU^2$$
$$+(dA^2B-cA^2C-2cAB^2+2bABC+bB^3-aB^2C)U^3,$$

$$m^3\mathfrak{c}=cT^3+(dA+cB-2bC)T^2U+(2dAB-2cAC-cB^2+aC^2)TU^2$$
$$+(dAB^2-2cABC-cB^3+bAC^2+2bB^2C-aBC^2)U^3,$$

---

*) Entgegengesetzte quadratische Formen (formae oppositae) nennt Gauss (A, B, C), $(A, -B, C)$.

**) Disq. Arithm. Sectio V. p. 181.

$$m^3\mathfrak{d}=dT^3+3(dB-cC)T^2U+3(bC^2-2cBC+dB^2)TU^2 \\ +(dB^3-3cB^2C+3bBC^2-aC^3)U^3.$$

Beachtet man aber die folgenden aus

$$2bb-2ac=A,\ bc-ad=B,\ 2cc-2bd=C$$

fliessenden Relationen:

$$cA-2bB+aC=0,\ dA-2cB+bC=0;$$

so findet man

$$\begin{gathered}aB^2-2bAB+cA^2=aD,\\ 2aBC-2bAC-bB^2+dA^2=3bD,\\ aC^2-2cAC-cB^2+2dAB=3cD,\\ bC^2-2cBC+dB^2=dD;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}aB^3-3bAB^2+3cA^2B-dA^3=(aB-bA)D,\\ dA^2B-cA^2C-2cAB^2+2bABC+bB^3-aB^2C=(bB-aC)D,\\ dAB^2-2cABC-cB^3+bAC^2+2bB^2C-aBC^2=(dA-cB)D,\\ dB^3-3cCB^2+3bBC^2-aC^3=(dB-cC)D;\end{gathered}$$

folglich durch Substitution dieser Werthe, wenn man noch

$$T'=\frac{1}{m^2}(T^3+3DTU^2),\ U'=\frac{1}{m^2}(3T^2U+DU^3)$$

setzt:

$$[1]\ \begin{cases}m\mathfrak{a}=aT'+(bA-aB)U',\\ m\mathfrak{b}=bT'-(aC-bB)U',\\ m\mathfrak{c}=cT'+(dA-cB)U',\\ m\mathfrak{d}=dT'-(cC-dB)U'.\end{cases}$$

Erhalten T', U' in diesen Formeln andere Werthe, so werden sich die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ebenfalls ändern. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$bA-aB=g,\ -aC+bB=cA-bB=h,\ dA-cB=cB-bC=i, \\ -cC+dB=k;$$

so ergiebt sich

$$2(bg-ah)=AA,\ cg-ai=AB,\ dg-ak=2BB-\frac{1}{2}AC;$$

$$2(ch-bi)=AC,\ dh-bk=BC,\ 2(di-ck)=CC;$$

und

$$[2]\quad\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}AAU'=m(\mathfrak{a}b-\mathfrak{b}a)\\
&ABU'=m(\mathfrak{a}c-\mathfrak{c}a)\\
&(2BB-\tfrac{1}{2}AC)U'=m(\mathfrak{a}d-\mathfrak{d}a)\\
&\tfrac{1}{2}ACU'=m(\mathfrak{b}c-\mathfrak{c}b)\\
&BCU'=m(\mathfrak{b}d-\mathfrak{d}b)\\
&\tfrac{1}{2}CCU'=m(\mathfrak{c}d-\mathfrak{d}c)
\end{aligned}\right.$$

$$[3]\quad\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}AAT'=m(\mathfrak{b}g-\mathfrak{a}h)\\
&ABT'=m(\mathfrak{c}g-\mathfrak{a}i)\\
&(2BB-\tfrac{1}{2}AC)T'=m(\mathfrak{d}g-\mathfrak{a}k)\\
&\tfrac{1}{2}ACT'=m(\mathfrak{c}h-\mathfrak{b}i)\\
&BCT'=m(\mathfrak{d}h-\mathfrak{b}k)\\
&\tfrac{1}{2}CCT'=m(\mathfrak{d}i-\mathfrak{c}k).
\end{aligned}\right.$$

In diesen Formeln werden die Coefficienten von U', T' nicht sämmtlich verschwinden, wenn kubische Formen von der Determinante Null ausgeschlossen werden; unter dieser Voraussetzung erhalten also T', U' ganz bestimmte Werthe, sobald man für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bestimmte Werthe gesetzt hat. Hieraus folgt nun die obige Behauptung. Denn wenn nach den Formeln [1] dieselben Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zu den beiden Systemen T', U'; T'', U'' gehörten, so müssten sich umgekehrt aus diesen Werthen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zwei Paar Werthe von T', U' ergeben, was mit den Formeln [2] und [3] im Widerspruch ist.

Wenn nun die Form f' mit f eigentlich aequivalent ist, so muss sie mit einer der in [1] enthaltenen Formen identisch sein, und umgekehrt.

Ist D ein Quadrat, oder negativ und $\frac{-4D}{mm}>4$, so ist bekanntlich*)

$$T=m,-m;\quad U=0,0;$$

woraus folgt

*) Disq. Arithm. Sectio V. art. 179.

$$T' = m, -m; \; U' = 0,0$$

resp. — Wenn $\frac{-4D}{mm} = 4$, so ist

$$T = m, -m, 0, 0; \; U = 0, 0, -1, 1;$$

woraus folgt

$$T' = m, -m, 0, 0; \; U' = 0, 0, 1, -1$$

resp. — Ist endlich $-\frac{4D}{mm} = 3$, so hat man die Werthe

$$T = m, -\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}m; \; U = 0, -1, 1;$$

für welche $T' = m$, $U' = 0$, und die Werthe

$$T = -m, \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m, \; U = 0, 1, -1;$$

für welche $T' = -m$, $U' = 0$ resp. wird. Substituirt man diese Werthe in [1], so ergiebt sich folgendes Theorem, durch welches unser Problem für die quadratische und negative Determinante erledigt ist:

I. Wenn die Determinante D quadratisch, oder wenn sie negativ und $\frac{-4D}{mm} \begin{matrix} > 4 \\ = 3 \end{matrix}$ ist, so ist zur eigentlichen Aequivalenz der kubischen Formen f, f' von derselben Charakteristik (A, B, C) nothwendig und ausreichend, dass sie entweder identisch oder conträr sind.

II. Wenn D negativ und $\frac{-4D}{mm} = 4$, so ist zur eigentlichen Aequivalenz der kubischen Formen f f' nothwendig und ausreichend, dass die Form f' mit f identisch, oder conträr, oder mit der Form

$$\psi = \left(\frac{1}{m}g, \frac{1}{m}h, \frac{1}{m}i, \frac{1}{m}k\right)$$

identisch oder conträr sei, wo

$$[4] .. g = bA - aB, \; h = cA - bB, \; i = dA - cB, \; k = dB - cC.$$
$$= bB - aC, \quad = cB - bC,$$

III. Ueberhaupt werden die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit f' mit f eigentlich aequivalent sei, folgende sein: 1°. Wenn in den Gleichungen [1] a', b', c', d' an die Stelle von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gesetzt werden, so müssen sich für T', U' ganze

Werthe ergeben. 2°. Diese Werthe müssen die Gleichung $T'^2-DU'^2=m^2$ befriedigen. 3°. Aus den Gleichungen

$$[5]\ldots T'=\frac{1}{m^2}(T^3+3DTU^2),$$
$$U'=\frac{1}{m^2}(3T^2U+DU^3)$$

müssen sich ganze Werthe von T, U ergeben, und 4°. diese müssen die Gleichung $T^2-DU^2=m^2$ befriedigen.

Sind nun aber die Gleichungen [5] erfüllt, und ist ausserdem $T'^2-DU'^2=m^2$, so kommt

$$\frac{1}{m^4}(T^6+6DT^4U^2+9D^2T^2U^4)-\frac{1}{m^4}(9DT^4U^2+6D^2T^2U^4+D^3U^6)$$
$$=\frac{1}{m^4}(T^6-3DT^4U^2+3D^2T^2U^4-D^3U^6)=\frac{1}{m^4}(T^2-DU^2)^3=m^2,$$

folglich $T^2-DU^2=m^2$, daher fällt die vierte Bedingung von selbst fort.

Zweitens, wenn die Gleichungen [1] erfüllt sind, so muss von selbst $T'^2-DU'^2=m^2$ werden. Denn aus [1] folgt

$$\odot\ldots m^2(\mathfrak{bb}-\mathfrak{ac})=(bb-ac)T'^2+(2bh-ai-cg)T'U'+(hh-gi)U'^2,$$
$$m^2(\mathfrak{bc}-\mathfrak{ad})=(bc-ad)T'^2+(bi+ch-dg-ak)T'U'+(hi-gk)U'^2,$$
$$m^2(\mathfrak{cc}-\mathfrak{bd})=(cc-bd)T'^2+(2ci-dh-bk)T'U'+(ii-hk)U'^2.$$

Da nun $f=(a, b, c, d)$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in $\mathfrak{f}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ übergeht, so hat man (9),

$$2\mathfrak{bb}-2\mathfrak{ac}=\mathfrak{A},\ \mathfrak{bc}-\mathfrak{ad}=\mathfrak{B},\ 2\mathfrak{cc}-2\mathfrak{bd}=\mathfrak{C}$$

gesetzt, so dass $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ die Charakteristik von $\mathfrak{f}$ ist:

$$\mathfrak{A}=A\alpha\alpha+2B\alpha\gamma+C\gamma\gamma,$$
$$\mathfrak{B}=A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta,$$
$$\mathfrak{C}=A\beta\beta+2B\beta\delta+C\delta\delta.$$

Da ferner $\varphi=(A, B, C)$ durch die nämliche Substitution in sich selbst übergeht, so hat man auch

$$A=A\alpha\alpha+2B\alpha\gamma+C\gamma\gamma,$$
$$B=A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta,$$
$$C=A\beta\beta+2B\beta\delta+C\delta\delta;$$

folglich kommt $\mathfrak{A}=A$, $\mathfrak{B}=B$, $\mathfrak{C}=C$, d. i.

$$[6]\ldots\mathfrak{bb}-\mathfrak{ac}=bb-ac,\ \mathfrak{bc}-\mathfrak{ad}=bc-ad,\ \mathfrak{cc}-\mathfrak{bd}=cc-bd.$$

Es findet sich weiter aus [4]

$$[7] \ldots hh-gi=-\frac{1}{2}AD,\quad hi-gk=-BD,\quad ii-hk=-\frac{1}{2}CD$$

$$2bh-ai-cg=0,\quad bi+ch-dg-ak=0,\quad 2ci-dh-bk=0.$$

Substituirt man diese Werthe [6] und [7] in $\odot$, so kommt

$$A(T'^2-DU'^2-m^2)=0,\quad B(T'^2-DU'^2-m^2)=0,$$
$$C(T'^2-DU'^2-m^2)=0;$$

folglich $T'^2-DU'^2-m^2=0$, indem wir annehmen, dass A, B, C nicht sämmtlich verschwinden, oder den Fall, in welchem die Determinante der Formen f, f' verschwindet, ausschliessen. Mithin fällt die zweite Bedingung auch fort.

Es bleiben jetzt nur zwei Bedingungen übrig, nämlich 1°. dass aus den Gleichungen [1], nachdem darin a', b', c', d' statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gesetzt worden, sich ganze Werthe von T', U' ergeben, welche durch [2] und [3] bestimmt sein werden, und 2°. dass aus den Gleichungen [5] ganze Werthe von T, U fliessen. Zu bemerken ist, dass sich aus den Gleichungen [1] durch Eliminirung von T', U' zwei Bedingungsgleichungen ergeben, die aber, wie man finden wird, von selbst erfüllt sind.

Ist die Determinante nun positiv und nicht quadratisch, welcher Fall allein noch übrig blieb, so bezeichne man die sämmtlichen positiven Werthe von T, U, welche die Gleichung $T^2-DU^2=m^2$ befriedigen, durch t_1, u_1; t_2, u_2; t_3, u_3, u. s. w., so dass t_1, u_1 die kleinsten Werthe (m, 0 ausgenommen), die übrigen nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet sind. Setzt man $T=\pm t_\nu$, $U=\pm u_\nu$; so kommt nach [5]

$$T'=\pm\frac{m}{2}\left(\frac{t_\nu}{m}+\frac{u_\nu}{m}\sqrt{D}\right)^3\pm\frac{m}{2}\left(\frac{t_\nu}{m}-\frac{u_\nu}{m}\sqrt{D}\right)^3,$$

$$U'=\pm\frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\frac{t_\nu}{m}+\frac{u_\nu}{m}\sqrt{D}\right)^3\mp\frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\frac{t_\nu}{m}-\frac{u_\nu}{m}\sqrt{D}\right)^3.$$

Nun ist bekanntlich*)

$$t_\nu=\frac{m}{2}\left(\frac{t_1}{m}+\frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^\nu+\frac{m}{2}\left(\frac{t_1}{m}-\frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^\nu,$$

$$u_\nu=\frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\frac{t_1}{m}+\frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^\nu-\frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\frac{t_1}{m}-\frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^\nu;$$

folglich

*) Disq. Arithm. Sect. V. art. 200.

$$\pm T' = \frac{m}{2}\left(\frac{t_1}{m} + \frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^{3v} + \frac{m}{2}\left(\frac{t_1}{m} - \frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^{3v},$$

$$\pm U' = \frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\frac{t_1}{m} + \frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^{3v} - \frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\frac{t_1}{m} - \frac{u_1}{m}\sqrt{D}\right)^{3v};$$

d. h.

$$[8] \ldots . T' = \pm t_{3v}, \quad U' = \pm u_{3v}.$$

Hiernach ist die eigentliche Aequivalenz zweier kubischen Formen $f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$ von derselben Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$ bei positiver nicht quadratischer Determinante D nach folgender Regel zu beurtheilen:

Man mache

$[9]\ \frac{1}{2}AAU' = m(a'b-b'a)$	$[10]\ \frac{1}{2}AAT' = m(b'g-a'h)$
$ABU' = m(a'c-c'a)$	$ABT' = m(c'g-a'i)$
$(2BB-\frac{1}{2}AC)U' = m(a'd-d'a)$	$(2BB-\frac{1}{2}AC)T' = m(d'g-a'k)$
$\frac{1}{2}ACU' = m(b'c-c'b)$	$\frac{1}{2}ACT' = m(c'h-b'i)$
$BCU' = m(b'd-d'b)$	$BCT' = m(d'h-b'k)$
$\frac{1}{2}CCU' = m(c'd-d'c)$	$\frac{1}{2}CCT' = m(d'i-c'k)$

und berechne mit Hülfe irgend zweier dieser zwölf Gleichungen T' und U'. Findet man gebrochene Werthe, so sind f, f' nicht eigentlich aequivalent. Findet man aber ganze Werthe, so berechne man weiter die successiven Werthe

$$\pm t_0,\ u_0\,(\text{d. i. } \pm m, 0);\ \pm t_3, \pm u_3;\ \pm t_6, \pm u_6;\ \pm t_9, \pm u_9, \text{ u. s. w.}$$

Finden sich keine mit den bekannten Zahlen T', U' übereinstimmende Werthe, so ist keine eigentliche Aequivalenz zwischen f, f' vorhanden, findet sich aber $T'=\pm t_{3v}$, $U'=\pm u_{3v}$, wo die Zeichen sich nicht auf einander beziehen, so sind die Formen f, f' eigentlich aequivalent.

Die Berechnung obiger Werthe wird wohl am zweckmässigsten nach folgenden Formeln geführt:

$$[11] \ldots . t_3 = \frac{1}{m^2}(t_1^3 + 3Dt_1u_1^2), \quad u_3 = \frac{1}{m^2}(3t_1^2u_1 + Du_1^3)$$

$$t_{3\nu+3}=\frac{1}{m}(t_3 t_{3\nu}+Du_3 u_{3\nu}),\quad u_{3\nu+3}=\frac{1}{m}(u_3 t_{3\nu}+t_3 u_{3\nu})\,.$$

15. *Aufgabe.* **Zwei kubische Formen von derselben Charakteristik seien eigentlich aequivalent. Man soll alle eigentlichen Transformationen der einen in die andere finden.**

Auflösung. Aus den in 14. angestellten Betrachtungen ergiebt sich leicht folgendes Verfahren:

I. Wenn D quadratisch, oder $\frac{-4D}{mm}>4$, so giebt es eine eigentliche Transformation aus f in f', nämlich 1, 0, 0, 1, wenn f' mit f identisch; $-1,0,0,-1$, wenn f' mit der conträren von f identisch ist.

II. Wenn $\frac{-4D}{mm}=3$, so giebt es drei eigentliche Transformationen aus f in f', nämlich

$$1,\ 0,\ 0,\ 1$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}B,\ \frac{1}{m}C,\ -\frac{1}{m}A,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{m}B$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{m}B,\ -\frac{1}{m}C,\ \frac{1}{m}A,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{m}B,$$

wenn f' mit f identisch ist; dagegen drei andere, welche durch Veränderung aller Vorzeichen in den vorhergehenden Transformationen entstehen, wenn f' mit f conträr ist.

III. Wenn $\frac{-4D}{mm}=4$, so giebt es eine eigentliche Transformation aus f und f'; diese ist

1, 0, 0, 1, wenn f' mit f identisch;

-1, 0, 0, -1, wenn f' mit f conträr;

$\frac{1}{m}B,\ \frac{1}{m}C,\ -\frac{1}{m}A,\ \frac{1}{m}B$, wenn f' mit $\left(\frac{1}{m}g,\ \frac{1}{m}h,\ \frac{1}{m}i,\ \frac{1}{m}k\right)$ identisch;

$-\frac{1}{m}B,\ -\frac{1}{m}C,\ \frac{1}{m}A,\ -\frac{1}{m}B$, wenn f' mit $\left(-\frac{1}{m}g,-\frac{1}{m}h,-\frac{1}{m}i,\ -\frac{1}{m}k\right)$ identisch ist.

IV. Wenn endlich D positiv und kein Quadrat ist, so giebt es eine eigentliche Transformation aus f in f'. Um dieselbe kennen zu lernen, bestimmt man nach [9] und [10] die Zahlen T', U', deren numerische Werthe mit $t_{3\nu}$, $u_{3\nu}$ übereinstimmen werden; man nimmt ferner die numerischen Werthe von T, U den Grössen t_ν, u_ν gleich, ihre Zeichen mit denen von T', U' überein-

stimmend. Hat man solchergestalt T, U gefunden, so ist die gesuchte eigentliche Transformation aus f in f' folgende:

$$\frac{1}{m}(T-BU), -\frac{1}{m}CU, \frac{1}{m}AU, \frac{1}{m}(T+BU).$$

16. *Aufgabe.* Zu beurtheilen, ob zwei gegebene kubische Formen überhaupt eigentlich aequivalent sind.

Auflösung. Die gegebenen Formen seien

$$f=(a, b, c, d); \quad f'=(a', b', c', d'),$$

ihre Charakteristiken

$$\varphi=(A, B, C); \; \varphi'=(A', B', C').$$

Man untersuche, ob die quadratischen Formen φ, φ' eigentlich aequivalent sind, oder nicht (Disquis. Arithm. art. 173. 195. 207.). Findet man φ und φ' nicht eigentlich aequivalent, so können f, f' es auch nicht sein (12). Vorausgesetzt aber, dass zwischen φ, φ' eigentliche Aequivalenz statt finde, in welchem Falle die Determinanten von f, f' gleich sein werden, so suche man irgend eine eigentliche Transformation aus φ und φ' (Disq. Arithm. art. 178. 196. 208.), welche wir mit α, β, γ, δ bezeichnen wollen, und transformire die Form f durch diese Substitution in eine andere kubische Form $\mathfrak{f}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, welche mit f eigentlich aequivalent sein, und die Charakteristik φ' haben wird. Nun untersuche man, ob die Formen f und f', welche dieselbe Charakteristik φ' haben, eigentlich aequivalent sind, oder nicht (14.); jenachdem der erste, oder der zweite Fall statt findet, wird f' mit f resp. eigentlich aequivalent sein, oder nicht.

17. Beispiel für die positive Determinante. Gegeben seien $f=(3,-2,0,6)$; $f'=(2247, 1415, 891, 561)$. Man findet $\varphi=(8,-18, 24)$; $\varphi'=(296, 198, 132)$; $D=132$; folglich haben f, f' dieselbe Determinante. φ und φ' sind nun eigentlich aequivalent, und eine eigentliche Transformation aus φ in φ' ist

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta=89, 63, 24, 17\text{*)};$$

hierdurch findet sich

$$\mathfrak{f}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})=(1057227, 748235, 529551, 374781).$$

Um die Aequivalenz von f' und $\mathfrak{f}$ zu untersuchen, hat man nach 14.

*) Nach der Gauss'schen Methode berechnet mit Hülfe der Reihe angrenzender Formen (8,—18, 24); (24,—6,—4); (—4, 10, 8); (8, 6,—12); (—12, 6, 8); (8, 10,—4); (—4, 10, 8); (8, —10, —4); (—4, —2, 32); (32, 166, 132); (132, —198, 296); (296, 198, 132).

$$\frac{1}{2}A'A'U' = m(a'b - b'a), \quad \frac{1}{2}A'A'T' = m(bg' - a'h'),$$

wo $g' = bA' - aB'$, $h' = cA' - bB'$, $m = 4$ ist. Es kommt $T' = -194396$, $U' = 16920$. Die Gl. $TT - 132\,UU = 16$ ist mit $\left(\frac{T}{2}\right)^2 - 33\,U^2 = 4$ einerlei, deren kleinste Werthe $\frac{T}{2} = 46$, $U = 8$, folglich $T = 92$, $U = 8$ die kleinsten pos. Wurzeln von $TT - 132\,UU = 16$, also

$$t_1 : u_1 = 92 : 8, \quad t_3 : u_3 = 194396 : 16920.$$

Die gegebenen Formen sind mithin eigentlich aequivalent, und die einzig mögliche eigentliche Transformation aus f in f ist 5, 3, 8, 5.

18. *Aufgabe.* Zwei gegebene kubische Formen seien eigentlich aequivalent. Man sucht alle eigentlichen Transformationen der einen in die andere.

Auflösung. f und f' seien die gegebenen Formen; φ und φ' ihre Charakteristiken, welche eigentlich aequivalent sein werden. Irgend eine eigentliche Transformation aus φ in φ' sei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, und f durch diese Substitution in $\mathfrak{f}$ transformirt. $\mathfrak{f}$ und f' werden ebenfalls eigentlich aequivalent sein. Bezeichnet nun p, q, r, s den Inbegriff aller eigentlichen Transformationen aus $\mathfrak{f}$ in f', welche nach 15. bestimmt werden können (indem $\mathfrak{f}$ und f' dieselbe Charakteristik haben), so behaupte ich, dass

$$(5) \ldots \alpha p + \beta r, \ \alpha q + \beta s, \ \gamma p + \delta r, \ \gamma q + \delta s$$

der Inbegriff aller eigentlichen Transformationen aus f in f' sein werde.

Beweis. Da f in $\mathfrak{f}$ durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\mathfrak{f}$ in f' durch die Substitution p, q, r, s übergeht, so geht f in f' durch die Substitution (5) über (6). — Umgekehrt, bedeutet $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ irgend eine eigentliche Transformation aus f in f', so kann sie unter der Form (5) dargestellt werden. Denn da $\mathfrak{f}$ in f durch $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$ (7.); f in f' durch $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ übergeht, so geht $\mathfrak{f}$ in f' durch

$$p, q, r, s = \delta\alpha' - \beta\gamma', \ \delta\beta' - \beta\delta', \ -\gamma\alpha' + \alpha\gamma', \ -\gamma\beta' + \alpha\delta'$$

über (6.); hieraus ergiebt sich aber

$$\alpha' = \alpha p + \beta r, \ \beta' = \alpha q + \beta s, \ \gamma' = \gamma p + \delta r, \ \delta' = \gamma q + \delta s, \quad \text{q. e. d.}$$

19. Die Anzahl der eigentlichen Transformationen aus f in f' ist, wie in 15., $= 1$, wenn die Determinante D ein Quadrat, oder wenn $\frac{-4D}{mm} \gtreqless 4$, oder wenn D positiv und nicht quadratisch ist. Dagegen ist die Anzahl dieser Transformation $= 3$, wenn $\frac{-4D}{mm} = 3$ ist.

Ueberblickt man die bisher entwickelten Resultate, so sieht man, dass die Untersuchung der Aequivalenz zweier kubischen Formen der Hauptsache nach von einer gewissen Determinante und von einer gewissen quadratischen Form, die wir Charakteristik genannt haben, abhängt. Auf diese Weise wird die Untersuchung in das Gebiet der quadratischen Formen gezogen, und die Aequivalenz der kubischen Formen kann ohne alle Reduction derselben beurtheilt werden, auf welche es in der Theorie der quadratischen Formen gerade ankommt. In der letztern bietet bekanntlich die positive Determinante grössere Schwierigkeiten dar, als die negative und quadratische; gerade so ist es in der Theorie der kubischen Formen. Die Anzahl der eigentlichen Transformationen einer quadratischen Form in eine andere mit ihr eigentlich aequivalente ist bei positiver Determinante unendlich; während es in diesem Falle nur eine eigentliche Transformation einer kubischen Form in eine andere giebt. Dies ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

20. *Aufgabe.* Zu beurtheilen, ob zwei gegebene kubische Formen uneigentlich aequivalent sind, oder nicht, und im ersten Falle alle uneigentlichen Transformationen der einen Form in die andere zu finden.

Auflösung. Die gegebenen Formen seien $f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$, und f_1 die Entgegengesetzte von f', also etwa $f_1=(a',-b', c',-d')$. Die Formen f, f' werden uneigentlich aequivalent sein, oder nicht, jenachdem f und f_1 eigentlich aequivalent sind, oder nicht. Dies erhellet leicht.

Sind nun f, f' uneigentlich aequivalent gefunden, so suche man alle eigentlichen Transformationen aus f in f_1 (18.), deren Inbegriff mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden mag. Dies vorausgesetzt, wird $\alpha,-\beta, \gamma,-\delta$ der Inbegriff aller uneigentlichen Transformationen aus f in f' sein.

Sind f, f' auf beiderlei Weise aequivalent, so kann man sowohl alle eigentlichen, als alle uneigentlichen, Transformationen aus f in f' finden.

Die Anzahl sämmtlicher Transformationen, der eigentlichen und uneigentlichen, kann die Zahl 6 nicht übersteigen.

21. Das erste der in in 8. aufgestellten Probleme ist durch die bisherigen Untersuchungen vollständig erledigt. Wir wenden uns zur Klassification der kubischen Formen, und schicken folgende Bemerkung voraus.

Ist $f=(a, b, c, d)$ der Inbegriff aller kubischen Formen, deren Charakteristik immer dieselbe, nämlich $\varphi=(A, B, C)$ ist, so wird $(a, -b, c, -d)$ der Inbegriff aller kubischen Formen sein, welche die Entgegengesetzte von φ, nämlich $\varphi'=(A,-B, C)$, zur Charakteristik haben.

Beweis. Es seien

$f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$; $f''=(a'', b'', c'', d'')$; u. s. w.

sämmtlich Formen von der Charakteristik φ, deren unendlich viele sein können. Verändert man überall die Zeichen der zweiten und vierten Coefficienten, so erhält man offenbar lauter Formen von der Charakteristik φ'. — Umgekehrt, jede Form von der letztern Charakteristik (p, q, r, s) muss aus irgend einer der Formen f, f', f'' u. s. w. durch Veränderung des Vorzeichens im zweiten und vierten Coefficienten entstehen. Denn $(p, -q, r, -s)$ hat die Charakteristik φ, folglich muss diese Form mit einer von der folgenden $f, f', f'', \ldots$, z. B. mit f'', identisch sein, also $(p, -q, r, -s)=(a'', b'', c'', d'')$, folglich auch $(p, q, r, s)=(a'', -b'', c'', -d'')$, *q. e. d.*

Die Aufgabe, alle kubischen Formen mit gegebener Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$ zu finden, wo B nicht null ist, lässt sich also immer auf den Fall reduciren, wo B positiv ist. Denn, wäre B negativ, so würde man die Formen von der Charakteristik $(A, -B, C)$ suchen, wo $-B>0$, und die Vorzeichen des zweiten und vierten Coefficienten verändern.

22. *Aufgabe.* Es sei $\varphi=(A, B, C)$ eine gegebene quadratische Form, in welcher die äussern Glieder A, C gerade sind, und B positiv ist. Man verlangt alle kubischen Formen, welche die Form φ zur Charakteristik haben.

Auflösung. Nehmen wir zuvörderst an, dass $f=(a, b, c, d)$ eine solche Form sei, und sehen, was daraus folgt. Man wird folgende Gleichungen haben, welche den Begriff der Charakteristik feststellen:

$$A=2bb-2ac,\quad B=bc-ad,\quad C=2cc-2bd.$$

Aus diesen Gleichungen leite ich durch Rechnung die folgenden ab:

$$[12]\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}AA&=Abb-2Bab+Caa,\\ BB-\tfrac{1}{2}AC&=Abd-B(bc+ad)+Cac,\\ \tfrac{1}{2}CC&=Add-2Bcd+Ccc; \end{aligned}\right.$$

d. h. wenn $f=(a, b, c, d)$ eine kubische Form ist, deren Carakteristik $\varphi=(A, B, C)$, so geht die quadratische Form $(A, -B, C)$ durch die Substitution b, d, a, c in die quadratische Form

$$\left(\tfrac{1}{2}AA,\ BB-\tfrac{1}{2}AC,\ \tfrac{1}{2}CC\right)$$

über.

Umgekehrt, wenn die Gleichungen [12] erfüllt sind, so ist nach der Theorie der quadratischen Formen

$$(BB-\frac{1}{2}AC)^2-\frac{1}{4}A^2C^2=(bc-ad)^2(BB-AC),$$

d. i.

$$B^2(BB-AC)=(BB-AC)(bc-ad)^2,$$

folglich, wenn, wie wir hier immer annehmen, $BB-AC$, d. h. die Determinante von φ, nicht verschwindet, $bc-ad=+B$, oder $=-B$. Könnte man nun die Zahlen a, b, c, d so bestimmen, dass die Gleichungen [12] befriedigt würden, und $bc-ad$ positiv, mithin $=+B$ würde, so hätte man eine Form $f=(a, b, c, d)$ von der Charakteristik φ gefunden.

Denn es findet sich aus [12]:

$$A(cA-2bB+aC)=0,$$
$$C(dA-2cB+bC)=0,$$
$$B(cA-2bB+aC)+\frac{1}{2}A(dA-2cB+bC)=0,$$
$$B(dA-2cB+bC)+\frac{1}{2}C(cA-2bB+aC)=0^{*}).$$

Wäre nun $cA-2bB+aC$ nicht null, so müsste nach der ersten und dritten dieser Gleichungen $A=0$, $B=0$, mithin $BB-AC=D=0$ sein; da wir aber annehmen, dass D nicht verschwindet, so kommt $cA-2bB+aC=0$, und auf ähnliche Art $dA-2cB+bC=0$; daraus folgt wieder leicht

$$B\{A-2(bb-ac)\}=0,\quad B\{C-2(cc-bd)\}=0;$$

folglich, da B ebenfalls nicht verschwinden soll, $A=2bb-2ac$, $C=2cc-2bd$. Verbindet man damit $bc-ad=B$, so folgt, dass $\varphi=(A, B, C)$ die Charakteristik von $f=(a, b, c, d)$ ist.

Diese Betrachtungen führen uns zur Lösung unserer Aufgabe.

Man bestimme nämlich alle eigentlichen Transformationen der Form $(A, -B, C)$ von der Determinante D in die Form

$$\left(\frac{1}{2}AA,\ BB-\frac{1}{2}AC,\ \frac{1}{2}CC\right)$$

*) Die erste dieser Gleichungen erhält man durch Elimination von C zwischen den beiden ersten Gl. [12], beachtend, dass $bc-ad=+B$ ist; die zweite durch Elimination von A zwischen den beiden letzten Gl. [12]; die dritte durch Elimination von A zwischen den beiden ersten Gl. [12]; die vierte durch Elimination von C zwischen den beiden letzten Gl. [12].

von der Determinante DBB, wo B positiv ist; bezeichnet man den Inbegriff derselben mit b, d, a, c, so ist (a, b, c, d) der Inbegriff aller kubischen Formen, welche (A, B, C) zur Charakteristik haben. Findet man aber, dass die erste Form die zweite nicht einschliesst, so existiren keine kubische Formen von der Charakteristik (A, B, C).

23. Die Aufgabe, auf deren Lösung es hierbei ankommt, nämlich zu beurtheilen, ob eine gegebene quadratische Form eine andere, ebenfalls gegebene, eigentlich einschliesst, oder nicht, und im ersten Falle alle eigentlichen Transformationen zu finden, habe ich im Archiv Th. XIII. p. 105. auf eine für die Praxis hinreichend bequeme Art gelöst. Es genüge hier, den Weg anzugeben, den man einzuschlagen hat, ohne die Entwickelungen beizufügen.

Es sei $\psi=(A,-B,\ C)$, wo B positiv,

$$\chi=\left(\frac{1}{2}AA,\ BB-\frac{1}{2}AC,\ \frac{1}{2}CC\right)=(P,\ Q,\ R).$$

Um alle eigentlichen Transformationen aus ψ in χ zu finden, bedeute ϑ einen Theiler von B, dessen Quadrat in P aufgeht; man setze

$$[13]\ldots B=\vartheta\vartheta',\ P=\vartheta^2P',\ Q'=\frac{\frac{\theta}{\vartheta}-kP'}{\vartheta'},\ R'=\frac{R-2\frac{\theta}{\vartheta}k+P'kk}{\vartheta'\vartheta'}=\frac{Q'Q'-D}{P'},$$

wo $\frac{\theta}{\vartheta}$ eine ganze Zahl sein wird, und k den Inbegriff aller Zahlen unter ϑ' vorstellt, für welche Q', R' ganze Werthe erlangen; endlich sei $\Psi=(P',\ Q',\ R')$ eine mit ψ eigentlich aequivalente Form. Ist dann $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0$ irgend eine eigentliche Substitution aus ψ in Ψ, so erhält man alle eigentlichen Substitutionen aus ψ in Ψ durch die Formel

$$\frac{1}{m}[\alpha^0X-(-\alpha^0B+\gamma^0C)Y],\quad \frac{1}{m}[\beta^0X-(-\beta^0B+\delta^0C)Y],$$

$$\frac{1}{m}[\gamma^0X+(\alpha^0A-\gamma^0B)Y],\quad \frac{1}{m}[\delta^0X+(\beta^0A-\delta^0B)Y]=\alpha^{0\prime},\ \beta^{0\prime},\ \gamma^{0\prime},\ \delta^{0\prime};$$

ferner alle eigentlichen Substitutionen aus ψ in χ durch die Formel

$$\vartheta\alpha^{0\prime},\ \vartheta'\beta^{0\prime}+k\alpha_0',\ \vartheta\gamma^{0\prime},\ \vartheta'\delta^{0\prime}+k\gamma^{0\prime}.$$

Setzen wir also

$$[14]\ldots.a^0=\vartheta\gamma^0,\ b^0=\vartheta\alpha^0,\ c^0=\vartheta'\delta^0+k\gamma^0,\ d^0=\vartheta'\beta^0+k\alpha^0;$$

so kommt

$$[15] \ldots ma = a^0X + (b^0A - a^0B)Y,$$
$$mb = b^0X - (a^0C - b^0B)Y,$$
$$mc = c^0X + (d^0A - c^0B)Y,$$
$$md = d^0X - (c^0C - d^0B)Y;$$

wo X, Y alle Werthe bedeuten, welche der Gleichung $XX - DYY = mm$ genügen, m das grösste gemeinschaftliche Maass von A, $2B$, C ist.

Nachdem man also die mit ψ eigentlich aequivalente Form Ψ nach den obigen Regeln bestimmt, und dabei die zugehörigen Werthe ϑ, ϑ', k kennen gelernt hat, sucht man irgend eine eigentliche Transformation aus ψ in Ψ: α^0, β^0, γ^0, δ^0, und berechnet nach [14] a^0, b^0, c^0, d^0. Hat man auf diese Weise eine Form (a^0, b^0, c^0, d^0) gefunden, welche $\varphi = (A, B, C)$ zur Charakteristik hat, so wird die Formel [15] mehrere, oder selbst unendlich viele, liefern. — Findet man mehrere geeignete Formen Ψ, so erhält man auch mehrere Systeme von allgemeinen Formeln.

24. Diese Resultate zeigen, dass alle kubischen Formen, welche eine gegebene Charakteristik haben, im Allgemeinen in mehrere Systeme, deren Anzahl aber endlich ist, zerfallen. Die Anzahl dieser Systeme lässt sich wohl nicht a priori bestimmen. In jedem Systeme sind ebenso viele Formen enthalten, so viele Wurzeln die Gleichung $XX - DYY = mm$ zulässt, mithin unendlich viele, wenn D positiv und kein Quadrat ist, in den übrigen Fällen eine endliche Menge.

In den Gl. [15] ist (a^0, b^0, c^0, d^0) als die Grundform des ganzen Systems zu betrachten. Man kann aber jede andere Form dieses Systems, bestimmten Werthen von X, Y entsprechend, als Grundform annehmen, und daraus die allgemeine Formel zusammensetzen. Diese wird desto einfacher sein, je einfacher die Form war, von der man ausging.

Umgekehrt, ist (a, b, c, d) eine in dem System [15] enthaltene Form, und ist die Form (a', b', c', d') durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$ma' = aX' + (bA - aB)Y',$$
$$mb' = bX' - (aC - bB)Y',$$
$$mc' = cX' + (dA - cB)Y',$$
$$md' = dX' - (cC - dB)Y';$$

wo $X'X' - DY'Y' = mm$, so wird sie in das nämliche System gehören. — Denn man findet, dass sich a', b', c', d' auf die nämliche Art durch a^0, b^0, c^0, d^0 ausdrücken lassen, wenn man

$$\frac{1}{m}(XX' + DYY'),\ \frac{1}{m}(XY' + YX'),$$

welche Werthe der Gleichung $xx - Dyy = mm$ genügen, an die Stelle von X, Y setzt.

25. **Beispiele.** 1) Man sucht alle kubischen Formen von der Charakteristik $\varphi = (16, 4, 8)$. Zu dem Ende sind alle eigentlichen Transformationen aus

$$\psi = (16, -4, 8) \text{ in } \chi = (128, -48, 32)$$

zu bestimmen. Die Determinante ist $D = -112$.

Man findet

$$\Psi = (128, -44, 16);\ (32, -12, 8);\ (8, -12, 32)$$
$$\vartheta = 1,\ \vartheta' = 4,\ k = 1;\quad \vartheta = 2,\ \vartheta' = 2,\ k = 0;\quad \vartheta = 4,\ \vartheta' = 1,\ k = 0;$$

ferner

$$\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0 = -3, 1, -1, 0;\ -1, 0, 1, -1;\ 0, -1, 1, -2;$$
$$(a^0, b^0, c^0, d^0) = (-1, -3, -1, 1);\ (2, -2, -2, 0);\ (4, 0, -2, -1);$$

folglich erhält man drei verschiedene Systeme:

$$\begin{array}{lll} 8a = -X - 44Y & 8a = 2X - 40Y & 8a = 4X - 16Y \\ 8b = -3X - 4Y & 8b = -2X - 24Y & 8b = -32Y \\ 8c = -X + 20Y & 8c = -2X + 8Y & 8c = -2X - 8Y \\ 8d = X + 12Y & 8d = 16Y & 8d = -X + 12Y. \end{array}$$

Da $\frac{-4D}{mm} = 774$, so hat die Gleichung $XX + 112YY = 64$ nur die Wurzeln $X = 8$, $Y = 0$; $X = -8$, $Y = 0$, folglich giebt es nur sechs kubische Formen, welche $\varphi = (16, 8, 4)$ zur Charakteristik haben, deren drei den drei anderen conträr sind, nämlich folgende:

$$(-1, -3, -1, +1);\ (+2, -2, -2, 0);\ (+4, 0, -2, -1);$$
$$(+1, +3, +1, -1);\ (-2, +2, +2, 0):\ (-4, 0, +2, +1).$$

2) Man sucht alle kubische Formen von der Charakteristik $(10, -7, -18)$, wo $D = 229$. Da aber -7 negativ ist, so bestimme man alle Formen von der Charakteristik $\varphi = (10, 7, -18)$, und verändere nachher die Vorzeichen im zweiten und vierten Coefficienten. Es sind also alle eigentlichen Transformationen aus $\psi = (10, 7, -18)$ in $\chi = (50, 139, 162)$ zu ermitteln. Man erhält nur ein System von Formen:

$$\begin{array}{ll} 2a = X + 27Y & \text{wo } XX - 229YY = 4, \\ 2b = 2X + 4Y & \\ & X = 2,\ 227,\ 51527,\ 11696402, \text{ u. s. w.} \\ 2c = -X + 43Y & \\ 2d = 5X - 53Y & Y = 0,\ 15,\ 3405,\ 772920, \text{ u. s. w.} \end{array}$$

3) Man findet keine kubischen Formen von der Charakteristik $\varphi = (4, 1, 4)$.

26. *Aufgabe.* Alle zur Charakteristik $(A, 0, C)$ gehörende kubische Formen zu finden.

Auflösung. Es bedeute μ das grösste gemeinschaftliche Maass von A, C, und es sei $A = \mu A^0$, $C = \mu C^0$, ferner p, q alle Werthe (positive und negative), welche der Gleichung

$$A^0 qq + C^0 pp = \frac{1}{2}\mu$$

genügen; dann wird

$$(pA^0, qA^0, -pC^0, -qC^0)$$

der Inbegriff aller gesuchten kubischen Formen sein.

Beweis. Dass

$$(a, b, c, d) = (pA^0, qA^0, -pC^0, -qC^0)$$

den Gleichungen

$$2bb - 2ac = A, \; bc - ad = 0, \; 2cc - 2bd = C$$

Genüge leistet, ist leicht zu zeigen. — Es werden aber auch zweitens keine kubische Formen von der Charakteristik $(A, 0, C)$ existiren, welche durch das obige Verfahren nicht erhalten würden. Denn aus den Gleichungen

$$2bb - 2ac = A, \; bc - ad = 0, \; 2cc - 2bd = C$$

folgt

$$dA + bC = 0, \quad cA + aC = 0.$$

Ist also μ das grösste gemeinschaftliche Maass von A, C, so kommt, $A = \mu A^0$, $C = \mu C^0$ gesetzt,

$$dA^0 + bC^0 = 0, \quad cA^0 + aC^0 = 0;$$

hieraus ergiebt sich weiter, da A^0, C^0 relative Primzahlen sind,

$$a = pA^0, \; c = -pC^0, \; d = -qC^0, \; b = qA^0,$$

und die Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichungen giebt zwischen p und q die Relation $A^0 qq + C^0 pp = \frac{1}{2}\mu$.

27. Löst man die Gleichung $A^0 qq + C^0 pp = \frac{1}{2}\mu$ nach der Gauss'schen Methode, so erhält man im Allgemeinen mehrere Systeme von Formeln.

Es sei $zz \equiv \frac{D}{\mu\mu} \equiv D^0 \pmod{\frac{1}{2}\mu}$, z ein solcher Werth unter $\frac{1}{2}\mu$, für welchen die Formen

$$\psi = \left(\frac{1}{2}\mu,\ z,\ \frac{zz - D^0}{\frac{1}{2}\mu}\right);\ \psi = (A^0,\ 0,\ C^0)$$

eigentlich äquivalent sind, und α^0, β^0, γ^0, δ^0 eine eigentliche Substitution aus ψ in Ψ. Man erhält mehrere zur Form Ψ gehörende kubische Formen von der Charakteristik $(A,\ 0,\ C)$ nach den folgenden Formeln:

$$[16]\quad \begin{aligned} a &= A^0(\gamma^0 X + \alpha^0 A^0 Y), \\ b &= A^0(\alpha^0 X - \gamma^0 C^0 Y), \\ c &= -C^0(\gamma^0 X + \alpha^0 A^0 Y), \\ d &= -C^0(\alpha^0 X - \gamma^0 C^0 Y); \end{aligned}$$

indem $XX - D^0 YY = 1$ gesetzt wird.

28. **Beispiel.** Gegeben

$$\varphi = (14,\ 0,\ -28),\ D = 392,\ \mu = 14,\ A^0,\ C^0 = 1,\ -2.$$

Man findet $(1,\ 0,\ -2)$ mit $\Psi = (7,\ 3,\ 1)$; $(7,\ -3,\ 1)$ eigentlich aequivalent, und α^0, $\gamma^0 = 3,\ -1$ oder $-3,\ -1$; folglich sind alle zur Charakteristik $(14,\ 0,\ -28)$ gehörende kubische Formen in den beiden folgenden Formeln begriffen:

$$(-X + 3Y,\ 3X - 2Y,\ -2X + 6Y,\ 6X - 4Y),$$
$$(-X - 3Y,\ -3X - 2Y,\ -2X - 6Y,\ -6X - 4Y);$$

wo $XX - 2YY = 1$, also $\frac{\pm X}{\pm Y} = \frac{1}{0},\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{99}{70}$ u. s. w., u. s. w.

29. In besonderen Fällen lässt sich die Auflösung der Aufgabe, mit der wir uns hier schon länger beschäftigen, beträchtlich abkürzen. Es werde noch einer dieser Fälle, welcher im Folgenden in Anwendung kommen wird, besonders betrachtet.

Die gegebene Charakteristik sei $\varphi = (0,\ B,\ 0)$, wo B nicht verschwinden soll. Ist $f = (a,\ b,\ c,\ d)$ die zugehörige kubische Form, so hat man $bb - ac = 0$, $bc - ad = B$, $cc - bd = 0$. Multiplicirt man die erste Gleichung mit c, die dritte mit a, und addirt, so kommt $b(bc - ad) = bB = 0$, folglich $b = 0$. Multiplicirt man die erste Gleichung mit d, die dritte mit b, und addirt, so kommt $c(bc - ad) = cB = 0$, folglich $c = 0$. — Umgekehrt ist $b = 0$, $c = 0$, $ad = -B$, so ist $(0,\ B,\ 0)$ die Charakteristik von $(d,\ b,\ c,\ d)$. Alle kubischen Formen von dieser Charakteristik sind mithin in

$$(a,\ 0,\ 0,\ d)$$

begriffen, wo a und d alle Paare von Werthen bedeuten, deren Product $=-B$ ist.

Die gegebene Charakteristik sei ferner $\varphi=(A, B, 0)$, wo A gerade sein muss. Ist $f=(a, b, c, d)$ die zugehörige kubische Form, so muss $A=2bb-2ac$, $B=bc-ad$, $0=cc-bd$ sein. Hieraus folgt $cA-2bB=-2a(cc-bd)=0$, also auch $cA^0-bB^0=0$, wo $A=\mu A^0$, $2B=\mu B^0$, μ das grösste gemeinschaftliche Maass von $A, 2B$ bezeichnet, so dass A^0, B^0 relative Primzahlen sein werden. Nach der letztern Gleichung ist b durch A^0 theilbar, man kann also $b=pA^0$ setzen, und dann wird $c=pB^0$. Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die Bedingungsgleichung $cc-bd=0$ in $(pB^{02}-dA^0)p=0$, aber p kann nicht verschwinden, da sonst $b=0$, $c=0$, mithin $A=0$ wäre, welchen Fall wir schon betrachtet haben, folglich $pB^{02}-dA^0=0$, daher p durch A^0 theilbar, oder $p=\vartheta A^0$, also $d=\vartheta B^{02}$. Die Gleichung $bb-ac=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\mu A^0$ verwandelt sich hiernach in $\vartheta^2 A^{03}-a\vartheta B^0=\frac{1}{2}\mu$, folglich ist ϑ ein Theiler von $\frac{1}{2}\mu$. Endlich ergiebt sich $a=\dfrac{\vartheta A^{03}-\dfrac{\frac{1}{2}\mu}{\vartheta}}{B^0}$. Duch Substitution findet man nun

$$b=\vartheta A^{02},\ c=\vartheta A^0 B^0,\ d=\vartheta B^{02},$$

$$a=\frac{1}{B^0}\left(\vartheta A^{03}-\frac{\frac{1}{2}\mu}{\vartheta}\right),$$

indem ϑ jedweden positiven, oder negativen Theiler von $\frac{1}{2}\mu$ bedeutet, so beschaffen, dass a eine ganze Zahl wird. Umgekehrt, wenn a, b, c, d diese Werthe haben, so findet sich

$$2bb-2ac=A,\ bc-ad=B,\ cc-bd=0,$$

folglich (a, b, c, d) eine kubische Form, deren Charakteristik $(A, B, 0)$ ist.

30. Diese Methode hat vor der allgemeinen einen grossen praktischen Vortheil.

Z. B. Ist $\varphi=(20, 15, 0)$, so sind nach der allgemeinen Methode folgende Formen in Bezug auf ihre eigentliche Aequivalenz mit $\psi=(20,-15, 0)$ zu untersuchen:

$(200, 15, 0)$;	$(200, -25, 2)$;	$(200, -65, 20)$;
$\vartheta=1, \vartheta'=15, k=0$;	$\vartheta=1, \vartheta'=15, k=3$;	$\vartheta=1, \vartheta'=15, k=6$;
$(200, -105, 54)$;	$(200, -145, 104)$;	$(8, 15, 0)$
$\vartheta=1, \vartheta'=15, k=9$;	$\vartheta=1, \vartheta'=15, k=12$;	$\vartheta'=5, \vartheta=3, k=0$

Man findet nur die erste und dritte Form geeignet, und es verwandelt sich

$\psi=(20, -15, 0)$ in $(200, 15, 0)$ $\left.\begin{matrix} \\ \vartheta=1, \vartheta'=15, k=0 \end{matrix}\right\}$ durch die Substitution 20, 3, 13, 2

in $(200, -65, 20)$ $\left.\begin{matrix} \\ \vartheta=1, \vartheta'=15, k=6 \end{matrix}\right\}$ durch die Substitution 4, —1, 1, 0;

folglich erhält man die beiden kubischen Formen (13, 20, 30, 45); (1, 4, 6. 9), zu welchen noch ihre conträren kommen.

Nach der zweiten Methode ist

$$A=20,\ 2B=30,\ \mu=10,\ A^0=2,\ B^0=3;$$

für ϑ kann man nur ± 1, ± 5 nehmen, und erhält

$$a=\frac{1}{3}(8\vartheta-\vartheta')=\pm 1,\ \pm 13;\ b=\pm 4,\ \pm 20;\ c=\pm 6,\ \pm 30;\ d=\pm 9\ \pm 45;$$

wie vorher.

31. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Klassification der kubischen Formen angreifen.

Wir rechnen irgend zwei solche Formen in eine Klasse, wenn sie eigentlich aequivalent sind, in verschiedene Klassen, wenn sie es nicht sind. Wir haben gesehen, dass zur eigentlichen Aequivalenz zweier kubischen Formen die eigentliche Aequivalenz ihrer Charakteristiken erforderlich ist (12). Dies ist aber nicht umgekehrt richtig. Betrachten wir nun zuerst alle Formen von derselben Charakteristik (deren bei positiver Determinante unendlich viele sind), und untersuchen, wie vielen verschiedenen Klassen dieselben angehören.

Alle zur Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$ gehörenden kubischen Formen sind nach 23. 24. im Allgemeinen in mehreren Systemen enthalten. Betrachten wir ein bestimmtes System (5), und bezeichnen irgend eine Form desselben (die Grundform) mit (a^0, b^0, c^0, d^0), so ist jede Form des nämlichen Systems (a, b, c, d) durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$[17]\quad \begin{aligned} ma&=a^0X+(b^0A-a^0B)Y,\\ mb&=b^0X-(a^0C-b^0B)Y,\\ mc&=c^0X+(d^0A-c^0B)Y,\\ md&=d^0X-(c^0C-d^0B)Y; \end{aligned}$$

wo m das grösste gemeinschaftliche Maass von A, $2B$, C, und X, Y alle (positive und negative) Wurzeln der Gleichung

$XX-DYY=mm$ sind ($D=BB-AC$). Zu bemerken ist hiebei, dass die letztere Gleichung unendlich viele Wurzeln hat, wenn D positiv, zwei Paare von Wurzeln

$$\left.\begin{matrix} X=m, & -m \\ Y=0, & 0 \end{matrix}\right\} \text{ wenn } D \text{ quadratisch oder } \frac{-4D}{mm}>4;$$

vier Paare von Wurzeln

$$\left.\begin{matrix} X=m, & -m, & 0, & 0 \\ Y=0, & 0, & 1, & -1 \end{matrix}\right\} \text{ wenn } \frac{-4D}{mm}=4;$$

sechs Paare von Wurzeln

$$\left.\begin{matrix} X=m, & -m, & \frac{m}{2}, & -\frac{m}{2}, & \frac{m}{2}, & -\frac{m}{2} \\ Y=0, & 0, & 1, & 1, & -1, & -1 \end{matrix}\right\} \text{ wenn } \frac{-4D}{mm}=3 \text{ ist.}$$

Zwei eigentlich aequivalente kubische Formen von derselben Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$ gehören nun nothwendig demselben System an. Bezeichnet man diese Formen nämlich mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}')$, so ist nach 14.

$$\begin{aligned} m\mathfrak{a}' &= \mathfrak{a}T+(\mathfrak{b}A-\mathfrak{a}B)U, \\ m\mathfrak{b}' &= \mathfrak{b}T-(\mathfrak{a}C-\mathfrak{b}B)U, \\ m\mathfrak{c}' &= \mathfrak{c}T+(\mathfrak{d}A-\mathfrak{c}B)U, \\ m\mathfrak{d}' &= \mathfrak{d}T-(\mathfrak{c}C-\mathfrak{d}B)U; \end{aligned}$$

wo $T^2-DU^2=m^2$ ist; aus diesen Relationen folgt aber, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}')$ in dasselbe System gehören. — Formen aus verschiedenen Systemen sind mithin nicht eigentlich aequivalent, oder sie gehören in verschiedene Klassen. Hiernach kommt es nur noch darauf an, zu entscheiden, ob Formen aus demselben System in dieselbe, oder in verschiedene Klassen gehören. Zu dem Ende sind die verschiedenen Fälle besonders zu betrachten.

I. Wenn D quadratisch oder $\frac{-4D}{mm}>4$ ist, so erhält das System [17] nur zwei Formen (a^0, b^0, c^0, d^0), $(-a^0, -b^0, -c^0, -d^0)$, und da diese conträr sind, so gehören sie in eine Klasse.

II. Wenn $\frac{-4D}{mm}=4$, so erhält das System vier Formen, nämlich

$$(a^0, b^0, c^0, d^0),$$

$$\left(\frac{b^0A-a^0B}{m}, -\frac{a^0C-b^0B}{m}, \frac{d^0A-c^0B}{m}, -\frac{c^0C-d^0B}{m}\right),$$

und die mit diesen conträren Formen, welche nach 14. II. ebenfalls eine einzige Klasse bilden.

III. Wenn $\frac{-4D}{mm}=3$, so enthält das System sechs Formen; da aber in diesem Falle nach 14. I. nur identische oder conträre Formen eigentlich aequivalent sind, so folgt, dass diese Formen in drei verschiedene Klassen gehören, deren Formen erhalten werden, indem man von den Werthen

$$X=m,\ -\frac{1}{2}m,\ -\frac{1}{2}m,\ -m,\ \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}m$$
$$Y=0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1$$

irgend drei so beschaffene Paare nimmt, dass die Werthe von X, Y irgend eines Paars nicht durch Veränderung der Vorzeichen eines anderen Paares entstehen, also z. B. die drei ersten Paare.

IV. Wenn die Determinante endlich positiv ist, so behaupte ich, dass die unendlich vielen Formen eines Systems drei verschiedene Klassen bilden.

Um dies zu erweisen seien

$$f=(a,\ b,\ c,\ d),\quad f'=(a',\ b',\ c',\ d')$$

irgend zwei in [17] enthaltene Formen, zu den Werthen X, Y; X', Y' gehörend. Man wird also ausser den vier Gl. [17] noch vier andere haben, aus jenen hervorgehend, wenn a', b', c', d', X', Y' mit a, b, c, d, X, Y vertauscht werden. Aus diesen acht Gleichungen wird man leicht folgende herleiten:

$$\begin{aligned}ma' &= aX'' + (bA-aB)Y'',\\ mb' &= bX'' - (aC-bB)Y'',\\ mc' &= cX'' + (dA-cB)Y'',\\ md' &= dX'' - (cC-dB)Y'';\end{aligned}$$

wo

$$X''=\frac{1}{m}(XX'-DYY'),\quad Y''=\frac{1}{m}(XY'-YX')$$

ist. Es werden nun f, f' eigentlich aequivalent sein, folglich in eine Klasse gehören, wenn X'', Y'' sich unter der Form $\pm t_{3\nu}$, $\pm u_{3\nu}$ darstellen lassen, indem $t_{3\nu}$, $u_{3\nu}$ die oben angegebene Bedeutung haben (14). Diese Bedingung ist also zu entwickeln.

Da X, Y; X', Y' der Gleichung $xx-Dyy=mm$ genügen, so kann man

$$X=\pm t_\mu,\ Y=\pm u_\mu;\ X'=\pm t_{\mu'},\ Y'=\pm u_{\mu'}$$

setzen, wo die Vorzeichen ganz willkührlich sind. Substituirt man dies in die obigen Werthe von X'', Y'', so findet sich offenbar

$$mX'' \text{ entweder } = \pm(t_\mu t_{\mu'} - Du_\mu u_{\mu'}) \text{ oder } = \pm(t_\mu t_{\mu'} + Du_\mu u_{\mu'})$$
$$mY'' \text{ entweder } = \pm(t_\mu u_{\mu'} - u_\mu t_{\mu'}) \quad \text{ oder } = \pm(t_\mu u_{\mu'} + u_\mu t_{\mu'}).$$

Drückt man aber t_μ, u_μ; $t_{\mu'}$, $u_{\mu'}$ auf bekannte Weise durch t_1, u_1 aus so erhält man nach leichter Rechnung

$$\frac{1}{m}(t_\mu t_{\mu'} - Du_\mu u_{\mu'}) = t_{\pm(\mu'-\mu)}, \quad \frac{1}{m}(t_\mu t_{\mu'} + Du_\mu u_{\mu'}) = t_{\mu'+\mu},$$
$$\frac{1}{m}(t_\mu u_{\mu'} - u_\mu t_{\mu'}) = \pm u_{\pm(\mu'-\mu)}, \quad \frac{1}{m}(t_\mu u_{\mu'} + u_\mu t_{\mu'}) = u_{\mu'+\mu};$$

folglich

$$X'' = \pm t_{\pm(\mu'-\mu)} \text{ oder } = \pm t_{\mu'+\mu},$$
$$Y'' = \pm u_{\pm(\mu'-\mu)} \text{ oder } = \pm u_{\mu'+\mu};$$

wo die Zeichen immer willkührlich sind, nur dass dem Index dasjenige Zeichen zu geben ist, welches ihn positiv macht. Hieraus ziehen wir den Schluss. Wenn die Formen f, f' zu den Werthen

$$X = \pm t_\mu, \; Y = \pm u_\mu; \; X' = \pm t_{\mu'}, \; Y' = \pm u_{\mu'}$$

gehören, und die Werthe in beiden Paaren gleiche, oder in beiden entgegengesetzte Zeichen haben, so werden f, f' eigentlich aequivalent sein, wenn $\mu' - \mu \equiv 0 \,(\text{mod. } 3)$ ist; haben aber jene Werthe in dem einen Paar gleiche, im andern entgegengesetzte Zeichen, so ist zur eigentlichen Aequivalenz $\mu' + \mu \equiv 0$ (mod. 3.) erforderlich, und umgekehrt. Hiermit ist die obige Behauptung nun erwiesen, nämlich

die in der ersten Klasse enthaltenen Formen entsprechen den Werthen

$$+t_{3n}, +u_{3n}; \; -t_{3n}, -u_{3n}; \; +t_{3n}, -u_{3n}; \; -t_{3n}, +u_{3n}.$$

Die in der zweiten Klasse den Werthen

$$+t_{3n+1}, +u_{3n+1}; \; -t_{3n+1}, -u_{3n+1}; \; +t_{3n+2}, -u_{3n+2}; \; -t_{3n+2}, +u_{3n+2}.$$

Die in der dritten Klasse den Werthen

$$+t_{3n+2}, +u_{3n+2}; \; -t_{3n+2}, -u_{3n+2}; \; +t_{3n+1}, -u_{3n+1}; \; -t_{3n+1}, +u_{3n+1}.$$

Als Repraesentanten der Klassen kann man z. B. die den Werthen m, 0; t_1, u_1; t_1, $-u_1$ nehmen.

32. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Anzahl der verschiedenen Klassen aller kubischen Formen von derselben Charakteristik entweder ebenso gross, oder dreimal so gross, als die Anzahl der verschiedenen Systeme ist, in welche diese Formen zer-

legt werden können; nämlich eben so gross in den Fällen

$$D=hh,\ \frac{-4D}{mm}=4,\ \frac{-4D}{mm}>4;$$

dreimal so gross in den übrigen Fällen: $\frac{-4D}{mm}=3$ und $D>0$.

33. Es sei f eine kubische Form, φ ihre Charakteristik. Ist φ nicht schon reducirt, so lässt sie sich durch mehrere Substitutionen in eine mit ihr eigentlich aequivalente Reducta φ' verwandeln, z. B. durch die Substitution α, β, γ, δ, wo $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ist. Transformirt man nun f durch diese nämliche Substitution in f', so wird f' mit f eigentlich aequivalent sein, denn indem f in f' durch die Substitution α, β, γ, δ, wo $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, übergegangen ist, geht f' in f zurück durch die Substitution δ, $-\beta$, $-\gamma$, $+\alpha$ (7). Bezeichnet man ferner die Charakteristik von f' mit (A', B', C'), so ist

$$A'=A\alpha\alpha+2B\alpha\gamma+C\gamma\gamma,\quad B'=A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta,$$
$$C'=A\beta\beta'+2B\beta\delta'+C\delta\delta'(9.);$$

folglich (A', B', C') mit φ' identisch, woraus zweitens folgt, dass die kubische Form f' die quadratische Form φ' zur Charakteristik hat. Jede gegebene kubische Form f kann mithin durch eine, oder mehrere Substitutionen in eine damit eigentlich aequivalente Form f' verwandelt werden, deren Charakteristik eine Reducta ist.

Man denke sich für eine gegebene Determinante $D\equiv0$ oder $\equiv1$(mod. 4.) alle reducirten quadratischen Formen, in welchen die äussern Glieder beide gerade sind, und bei negativem D nur die positiven Formen (9.), aufgestellt; sie seien ψ, ψ', ψ'', ...ψ^{n-1}, ihre Anzahl ist bekanntlich begrenzt. Ferner denke man sich alle kubischen Formen, deren Charakteristiken diese reducirten Formen sind, ebenfalls aufgestellt. Jede beliebige kubische Form von der Determinante D wird sich auf eine der letztern zurückführen lassen. Alle kubischen Formen von derselben Charakteristik bilden aber eine bestimmte Menge von Klassen (32.), folglich sind wir zu dem schönen Theorem gelangt:

Alle kubischen Formen von derselben Determinante lassen sich in eine endliche Menge von Klassen zerlegen.

Bezeichnet man die Anzahl der Klassen der kubischen Formen zur Charakteristik ψ mit ν, die zur Charakteristik ψ' mit ν' u. s. w., die Anzahl der Klassen aller kubischen Formen von der Determinante D mit N, so ist

$$N\overline{\gtrless}\,\nu+\nu'+\nu''+\ldots+\nu^{n-1}.$$

34. *Aufgabe.* **Alle kubischen Formen von derselben Determinante D zu klassificiren, wenn die letztere ein Quadrat ist.**

Auflösung. Man stelle alle reducirten quadratischen Formen von der gegebenen Determinante $D=hh$ auf (wo h positiv), welche bekanntlich $(A, h, 0)$ sind, wo A zwischen den Grenzen 0 und $2h-1$ incl. eingeschlossen ist; da aber nur gerade Werthe von A zulässig sind, so werden die wirklich aufzustellenden Formen

$$(0, h, 0), (2, h, 0), (4, h, 0)\ (6, h, 0), \ldots\ldots (2h-2, h, 0)$$

sein, ihre Anzahl offenbar $=h$. Man bszeichne sie mit ψ, ψ', ψ'',...ψ^{h-1}. Man bestimme die zur Charakteristik ψ gehörenden kubischen Formen (29), und behalte von je zwei conträren $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(-\mathfrak{a}, -\mathfrak{b}, -\mathfrak{c}, -\mathfrak{d})$ immer nur die eine bei, z. B. die, deren erster Coefficient positiv ist; alle auf diese Weise resultirenden Formen werden in verschiedene Klassen gehören (14. I.). Verfährt man ebenso in Bezug auf die Reducirten ψ', ψ'', ψ''',... ψ^{h-1}, so wird man die Repraesentanten aller Klassen erhalten. Denn da nach der Theorie der quadratischen Formen die Reducirten ψ, ψ', ψ'',...ψ^{h-1} sämmtlich in verschiedene Klassen gehören (keine zwei eigentlich aequivalent sind), so gilt Dasselbe von den in Rede stehenden kubischen Formen.

Beispiel. $D=81$, $h=9$.

$\psi=(0, 9, 0)$; $(2, 9, 0)$; $(4, 9, 0)$; $(6, 9, 0)$; $(8, 9, 0)$;
$(10, 9, 0)$; $(12, 9, 0)$; $(14, 9, 0)$; $(16, 9, 0)$

$\psi=(0, 9, 0)$.....Klassen $(1, 0, 0, -9)$; $(3, 0, 0, -3)$; $(9, 0, 0, -1)$.

$\psi=(2, 9, 0)$..... $a=\frac{1}{9}\left(\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)$, ... Klasse $(0, 1, 9, 81)$
$\vartheta=1$.

$\psi=(4, 9, 0)$.... $a=\frac{1}{9}\left(8\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)$, $a=\frac{7}{9}$, folglich keine Klasse vorhanden.
$\vartheta=1$

$\psi=(6, 9, 0)$.... $a=\frac{1}{3}\left(\vartheta-\frac{3}{\vartheta}\right)$, $a=-\frac{2}{3}$, $+\frac{2}{3}$ keine Klasse.
$\vartheta=1, 3$

$\psi=(8, 9, 0)$.... $a=\frac{1}{9}\left(64\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)$, $a=7$....Klasse $(7, 16, 36, 81)$
$\vartheta=1$

$\psi=(10, 9, 0)$....$a=\frac{1}{9}\left(125\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)$, $a=\frac{31}{3}$.... keine Klasse.
$\vartheta=1$

$\psi=(12, 9, 0) \ldots a=\frac{1}{3}\left(8\vartheta-\frac{3}{\vartheta}\right), \quad a=\left.\begin{matrix}\frac{5}{3}\\ \frac{23}{3}\end{matrix}\right\} \ldots$ keine Klasse.

$\vartheta=1, 3$

$\psi=(14, 9, 0) \ldots a=\frac{1}{9}\left(343\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right), \quad a=38, \ldots$ Klasse (38, 49, 63, 81)

$\vartheta=1$

$\psi=(16, 9, 0) \ldots a=\frac{1}{9}\left(512\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right), \quad a=\frac{511}{9} \ldots$ keine Klasse.

$\vartheta=1$

Hieraus folgt, dass alle kubische Formen von der Determinante 81 in sechs verschiedene Klassen zerfallen, welche durch folgende Formen repraesertirt werden können:

(1, 0, 0, —9); (3, 0, 0, —3); (9, 0, 0, —1); (0, 1, 9, 81); (7, 16, 36, 81); (38, 49, 63, 81).

35. Es sei B eine ungerade Primzahl, $(A, B, 0)$ die Charakteristik. Dann ist $\frac{1}{2}\mu$, oder dass grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{1}{2}A$ und B, offenbar $=1$,

$$A^0=\frac{1}{2}A, \quad B^0=B, \quad \vartheta=1, \quad a=\frac{1}{B}(A^{0\,3}-1).$$

Die Congruenz $z^3\equiv 1 \pmod{B}$ hat drei Wurzeln unter B, oder eine Wurzel, jenachdem B von der Form $3n+1$, oder von der Form $3n+2$ ist. Beachtet man nun, dass zu der Charakteristik $(0, B, 0)$ die Klassen $(1, 0, 0, -B)$, $(B, 0, 0, -1)$ gehören, so ergiebt sich folgendes Theorem:

Alle kubischen Formen von der Determinante BB zerfallen, wenn B eine ungerade Primzahl ist, für $B=3n+2$ in drei verschiedene Klassen, deren Repraesentanten $(1, 0, 0, -B)$; $(B, 0, 0, -1)$; $(0, 1, B, B^2)$ sind; für $B=3n+1$ in fünf verschiedene Klassen, deren Repraesentanten $(1, 0, 0, B)$; $(B, 0, 0, -1)$; $(0, 1, B, B^2)$;

$$\left(\frac{z^3-1}{B}, z^2, zB, B^2\right); \quad \left(\frac{z'^3-1}{B}, z'^2, z'B, B^2\right)$$

sind, indem z, z' die beiden von der Einheit verschiedenen Wurzeln der Congruenz $z^3\equiv 1 \pmod{B}$ unter B bedeuten. Für $B=1$ insbesondere giebt es eine Klasse $(1, 0, 0, -1)$; für $B=3$ drei Klassen $(1, 0, 0, -3)$; $(3, 0, 0, -1)$; $(0, 1, 3, 9)$.

Beispiel.

$$B=7=3n+1 \quad z^3\equiv 1 \pmod{7}, \; z=2, \; z'=4;$$

die Klassen sind also

$(1, 0, 0, -7)$; $(7, 0, 0, -1)$; $(0, 1, 7, 49)$; $(1, 4, 14, 49)$; $(9, 16, 28, 49)$.

36. Es sei $B=2p$, wo p eine ungerade Primzahl. Die Werthe von $\frac{1}{2}A$ werden sein: $0, 1, 2, 3, \ldots 2p-1$. Betrachten wir zuerst den Werth $\frac{1}{2}A=p$. In diesem Falle ist das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{1}{2}A$ und B offenbar $=p$,

$$A^0=1,\ B^0=2,\ a=\frac{1}{2}\left(\vartheta-\frac{p}{\vartheta}\right),$$

wo $\vartheta=1$ oder $=p$ sein kann. Dies giebt die Klassen

$$\left(\frac{1-p}{2}, 1, 2, 4\right);\ \left(\frac{p-1}{2}, p, 2p, 4p\right).$$

Es kann zweitens $\frac{1}{2}A$ ungerade, aber nicht $=p$ sein. In diesem Falle ist

$$\frac{1}{2}\mu=1,\ A^0=\frac{1}{2}A,\ B^0=2p,\ \vartheta=1,\ a=\frac{1}{2p}(A^{03}-1);$$

wo $A^0<2p$ sein muss. Die Congruenz $z^3\equiv 1 \pmod{2p}$ hat unter $2p$ eine, oder drei Wurzeln, jenachdem p von der Form $3n+2$, oder von der Form $3n+1$ ist; folglich sind die entsprechenden Klassen in $\left(\frac{z^3-1}{2p}, z^2, 2pz, 4p^2\right)$ begriffen, wo für z jede dieser Wurzeln zu setzen ist. — Es kann drittens $\frac{1}{2}A$ gerade sein. In diesem Falle ist

$$\frac{1}{2}\mu=2,\quad \frac{1}{4}A=A^0,\ p=B^0,\ a=\frac{1}{p}\left(\vartheta A^{03}-\frac{2}{\vartheta}\right);$$

wo $\vartheta=1$ oder $=2$ sein kann. Für $\vartheta=1$ erhält man Klassen unter der Form $\left(\frac{z^3-2}{p}, z^2, pz, p^2\right)$, wo z die Wurzeln der Congruenz $z^3\equiv 2 \pmod{p}$ unter p bedeutet. Für $\vartheta=2$ erhält man Klassen unter der Form

$$\left(\frac{2z^3-1}{p}, 2z^2, 2pz, 2p^2\right),\ \text{wo}\ 2z^3\equiv 1 \pmod{p}.$$

Es kann endlich $A=0$ sein. Diesem Fall entsprechen die Klassen $(1, 0, 0, -2p)$; $(2, 0, 0, -p)$; $(p, 0, 0, -2)$; $(2p, 0, 0, -1)$.

Die Congruenz $z^3 \equiv 2 (\text{mod.} p)$ ist nicht immer lösbar; hat sie aber Wurzeln, so ist deren Anzahl ebenfalls $=1$ oder 3, jenachdem $p=3n+2$, $3n+1$ ist.

Die Congruenz $2z^3 \equiv 1$ (mod. p) ist gleichfalls nicht immer lösbar. Denn ist sie erfüllt, so muss $2fz^3 \equiv f$ (mod. p) sein; nun kann man aber f so bestimmen, dass $2f \equiv 1$ (mod. p) ist, und dann wird $z^3 \equiv f$ (mod. p), welcher Forderung nicht immer genügt werden kann. Man sieht hieraus aber, dass die Anzahl der Wurzeln der Congruenz $2z^3 \equiv 1$ (mod. p), wenn sie nicht null ist, entweder $=1$, oder $=3$ sein muss, jenachdem $p=3n+2$, oder $=3n+1$ ist.

Alle kubische Formen von der Determinante $(2p)^2$, wo p eine ungerade Primzahl, sind mithin in folgenden Klassen enthalten:

$$(1, 0, 0, -2p); \quad (2, 0, 0, -p); \quad (p, 0, 0, -2); \quad (2p, 0, 0, -1);$$

$$\left(\frac{1-p}{2}, 1, 2, 4\right); \quad \left(\frac{p-1}{2}, p, 2p, 4p\right);$$

$$\left(\frac{z^3-1}{2p}, zz, 2pz, 4pp\right) \ldots . z^3 \equiv 1 (\text{mod.} 2p) \text{ *)}$$

$$\left(\frac{2z'^3-1}{p}, 2zz, 2pz, 2pp\right) \ldots .. 2z'^3 \equiv 1 (\text{mod.} p),$$

$$\left(\frac{z''^3-2}{p}, zz, pz, pp\right) \ldots . z''^3 \equiv 2 (\text{mod.} p);$$

woraus leicht folgt, dass die Anzahl der Klassen nicht kleiner als 7 und nicht grösser als 15 ist.

Beispiel. $p=31$. Man findet

$$z=1, 5, 25; \quad z'=8, 9, 14; \quad z''=4, 7, 20;$$

folglich sind die Klassen der Formen von der Determinante 36 folgende:

$(1, 0, 0 -62)$; $(2, 0, 0, -31)$; $(31, 0, 0, -2)$; $(62, 0, 0, -1)$; $(-15, 1, 24)$; $(15, 31, 62, 124)$; $(0, 1, 62, 3844)$; $(2, 25, 310, 3844)$; $(252, 625, 1550, 3844)$; $(33, 128, 496, 1922)$; $(47, 162, 558, 1922)$; $(177, 392, 868, 1922)$; $(2, 16, 124, 961)$; $(11, 49, 217, 961)$; $(258, 400, 620, 961)$;

*) Man löst diese Congruenzen leicht mit Hülfe der Indextafeln des Herrn Prof. Jacobi (S. Canon Arithmeticus).

37. **Bevor wir zur negativen Determinante übergehen, wollen wir zum besseren Verständniss folgende Bemerkung über die quadratischen Formen voraussenden.**

Die Reduction der quadratischen Formen von negativer Determinante nehmen wir nach Gauss vor. Die Form (A, B, C) von der negativen Determinante $BB-AC=D$ heisst reducirt, wenn B nicht $>\frac{1}{2}A$, C nicht $<A$ ist (bloss in Rücksicht auf die absoluten Werthe). Dabei ist $B\overset{=}{<}\sqrt{-\frac{1}{3}D}$, $A\overset{=}{<}\sqrt{-\frac{4}{3}D}$. Z. B. für $D=-71$ sind die Reducirten folgende:

$$(1, 0, 71);\ (2, \pm1, 36);\ (3, \pm1, 24);\ (4, \pm1, 18);\ (6, \pm1, 12);$$
$$(8, \pm1, 9);\ (5, \pm2, 15);\ (8, \pm3, 10);$$

verbunden mit ebenso vielen anderen, in denen die äusseren Glieder negativ sind.

Ferner ist zu bemerken. Zwei reducirte quadratische Formen von derselben negativen Determinante sind immer, aber auch nur, eigentlich aequivalent, wenn sie entweder identisch sind, oder wenn sie entgegengesetzt sind, und im letztern Falle entweder ancipites, oder die äussern Glieder gleich habend, d. h. die entgegengesetzten reducirten Formen (A, B, C); $(A, -B, C)$ sind immer, aber nur, eigentlich aequivalent, wenn von den beiden Bedingungen $2B=\pm A$, $A=C$ mindestens eine statt findet.

38. Sind nun φ, φ' zwei verschiedene Charakteristiken und nicht entgegengesetzt; oder sind sie entgegengesetzt, aber weder ancipites, noch mit gleichen äusseren Gliedern behaftet, so können sie nicht eigentlich aequivalent sein, folglich werden die ihnen entsprechenden kubischen Formen ebenfalls in verschiedene Klassen gehören. Wir haben daher nur folgende Aufgabe zu lösen:

39. *Aufgabe.* Zwei kubische Formen von negat. Determinante haben zu Charakteristiken reducirt quadratische Formen, welche entgegengesetzt, und entweder ancipites sind, oder die äusseren Glieder gleich haben; man soll beurtheilen, ob jene eigentlich aequivalent sind, oder nicht.

Auflösung. Die Reducirten seien $\varphi=(A, B, C)$; $\varphi'=(A, -B, C)$; A kann nicht verschwinden, B werde als positiv angenommen. Die entsprechenden kubischen Formen bezeichne man mit $f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$.

I. φ und φ' seien ancipites, so dass $2B=A$ ist (A ist positiv und gerade nach 9.). Die eigentliche Aequivalenz von f, f' ist nun nach 14. 16. zu untersuchen. Bekanntlich geht φ in φ' durch die eigentliche Substitution $1, -1, 0, 1$ über, und durch die nämliche Substitution verwandelt sich f in

$$\mathfrak{f}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})=(a, -a+b, a-2b+c, -a+3b-3c+d).$$

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, dass f, f' eigentlich aequivalent sind, ist nun in dem Falle $\frac{-4D}{mm} \genfrac{}{}{0pt}{}{>4}{=3}$, dass f' mit $\mathfrak{f}$ identisch, oder conträr sei; in dem Falle $\frac{-4D}{mm}=4$, dass f' entweder mit $\mathfrak{f}$ oder mit

$$\mathfrak{f}_1=\left(\frac{\mathfrak{b}A+\mathfrak{a}B}{m}, -\frac{\mathfrak{a}C+\mathfrak{b}B}{m}, \frac{\mathfrak{d}A+\mathfrak{c}B}{m}, -\frac{\mathfrak{c}C+\mathfrak{d}B}{m}\right),$$

oder mit deren conträren Formen, identisch sei, wobei zu bemerken, dass die drei Formen f', $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ dieselbe Charakteristik φ' haben.

Zwei kubische Formen $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1)$; $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2)$ von derselben Charakteristik $(A, -B, C)$ werden identisch sein, wenn $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{b}_2$ ist. Denn man hat

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1=\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1=\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{d}_2, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1-\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 =\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_2-\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}_2;$$

folglich nach der Voraussetzung

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1=\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2,$$
$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1=\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2-\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_2,$$
$$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1-\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1=\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_2-\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}_2$, wenn $\mathfrak{a}_1$ nicht null ist, folglich nach der zweiten Gleichung auch $\mathfrak{d}_1=\mathfrak{d}_2$. Wenn aber $\mathfrak{a}_1=0$ ist, so kann $\mathfrak{b}_1$ nicht verschwinden, denn sonst wäre $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1=\frac{1}{2}A=0$, gegen die Voraussetzung, folglich nach der zweiten Gleichung $\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}_2$, und nach der dritten $\mathfrak{d}_1=\mathfrak{d}_2$.

Verbindet man diese Bemerkung mit dem Vorhergehenden, so folgt:

Zwei kubische Formen $f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$, welche zu Charakteristiken entgegengesetzte reducirte Ancepsformen $\varphi=(A, B, C)$, $\varphi'=(A, -B, C)$ haben, sind immer, aber auch nur, eigentlich aequivalent, wenn in den Fällen $\frac{-4D}{mm}>4$, $\frac{-4D}{mm}=3$ die Bedingungen

$$\pm a'=a, \quad \pm b'=b-a;$$

in dem Falle $\frac{-4D}{mm}=4$ die Bedingungen

$$\pm a'=a, \quad \pm b'=b-a;$$

oder auch

$$\pm a' = \frac{(b-a)A+aB}{m}, \quad \mp b' = \frac{(b-a)B+aC}{m}$$

erfüllt sind, wo die Zeichen sich auf einander beziehen, m das grösste gem. Maass von A, $2B$, C (positiv genommen) bedeutet.

II. Sind in φ oder φ' die äussern Glieder gleich, so geht bekanntlich φ in φ' durch die Substitution 0, —1, 1, 0 über, durch welche sich f in $\mathfrak{f}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = (d, -c, b, -a)$ verwandelt. In den Fällen $\frac{-4D}{mm} \gtrless \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ muss nun f' mit $\mathfrak{f}$ identisch, oder conträr, in dem Falle $\frac{-4D}{mm}=4$ entweder mit $\mathfrak{f}$ oder mit

$$\mathfrak{f}_1 = \left(\frac{-cA+dB}{m}, -\frac{dA-cB}{m}, \frac{-aA+bB}{m}, -\frac{bA-aB}{m}\right),$$

oder deren conträren Formen identisch sein. Daher folgt:

Zwei kubische Formen $f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$, welche zu Charakteristiken entgegengesetzte reducirte Formen mit gleichen äussern Gliedern (A, B, A); $(A, -B, A)$ haben, sind immer, aber auch nur, eigentlich aequivalent, wenn in den Fällen $\frac{-4D}{mm} \gtrless \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ die Bedingungen

$$\pm a' = d, \quad \mp b' = c;$$

in dem Falle $\frac{-4D}{mm}=4$ die Bedingungen

$$\pm a' = d, \quad \mp b' = c;$$

oder auch

$$\pm a' = \frac{-cA+dB}{m}, \quad \mp b' = \frac{dA-cB}{m}$$

erfüllt sind, wo die Zeichen sich auf einander beziehen, m das grösste gem. Maass von A, $2B$ (positiv genommen) bedeutet.

40. *Aufgabe.* Alle kubischen Formen von derselben negativen Determinante in Klassen zu bringen.

Auflösung. Man stelle zuerst alle reducirten quadratischen Formen von der gegebenen Determinante auf, so dass die äussern Glieder positiv und gerade sind. Man bezeichne sie der Anschaulichkeit wegen mit

$\psi=(A, B, C)$; $\psi'=(A', B', C')$; $\psi''=(A'', B'', C'')$; u. s. w.
$\psi_1=(A, -B, C)$; $\psi'_1=(A', -B', C')$; $\psi''_1=(A'', -B'', C'')$; u. s. w.,

wobei zu bemerken, dass von zwei über einander stehenden Formen die eine von selbst wegfällt, wenn das Mittelglied verschwindet. B, B', B'', u. s. w. sollen positiv sein.

Man entwickele sodann alle kubische Formen zur Charakteristik ψ, und bringe sie in Klassen, welche durch Repräsentanten vertreten sind. Die Klassen der Formen zur entgegengesetzten Charakteristik ψ_1 findet man durch Veränderung der Vorzeichen im zweiten und vierten Gliede. — Ebenso verfahre man in Bezug auf die reducirten Formen ψ', ψ'_1; ψ'', ψ''_1; u. s. w. — Alle Klassen zu derselben Charakteristik, oder zu nicht eigentlich aequivalenten Charakteristiken, sind verschieden, und werden beibehalten. Es ist nun nachzusehen, ob unter den Reducirten Paare von entgegengesetzten, eigentlich aequivalenten Formen vorkommen. Gesetzt man finde ein solches Paar

$\psi^\mu=(A^\mu, B^\mu, C^\mu)$ mit den zugehörigen Klassenformen f, f', f'', f''', u. s. w.

$\psi^\mu_1=(A^\mu, -B^\mu, C^\mu)$ mit den zugehörigen Klassenformen f_1, f_1', f_1'', f_1''', u. s. w.

Alsdann hat man zu untersuchen (39.), ob f_1 mit irgend einer der Formen f, f', f'', f''' u. s. w. eigentlich aequivalent ist, oder nicht; im ersten Falle wird die Form f_1 ausgeworfen, dagegen beibehalten, wenn man sie mit keiner der besagten Formen eigentlich aequivalent findet. Verfährt man ebenso in Bezug auf die Formen f_1', f_1'', f_1''' u. s. w., so wird man alle möglichen, verschiedenen, Klassen der kubischen Formen von der gegebenen Determinante finden.

Man kann zur Abkürzung der Methode noch bemerken: Wenn z. B. f_1 mit f'' eigentlich aequivalent gefunden worden ist, so wird jede andere mit f_1 in einer Reihe befindliche Form mit f'' nicht eigentlich aequivalent sein, wie leicht erhellt. Sind also f_1 und f'', ebenso f_1' und f''', in einer Klasse, so werden bei der Untersuchung jeder andern Form der zweiten Reihe, (f_1'' f_1''', u. s. w.) in Bezug auf ihre eigentliche Aequivalenz mit einer Form der ersten Reihe die Formen f'', f''' übergangen werden können, u. s. w.

Beispiel.

$$D=-112\equiv 0 \text{ (mod. 4.)}.$$

Reducirte Formen

$$(2, 0, 56);\quad (4, 0, 28);\quad (8, 0, 14);\quad (8,\ 4, 16);$$
$$(8, -4, 16).$$

Zur Charakteristik (4, 0, 28) und (8, 0, 14) findet man keine kubische Formen, dagegen

zur Charakteristik (2, 0, 56)......die Klasse (0, 1, 0, —28)
zur Charakteristik (8, 4, 16).......die Klassen (0, —2, —2, 2);
(1, —1, —3, —1); (—1, —2, 0, 4);
zur Charakteristik (8, —4, 16)......die Klassen (0, +2, —2, —2);
(1, +1, —3, +1); (—1, +2, 0, —4).

Nun findet man

(0, +2, —2, —2) eigentlich aequivalent mit (0, —2, —2, 2);
(1, +1, —3, 1) eigentlich aequivalent mit (—1, —2, 0, 4);
(—1, +2, 0, —4) eigentlich aequivalent mit (1, —1, —3, —1);

folglich sind alle kubische Formen von der Determinante —112 in 4 Klassen enthalten, welche durch die folgenden Formen repräsentirt werden können:

(0, 1, 0, —28); (0, —2, —2, 2); (1, —1, —3, —1); (—1, —2, 0, 4).

Die Form (0, —2, —2, 2) ist mit ihrer entgegengesetzten (0, +2, —2, —2) eigentlich aequivalent gefunden; sie ist mit derselben aber auch uneigentlich aequivalent (13.), woraus leicht folgt, dass die Form (0, —2, —2, 2) sich selbst, sowie überhaupt jeder Form ihrer Klasse auf beiderlei Weise aequivalent ist. Dieser Umstand hat bekanntlich in der Theorie der quadratischen Formen ein Analogon.

41. Um die kubischen Formen von positiver Determinante zu klassificiren, wird man nach dem nämlichen Princip, wie vorher, zu verfahren haben. Man stellt nämlich zuerst alle reducirten quadratischen Formen (A, B, C) von der gegebenen Determinante auf, so dass die äussern Glieder gerade sind. Reducirt heisst aber eine solche Form nach Gauss, wenn $0<B<\sqrt{D}$ und $\sqrt{D}-B<\pm A<\sqrt{D}+B$ ist, indem D die Determinante bezeichnet. Hierauf theilt man diese Reducirten in Perioden, und entwickelt die allgemeinen Formeln für den Inbegriff aller kubischen Formen, welche diese Reducirten zu Charakteristiken haben. Alle Formen von derselben Charakteristik kann man nach dem Vorhergehenden klassificiren. Man weiss ferner, dass zwei kubische Formen, zu nicht eigentlich aequivalenten Charakteristiken gehörend, ebenfalls nicht eigentlich aequivalent sind, mithin verschiedenen Klassen angehören. Es kommt also nur darauf an, zu entscheiden, ob zwei kubische Formen, deren Charakteristiken sich in derselben Periode befinden, in dieselbe oder in verschiedene Klassen gehören, und auch diese Aufgabe ist im Vorhergehenden gelöst worden.

* * *

42. Viele von den vorhergehenden Schlüssen verlieren ihre Kraft, wenn die Determinante verschwindet. Es sind also die auf diesen Fall Bezug habenden Resultate noch zu entwickeln. Wir sind aber genöthigt, einige Betrachtungen über die quadratischen Formen von der Determinante Null vorausgehen zu las-

sen, da sich dieser Fall in den Disq. Arithm. nicht soweit ins Einzelne ausgeführt findet, als hier erforderlich ist.

43. *Aufgabe.* Die eigentliche Aequivalenz zweier quadratischen Formen von der Determinante null zu beurtheilen, und alle eigentlichen Transformationen der einen Form in die andere zu finden.

Auflösung. Die gegebenen Formen seien

$$\varphi=(A,\ B,\ C);\quad \varphi'=(A',\ B',\ C')$$

und

$$BB-AC=D=0,\ B'B'-A'C'=0.$$

Offenbar haben A und C gleiche Zeichen. Es sei m dass grösste gem. Maass von A, C, mit dem Zeichen dieser Zahlen genommen, nach der Gleichung $BB-AC=0$ geht es in B auf. Man kann daher

$$A=mgg,\ B=mgh,\ C=mhh$$

setzen, wo g und h prim gegen einander sind; denn das Zeichen des Products gh kann so angenommen werden, dass mgh mit B einerlei Zeichen hat. Es ist hiernach

$$\varphi=(mgg,\ mgh,\ mhh);\quad \varphi'=(mg'g',\ mg'h',\ mh'h')$$

zu setzen, wenn überhaupt eigentliche Aequivalenz zwischen φ und φ' möglich sein soll; denn das grösste gem. Maass von A, B, C muss dem grössten gem. Maass von A', B', C' gleich sein.

Geht nun φ in φ' durch die Substitution α, β, γ, δ über, so dass $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ist, so wird man folgende Bedingungsgleichungen haben:

$$\text{I. } g'^2=g^2\alpha^2+2gh\alpha\gamma+h^2\gamma^2=(g\alpha+h\gamma)^2,$$
$$\text{II. } g'h'=g^2\alpha\beta+gh(\alpha\delta+\beta\gamma)+h^2\gamma\delta=(g\alpha+h\gamma)(g\beta+h\delta),$$
$$\text{III. } h'^2=g^2\beta^2+2gh\beta\delta+h^2\delta^2=(g\beta+h\delta)^2.$$

Aus I. und III. folgt

$$g\alpha+h\gamma=\pm g'\ldots[1],\quad g\beta+h\delta=\pm h'\ldots[2];$$

womit noch $\alpha\delta-\beta\gamma=1\ldots[3]$ zu verbinden ist. Bezieht man die Zeichen nicht auf einander, so wird Gl. II. nicht befriedigt. Umgekehrt, wenn α, β, γ, δ den drei vorhergehenden Gleichungen genügen, so werden die Gleichungen I., II. und III. befriedigt, und φ geht in φ' durch die eigentlich aequivalente Substitution α, β, γ, δ über.

Bestimmt man t und u so, dass $gu-ht=1$ (wo man für t, u etwa die kleinsten positven Werthe nehmen kann), so sind be-

kanntlich alle Wurzeln der Gleichung [1] und der Gleichung [2] in folgenden Formeln begriffen:

$$\alpha = \pm g'u + rh,\quad \gamma = \mp g't - rg,\quad \beta = \pm h'u + r'h,\quad \delta = \mp h't - r'g,$$

wo r und r' ganz unbestimmte Zahlen sind. Substituirt man diese Werthe in [3], so findet sich noch zwischen r, r' die Bedingungsgleichung $g'r' - h'r = \mp 1$, und um die letztere zu lösen, mache man $g'u' - h't' = 1$, dann findet sich

$$r' = \mp u' - \varrho h',\quad r = \mp t' - \varrho g';$$

wo ϱ eine willkührliche Zahl, folglich durch Substitution

$$(1)\ \begin{cases} \alpha = \pm(g'u - ht') - \varrho g'h, \\ \beta = \pm(h'u - hu') - \varrho hh', \\ \gamma = \mp(g't - gt') + \varrho gg', \\ \delta = \mp(h't - gu') + \varrho gh'. \end{cases}$$

Diese Formel enthält den Inbegriff aller eigentlichen Substitutionen, durch welche φ in φ' übergeht.

44. Hieraus folgt

1°. Die einzige nothwendige und auch ausreichende Bedingung der eigentlichen Aequivalenz zweier quadratischen Formen von der Determinante null ist die, dass das grösste gem. Maass von A, C dem grössten gem. Maass von A', C' gleich ist, indem die gegebenen Formen durch (A, B, C); (A', B', C') bezeichnet sind.

2°. Da φ mit φ' uneigentlich aequivalent ist, wenn φ mit der Entgegengesetzten von φ' eigentlich aequivalent, so sind zwei eigentlich aequivalente Formen von der Determinante null immer gleichzeitig auch uneigentlich aequivalent. Um alle uneigentlichen Transformationen zu finden, braucht man in (1) nur g' und u' mit den entgegengesetzten Zeichen zu nehmen.

3°. Um alle eigentlichen Transformationen der Form φ in sich selbst zu finden, hat man

$$g' = g,\ h' = h,\ u' = u,\ t' = t;$$

folglich wegen $gu - ht = 1$:

$$(2)\ \begin{cases} \alpha = \pm 1 - \varrho gh, \\ \beta = -\varrho hh, \\ \gamma = +\varrho gg \\ \delta = \pm 1 + \varrho gh. \end{cases}$$

4°. Die quadratische Form (mgg, mgh, mhh) lässt sich immer in die damit eigentlich aequivalente (m, m, m) verwandeln. Alle eigentlichen Substitutionen, durch welche dies zu Stande kommt, zu finden, hat man $g' = 1$, $h' = 1$, $u' - t' = 1$, folglich $u' = 1$, $t' = 0$, und

$$(3)\quad \begin{aligned} \alpha &= \pm u - \varrho k, \\ \beta &= \pm(u-h) - \varrho h, \\ \gamma &= \mp t + \varrho g, \\ \delta &= \mp(t-g) + \varrho g. \end{aligned}$$

Die Form (m, m, m) kann die reducirte von (mgg, mgh, mhh) genannt werden.

5°. Reducirte Formen von der Determinante null (m, m, m); (m', m', m') können nicht aequivalent sein, wenn m und m' verschieden sind, folglich ist die Menge der Klassen der quadratischen Formen von der Determinante null unendlich.

45. *Aufgabe.* Alle kubischen Formen von der Determinante null zu finden, welche eine gegebene Charakteristik haben.

Auflösung. Die gegebene Charakteristik sei $\varphi = (A, B, C)$, wo $BB - AC = 0$ ist. Nimmt man an, es sei $f = (a, b, c, d)$ eine kubische Formen zu dieser Charakteristik, so wird man folgende Gleichungen haben:

$$2bb - 2ac = A,\quad bc - ad = B,\quad 2cc - 2bd = C,$$

und die Gleichung $BB - AC = 0$ verwandelt sich hiernach in

$$a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4db^3 + 4ac^3 - 6abcd = 0.$$

Aus der letztern Gleichung folgt durch Multiplication mit a^2, d^2:

$$(a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 = 4(bb-ac)^3 \text{ oder } (bA - aB)^2 = 4\left(\frac{A}{2}\right)^3,$$

$$(d^2a + 2c^3 - 3bcd)^2 = 4(cc-bd)^3 \text{ oder } (cC - dB)^2 = 4\left(\frac{C}{2}\right)^3;$$

woraus man sieht, dass A und C gerade und positiv sein müssen.

Nach 43. war nun $A = mgg$, $B = mgh$, $C = mhh$, wo g und h prim gegen einander sind. Setzt man diese Werthe in die Gleichung $(bA - aB)^2 = 4\left(\frac{A}{2}\right)^3$, so kommt $m^2g^2(bg - ah)^2 = \frac{1}{2}m^3g^6$, folglich, indem wir zuvörderst annehmen, dass A, folglich auch g, nicht verschwindet, $\left(\frac{bg - ah}{gg}\right)^2 = \frac{1}{2}m$, welche Gleichung zeigt, dass $\frac{1}{2}m$ eine Quadratzahl, und a durch g theilbar ist. Setzen wir nun $\frac{1}{2}m = \mu^2$, so kommt

$$b - \frac{a}{g}h = \pm g\mu,\quad b = \frac{a}{g}h \pm g\mu,\quad bb - ac = \mu^2g^2 = \left(\frac{a}{g}h \pm g\mu\right)^2 - ac,$$

$$\frac{a}{gg}h^2 \pm 2h\mu - c = 0;$$

mithin a durch g^2, folglich b durch g, theilbar. Man kann also $a=g^2a'$, $b=gb'$ setzen, und erhält $b'=a'h\pm\mu$, folglich

$$a=g^2a',\ b=g(a'h\pm\mu),\ c=h(a'h\pm2\mu),\ d=h^2\left(\frac{a'h\pm3\mu}{g}\right).$$

Da $\frac{a'h\pm3\mu}{g}$ eine ganze Zahl sein muss, so kann man $a'h\pm3\mu=gd'$ setzen, und es kommt

$$(4)\quad a=g^2a',\ b=g(a'h\pm\mu),\ c=h(d'g\mp\mu),\ d=h^2d',\ a'h-d'g=\mp3\mu.$$

Das Resultat ist also übersichtlich folgendes: Sollen zur Charakteristik φ kubische Formen gehören können, so muss

$$(5)\qquad \varphi=(2\mu^2g^2,\ 2\mu^2gh,\ 2\mu^2h^2)$$

sein, wo g und h prim gegen einander sind. Dies vorausgesetzt, sind alle gesuchten Formen des dritten Grades $(a,\ b,\ c,\ d)$ durch die Gleichung (4) bestimmt, indem a' und d' der Gleichung $a'h-d'g=\mp3\mu$ genügen müssen, welche immer lösbar ist.

Sind aber t, u zwei beliebige Wurzeln der Gleichung $gu-ht=1$, etwa die kleinsten positiven, so ist

$$a'=\pm3\mu t+rg,\ d'=\pm3\mu u+rh;$$

folglich

$$(6)\ \begin{cases} a=\pm3\mu tg^2+rg^3, \\ b=\pm\mu g(1+3th)+rg^2h, \\ c=\pm\mu h(3ug-1)+rgh^2, \\ d=\pm3\mu uh^2+rh^3; \end{cases}$$

wo die Zeichen sich auf einander beziehen, r eine willkührliche ganze Zahl ist.

Wenn A, also auch B, verschwindet, aber nicht C, so hat man

$$bb-ac=0,\ bc-ad=0,\ bc-bd=\frac{1}{2}C.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt aber leicht

$$a(cc-bd)=0,\ b(cc-bd)=0;$$

folglich

$$a=0,\ b=0,\ cc=\frac{1}{2}C;$$

folglich

(7) $\qquad (0,\ 0,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}C},\ d),$

der Inbegriff der kubischen Formen zur Charakteristik $(0, 0, C)$, wo d eine willkührliche Zahl bezeichnet.

Ist die Charakteristik endlich $(0, 0, 0)$, so hat man

$$bb-ac=0,\ bc-ad=0,\ cc-bd=0.$$

Bedeutet m das grösste gem. Maass von a und c, so kommt

$$a=ma',\ c=mc',\ b=mb',\ b'b'=a'c';$$

folglich, da a', c' prim gegen einander sind,

$$a'=p^2,\ c'=q^2,\ b'=pq;$$

mithin

$$a=mp^2,\ b=mpq,\ c=mq^2.$$

Die Gleichung $bc-ad=0$ wird $d=\dfrac{mq^3}{p}$, folglich

$$m=pm',\ a=m'p^3,\ b=m'p^2q,\ c=m'pq^2,\ d=m'q^3.$$

Umgekehrt die kubische Form

$$(8) \qquad (m'p^3,\ m'p^2q,\ m'pq^2,\ m'q^3)$$

hat die Charakteristik $(0, 0, 0)$, folglich sind alle kubischen Formen von dieser Charakteristik in der vorhergehenden Form begriffen, indem m', p, q willkührliche ganze Zahlen bedeuten.

46. Die Form $\varphi=(mgg,\ mgh,\ mhh)$ geht durch die Substitutionen

$$\pm 1-\varrho gh,\ -\varrho hh,\ +\varrho gg,\ \pm 1+\varrho gh$$

in sich selbst über. Ist nun $f=(a, b, c, d)$ eine kubische Form zur Charakteristik φ, so sollen die Formen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})=\mathfrak{f}$ bestimmt werden, in welche f durch die vorhergehenden Substitutionen sich verwandelt.

Man findet nach den Fundamentalgleichungen:

$$\mathfrak{a}=\varrho^3g^3(-ah^3+3bh^2g-3chg^2+dg^3)\pm3\varrho^2g^2(ah^2-2bgh+cg^2)$$
$$+3\varrho g(bg-ah)\pm a,$$

$$\mathfrak{b}=\varrho^3g^2h(-ah^3+3bh^2g-3chg^2+dg^3)\pm\varrho^2g(2ah^3-3bgh^2+dg^3)$$
$$-\varrho(ah^2+bgh-2cg^2)\pm b,$$

$$\mathfrak{c} = \varrho^3 gh^2(-ah^3 + 3bh^2g - 3chg^2 + dg^3) \pm \varrho^2 h(2dg^3 - 3cg^2h + ah^3)$$
$$+ \varrho(dg^2 + cgh - 2bh^2) \pm c,$$

$$\mathfrak{d} = \varrho^3 h^3(-ah^3 + 3bh^2g - 3chg^2 + dg^3) \pm 3\varrho^2 h^2(bh^2 - 2cgh + dg^2)$$
$$+ 3\varrho h(dg - ch) \pm d.$$

Substituirt man nun die sich aus den Gleichungen

$$2bb - 2ac = mgg,\quad bc - ad = mgh,\quad 2cc - 2bd = mhh$$

ergebenden Werthe von g, h, so findet sich

$$ah^2 - 2bgh + cg^2 = 0,\quad bh^2 - 2cgh + dg^2 = 0,$$

$$-ah^3 + 3bh^2g - 3chg^2 + dg^3 = -h(ah^2 - 2bgh + cg^2)$$
$$+ g(bh^2 - 2cgh + dg^2) = 0,$$

$$2ah^3 - 3bgh^2 + dg^3 = 2h(ah^2 - 2bgh + cg^2) + g(bh^2 - 2cgh + dg^2) = 0,$$

$$2dg^3 - 3chg^2 + ah^3 = 2g(bh^2 - 2cgh + dg^2) + h(ah^2 - 2bgh + cg^2) = 0,$$

$$ah^2 + bgh - 2cg^2 = ah^2 - 2bgh + cg^2 + 3(bgh - cg^2) = 3(bgh - cg^2),$$

$$dg^2 + cgh - 2bh^2 = dg^2 - 2cgh + bh^2 + 3(cgh - bh^2) = 3(cgh - bh^2);$$

folglich durch Substitution:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = \pm a + 3\varrho(bg^2 - agh), \\ \mathfrak{b} = \pm b + 3\varrho(cg^2 - bgh) = \pm b + 3\varrho(bgh - ah^2), \\ \mathfrak{c} = \pm c + 3\varrho(cgh - bh^2) = \pm c + 3\varrho(dg^2 - cgh), \\ \mathfrak{d} = \pm d + 3\varrho(dgh - ch^2). \end{cases}$$

Zu bemerken ist, dass die Form $\mathfrak{f} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ mit $f = (a, b, c, d)$ dieselbe Charakteristik hat, wie man durch Entwickelung der Werthe von $\mathfrak{bb} - \mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bc} - \mathfrak{ad}$, $\mathfrak{cc} - \mathfrak{bd}$ findet.

47. *Aufgabe.* Zu beurtheilen, ob zwei gegebene kubische Formen von derselben Charakteristik mit der Determinante null eigentlich aequivalent sind oder nicht, und im ersten Falle alle eigentlichen Transformationen der einen Form in die andere zu bestimmen.

Auflösung. Die gegebenen kubischen Formen seien $f = (a, b, c, d)$; $f' = (a', b', c', d')$, ihre gemeinschaftliche Charakteristik φ. Man hat nothwendig (45).

$$\varphi = (2\mu^2 g^2,\ 2\mu^2 gh,\ 2\mu^2 h^2),$$

wo g und h prim gegen einander.

$$(10)\quad \begin{aligned} a &= 3\varepsilon\mu t g^3 + r g^3 \\ b &= \varepsilon\mu g(1+3th) + r g^2 h \\ c &= \varepsilon\mu h(3ug-1) + r g h^2 \\ d &= 3\varepsilon\mu u h^2 + r h^3 \end{aligned} \qquad (11)\quad \begin{aligned} a' &= 3\varepsilon'\mu t g^3 + r' g^3 \\ b' &= \varepsilon'\mu g(1+3th) + r' g^2 h \\ c' &= \varepsilon'\mu h(3ug-1) + r' g h^2 \\ d' &= 3\varepsilon'\mu u h^2 + r' h^3; \end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, r, r' bestimmte ganze Zahlen, t und u die kleinsten positiven Wurzeln der Gleichung $gu - ht = 1$ sind.

Geht nun f in f' durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ über, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so wird φ in φ durch die nämliche Substitution übergehen (9.). Alle Substitutionen dieser Art aber, durch welche φ in sich selbst übergeht, sind

$$\pm 1 - \varrho gh,\ -\varrho hh,\ +\varrho gg,\ \pm 1 + \varrho gh \quad (44)$$

folglich kann nur durch eine oder mehrere dieser Substitutionen f in f' übergehen. Hieraus folgt, dass f' mit einer der durch (9) bestimmten Formen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ identisch sein muss. Substituirt man aber in (9) für a, b, c, d ihre Werthe aus (10) in den Coefficienten von 3ϱ, so findet sich

$$\mathfrak{a} = \pm a \pm 3\varepsilon\varrho\mu g^3,\ \mathfrak{b} = \pm b + 3\varepsilon\varrho\mu g^2 h,\ \mathfrak{c} = \pm c + 3\varepsilon\varrho\mu g h^2,\ \mathfrak{d} = \pm d + 3\varepsilon\varrho\mu h^3;$$

mithin muss sich ϱ so bestimmen lassen, dass

$$(12)\quad \begin{aligned} a' &= \pm a + 3\varepsilon\varrho\mu g^3, \\ b' &= \pm b + 3\varepsilon\varrho\mu g^2 h, \\ c' &= \pm c + 3\varepsilon\varrho\mu g h^2, \\ d' &= \pm d + 3\varepsilon\varrho\mu h^3. \end{aligned}$$

Die Zeichen von ε, ε' sind bekannt, die Zeichen von a, b, c, d sind noch willkührlich, beziehen sich aber auf einander, und stimmen mit den Vorzeichen in der Substitution

$$\pm 1 - \varrho gh,\ -\varrho hh,\ +\varrho gg,\ \pm 1 + \varrho gh.$$

Wenn nun erstens die Zeichen von ε, ε' einander gleich sind, so findet man für die obern Zeichen in (12)

$$\frac{(r'-r)g^3}{3\varepsilon\mu g^3} = \frac{(r'-r)g^2 h}{3\varepsilon\mu g^2 h} = \frac{(r'-r)gh^2}{3\varepsilon\mu g h^2} = \frac{(r'-r)h^3}{3\varepsilon\mu h^3} = \varrho,$$

woraus sich $\varrho = \frac{r'-r}{3\varepsilon\mu}$ ergiebt. Für die untern Zeichen in (12) würde

$$3(\varepsilon'+\varepsilon)\mu t + (r'+r)g = 3\varepsilon\varrho\mu g,\ (\varepsilon'+\varepsilon)\mu(1+3th) + (r'+r)gh = 3\varepsilon\varrho\mu g h,$$

folglich, wenn man die erste Gleichung mit h multiplicirt, und dann subtrahirt, $(\varepsilon'+\varepsilon)\mu = 0$, was unmöglich ist.

Wenn zweitens die Zeichen von ε, ε' verschieden sind, so findet man für die untern Zeichen in (12)

$$\frac{(r'+r)g^3}{3\varepsilon\mu g^3}=\frac{(r'+r)g^2h}{3\varepsilon\mu g^2h}=\frac{(r'+r)gh^2}{3\varepsilon\mu gh^2}=\frac{(r'+r)h^3}{3\varepsilon\mu h^3}=\varrho,$$

woraus sich $\varrho=\frac{r'+r}{3\varepsilon\mu}$ ergiebt. Für die obern Zeichen in (12) würde auf ähnliche Art wie oben $(\varepsilon'-\varepsilon)\mu=0$, was unmöglich ist.

Das Resultat ist also übersichtlich folgendes:

Nachdem man die Charakteristik auf die Form $\varphi=(2\mu^2g^2, 2\mu^2gh, 2\mu^2h^2)$, die dazu gehörenden kubischen Formen auf die Form

$$(13)\begin{cases} f=(3\varepsilon\mu tg^2+rg^3,\ \varepsilon\mu g(1+3th)+rg^2h,\ \varepsilon\mu h(3ug-1)+rgh^2,\\ \qquad\qquad 3\varepsilon\mu uh^2+rh^3);\\ f'=(3\varepsilon'\mu tg^2+r'g^3,\ \varepsilon'\mu g(1+3th)+r'g^2h,\ \varepsilon'\mu h(3ug-1)+r'gh^2,\\ \qquad\qquad 3\varepsilon'\mu uh^2+r'h^3) \end{cases}$$

gebracht hat, wo die numerischen Werthe von ε, ε' der Einheit gleich sind, werden f und f' eigentlich aequivalent sein, wenn die Bedingung

$$(14)\qquad r'-\varepsilon\varepsilon' r\equiv 0 \pmod{3\mu}$$

erfüllt ist, und umgekehrt.

Und wenn man f, f' mit (a, b, c, d); (a', b', c', d') bezeichnet, so ist nothwendig

$$(15)\begin{cases} a'\mp a=3\varepsilon\varrho\mu g^3,\\ b'\mp b=3\varepsilon\varrho\mu g^2h,\\ c'\mp c=3\varepsilon\varrho\mu gh^2,\\ d'\mp d=3\varepsilon\varrho\mu h^3; \end{cases}$$

wo die obern, oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem $\varepsilon\varepsilon'=+1$, oder $\varepsilon\varepsilon'=-1$ ist.

Es giebt nur eine eigentliche Transformation aus f in f', nämlich

$$\varepsilon'-\varrho g,\ -\varrho hh_1+\varrho gg,\ \varepsilon'+\varrho gh;$$

wo $\varrho=\frac{r'-\varepsilon\varepsilon' r}{3\varepsilon\mu}$ ist.

Beispiel.

$$f=(4,\ 4,\ 3,\ 0)$$
$$f'=(20,\ 32,\ 51,\ 81)\ \varphi=(8,\ 12,\ 18).$$

Hier ist

$$\mu=1,\ g=2,\ h=3,\ u=2,\ t=1,\ r=2,\ \varepsilon=-1,\ r'=1,\ \varepsilon'=+1,$$
$$r'-\varepsilon\varepsilon' r\equiv 0 \pmod{3.},$$

folglich f, f' eigentlich aequivalent. Da $\varrho=\frac{r'+r}{-3}=-1$, so ist die einzig mögliche eigentliche Transformation aus f in f' diese: 5, 9, —4, —7.

48. *Aufgabe*. **Zu beurtheilen, ob zwei gegebene kubische Formen von der Determinante null eigentlich aequivalent sind, oder nicht, und im ersten Falle alle eigentlichen Transformationen der einen Form in die andere zu finden.**

Auflösung. Die gegebenen Formen seien f, f', ihre Charakteristiken φ, φ'. Sind die letztern nicht eigentlich aequivalent, so können es die kubischen Formen auch nicht sein. Sind φ, φ' aber eigentlich aequivalent, was immer, aber auch nur dann der Fall sein wird (44.), wenn

$$\varphi=(2\mu^2 g^2,\ 2\mu^2 gh,\ 2\mu^2 h^2),$$
$$\varphi'=(2\mu^2 g'^2,\ 2\mu^2 g'h',\ 2\mu^2 h'^2)$$

ist, wo g, h, ebenso g', h', prim gegen einander, so suche man irgend eine eigentliche Transformation aus φ in φ' (43.), und transformire f durch eben diese Substitution in eine andere kubische Form $\mathfrak{f}$, welche mit f' die gemeinschaftliche Charakteristik φ' haben wird. Man untersuche, ob $\mathfrak{f}$ und f' eigentlich aequivalent sind, oder nicht (47), und im einen, oder andern Falle werden f, f' eigentlich aequivalent sein, oder nicht.

Bedeutet α, β, γ, δ irgend eine eigentliche Transformation aus φ in φ', ist f durch dieselbe in $\mathfrak{f}$ transformirt, und p, q, r, s die eigentliche Transformation aus $\mathfrak{f}$ in f', so wird

$$\alpha p+\beta r,\ \alpha q+\beta s,\ \gamma p+\delta r,\ \gamma q+\delta s$$

die einzig mögliche eigentliche Substitution aus f in f' sein. (vergl. 18.)

49. Es sei $f=(a,\ b,\ c,\ d)$ eine kubische Form von der Determinante null, $\varphi=(2\mu^2 g^2,\ 2\mu^2 gh,\ 2\mu^2 h^2)$ ihre Charakteristik. Die letztere kann durch Substitutionen α, β, γ, δ in die mit ihr eigentlich aequivalente Form $(2\mu^2,\ 2\mu^2,\ 2\mu^2)$ transformirt werden (44.). Transformirt man nun f durch die nämliche Substitution in $\mathfrak{f}$, so wird die letztere Form mit f eigentlich aequivalent sein, und die Charakteristik $(2\mu^2,\ 2\mu^2,\ 2\mu^2)$ haben. Hieraus folgt, dass **jede kubische Form von der Determinante null sich auf eine mit ihr**

eigentlich aequivalente Form, deren Charakteristik eine Reducirte ist, zurückführen lässt. Alle quadratischen Reducirten von der Determinante null, welchen überhaupt kubische Formen zugehören, sind $\varphi=(2\mu^2, 2\mu^2, 2\mu^2)$, wo für μ alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3,.... der Reihe nach zu setzen sind. Da nun, für zwei verschiedene Werthe von μ, die Formen φ in verschiedene Klassen gehören, so gilt dasselbe von den entsprechenden kubischen Formen, und man sieht, dass die Anzahl der Klassen aller kubischen Formen von der Determinante null unendlich ist.

* * *

50. Das Problem: zu untersuchen, ob von zwei gegebenen Formen des dritten Grades die eine die andere eigentlich einschliesse, oder nicht, und im ersten Falle alle eigentlichen Transformationen der ersten Form in die zweite zu bestimmen, gestattet eine ähnliche Lösung, wie das betreffende in der Theorie der quadratischen Formen, welches ich im Archiv Th. XIII. p. 105. ff. behandelt habe.

Es seien nämlich $f=(a, b, c, d)$; $f'=(a', b', c', d')$ die gegebenen Formen des dritten Grades, $\varphi=(A, B, C)$; $\varphi'=(A', B', C')$ die Charakteristiken derselben resp., endlich D, D' die Determinanten von f, f'. Verwandelt sich f in f' durch die eigentliche Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, und setzt man $\alpha\delta-\beta\gamma=e$, so ist

$$[1]\quad \begin{aligned} a' &= a\alpha^3+3b\alpha^2\gamma+3c\alpha\gamma^2+d\gamma^3,\\ b' &= a\alpha^2\beta+b\alpha(\alpha\delta+2\beta\gamma)+c\gamma(\beta\gamma+2\alpha\delta)+d\gamma^2\delta,\\ c' &= a\alpha\beta^2+b\beta(\beta\gamma+2\alpha\delta)+c\delta(\alpha\delta+2\beta\gamma)+d\gamma\delta^2,\\ d' &= a\beta^3+3b\beta^2\delta+3c\beta\delta^2+d\delta^3; \end{aligned}$$

$$[2]\quad \begin{aligned} \frac{A'}{e^2} &= A\alpha\alpha+2B\alpha\gamma+C\gamma\gamma,\\ \frac{B'}{e^2} &= A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta, \qquad D'=De^6;\\ \frac{C'}{e^2} &= A\beta\beta+2B\beta\delta+C\delta\delta. \end{aligned}$$

Den Fall $e=0$ werden wir zuvörderst ausschliessen; und da die Substitution eigentlich sein soll, so wird $e>1$ sein. Soll also f' unter f enthalten sein können, so muss D' durch D theilbar, und der Quotient eine sechste Potenz sein. Ferner sind $\frac{1}{2}A'$, B', $\frac{1}{2}C'$ durch e^2 theilbar. Endlich wird das grösste gem. Maass von a, $b(3b)$, $c(3c)$, d im grössten gem. Maass von a', $b'(3b')$, $c'(3c')$, d' aufgehen. Diese Bedingungen werden sämmtlich als erfüllt angenommen.

Es sei μ das grösste gem. Maass von α, γ; $\alpha=\mu\alpha^0$, $\gamma=\mu\gamma^0$, (α^0, γ^0 werden prim gegen einander sein), und $\alpha^0\delta^0-\beta^0\gamma^0=1$.

Wegen der Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=e$ oder $\alpha^0\delta-\gamma^0\beta=\frac{e}{\mu}$ ist dann, wenn wir $\frac{e}{\mu}=\nu$ setzen, nothwendig $\beta=\nu\beta^0+\varkappa\alpha^0$, $\delta=\nu\delta^0+\varkappa\gamma^0$. Man denke sich für β^0, δ^0, $\varkappa$ bestimmte Werthe genommen. Es sei $\delta^{0\prime}$, $\beta^{0\prime}$ ein anderes Wurzelpaar der Gleichung $\alpha^0x-\gamma^0y=1$, also $\delta^{0\prime}=\delta^0-\varphi\gamma^0$, $\beta^{0\prime}=\beta^0-\varphi\alpha^0$, wo φ eine ganze Zahl, man wird $\beta=\nu\beta^{0\prime}+\varkappa'\alpha^0$, $\delta=\nu\delta^{0\prime}+\varkappa'\gamma^0$ setzen können. Durch Substitution findet sich

$$\beta=\nu\beta^0+\varkappa\alpha^0=\nu(\beta^0-\varphi\alpha^0)+\varkappa'\alpha^0=\nu\beta^0+\varkappa\alpha^0+(\varkappa'-\varkappa-\nu\varphi)\alpha^0,$$
$$\delta=\nu\delta^0+\varkappa\gamma^0=\nu(\delta^0-\varphi\gamma^0)+\varkappa'\gamma^0=\nu\delta^0+\varkappa\gamma^0+(\varkappa'-\varkappa-\nu\varphi)\gamma^0;$$

folglich $\varkappa'=\varkappa+\nu\varphi$. Umgekehrt macht man

$$\delta^{0\prime}=\delta^0-\varphi\gamma^0,\quad \beta^{0\prime}=\beta^0-\varphi\alpha^{0\prime},\quad \varkappa'=\varkappa+\nu\varphi,$$

und setzt

$$\beta=\nu\beta^{0\prime}+\varkappa'\alpha^0,\quad \delta=\nu\delta^{0\prime}+\varkappa'\gamma^0,$$

so wird die Gleichung $\alpha^0\delta-\gamma^0\beta=\nu$ befriedigt. Wegen $\varkappa'=\varkappa+\nu\varphi$ kann man nun φ dergestalt bestimmen, dass $\varkappa'$ zwischen 0 und $\nu-1$ incl. liegt. Es kann also für δ^0, β^0 ein solches Wurzelpaar der Gleichung $\alpha^0\delta^0-\gamma^0\beta^0=1$ genommen werden, dass alle Wurzeln der Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=e$ in $\beta=\nu\beta^0+\varkappa\alpha^0$, $\delta=\nu\delta^0+\varkappa\gamma^0$ begriffen sind, und die ganze Zahl $\varkappa$ zwischen den Grenzen 0 und und $\nu-1$ incl. enthalten ist. Substituirt man nun die Werthe

$$[3]\quad \alpha=\mu\alpha^0,\ \gamma=\mu\gamma^0,\ \beta=\beta^0+\nu\alpha^0,\ \delta=\delta^0+\nu\gamma$$

in die Gleichungen [1], so findet sich nach leichter Rechnung:

$$\mathfrak{A}=a\alpha^{03}+3b\alpha^{02}\gamma^0+3c\alpha^0\gamma^{02}+d\gamma^{03},$$
$$\mathfrak{B}=a\alpha^{02}\beta^0+b\alpha^0(\alpha^0\delta^0+2\beta^0\gamma^0)+c\gamma^0(\beta^0\gamma^0+2\alpha^0\delta^0)+\delta\gamma^{02}\delta^0,$$
$$\mathfrak{C}=a\alpha^0\beta^{02}+b\beta^0(\beta^0\gamma^0+2\alpha^0\delta^0)+c\delta^0(\alpha^0\delta^0+2\beta^0\gamma^0)+d\gamma^0\delta^{02},$$
$$\mathfrak{D}=a\beta^{03}+3b\beta^{02}\delta^0+3c\beta^0\delta^{02}+d\delta^{03};$$

wo die Grössen links durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$[4]\quad \begin{aligned} a'&=\mu^3\mathfrak{A},\\ b'&=\mu^2(\nu\mathfrak{B}+\varkappa\mathfrak{A}),\\ c'&=\mu(\nu^2\mathfrak{C}+2\varkappa\nu\mathfrak{B}+\varkappa^2\mathfrak{A}),\\ d'&=\nu^3\mathfrak{D}+3\nu^2\varkappa\mathfrak{C}+3\nu\varkappa^2\mathfrak{B}+\varkappa^3\mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Da nun $\alpha^0\delta^0-\beta^0\gamma^0=1$, so folgt aus den vorhergehenden Gleichungen, dass die Form $f=(a, b, c, d)$ in die mit ihr eigentlich aequivalente Form $\mathfrak{F}=(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ durch die Substitution α^0, β^0, γ^0, δ^0 übergeht. Umgekehrt, geht f in $\mathfrak{F}$ durch die eigentlich aequivalente Substitution α^0, β^0, γ^0, δ^0 über, indem angenommen

wird, dass sich aus den Gleichungen [4] ganze Werthe von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 ergeben, so ist leicht zu zeigen, dass f in f' durch die Substitution

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = \mu\alpha^0,\ \beta^0 + \nu\alpha^0,\ \mu\gamma^0,\ \delta^0 + \nu\gamma^0$$

übergeht, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = \mu\nu = e$ ist.

Wir haben hiernach folgende allgemeine Lösung unseres Problems: Vorausgesetzt, dass D, De^6 die Determinanten der kubischen Formen $f = (a, b, c, d,)$; $f' = (a', b', c', d')$ sind, wo $e > 1$, sei μ ein positiver Theiler von e, $\frac{e}{\mu} = \nu$, $\varkappa$ eine Zahl zwischen 0 und $\nu - 1$ incl., die drei Zahlen μ, ν, $\varkappa$ aber von der Beschaffenheit, dass die durch die Gleichungen [4] bestimmten Werthe von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 ganze Zahlen werden, und die Form 𝔉 = (𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇) mit $f = (a, b, c, d)$ eigentlich aequivalent ist; bezeichnet man dann den Inbegriff der eigentlichen Transformationen aus f in 𝔉 mit α^0, β^0, γ^0, δ^0, so wird f in f' durch die Substitution $\mu\alpha^0$, $\nu\beta^0 + \varkappa\alpha^0$, $\mu\gamma^0$, $\nu\delta^0 + \varkappa\gamma^0$ übergehen; und wenn man alle auf obige Weise bestimmten Formen 𝔉 in Betracht zieht, so wird man zu allen eigentlichen Transformationen aus f in f' gelangen.

Findet man keine Werthe μ, ν, $\varkappa$ von der Art, dass 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 ganze Zahlen werden, oder entsteht, wenn dies auch der Fall ist, keine mit f eigentlich aequivalente Form 𝔉, so ist sicher f' unter f nicht eigentlich enthalten.

Unter den nach dieser Methode entdeckten Substitutionen werden keine zwei identisch sein. Denn dass zuerst zwei verschiedene Transformationen aus f in dieselbe Form 𝔉 nicht dieselbe Transformation aus f in f' hervorbringen können, erhellt leicht. Es sei ferner α^0, β^0, γ^0, δ^0 eine Transformation aus f in 𝔉, zu den Werthen μ, ν, $\varkappa$; $\alpha^{0\prime}$, $\beta^{0\prime}$, $\gamma^{0\prime}$, $\delta^{0\prime}$ eine Transformation aus f in die von 𝔉 verschiedene Form 𝔉$'$, zu den Werthen μ', ν', $\varkappa'$ gehörig. Dann ist

$$\mu\alpha^0 = \mu'\alpha^{0\prime} \ldots (1),\ \nu\beta^0 + \varkappa\alpha^0 = \nu'\beta^{0\prime} + \varkappa'\alpha^{0\prime} \ldots (2),\ \mu\gamma^0 = \mu'\gamma^{0\prime} \ldots (3),$$
$$\nu\delta^0 + \varkappa\gamma^0 = \nu'\delta^{0\prime} + \varkappa'\gamma^{0\prime} \ldots (4),\ \mu\nu = \mu'\nu' = e \ldots (5).$$

Aus (1) und (3) folgt

$$\mu\mu'(\alpha^0\gamma^{0\prime} - \gamma^0\alpha^{0\prime}) = 0,$$

folglich

$$\alpha^0\gamma^{0\prime} - \gamma^0\alpha^{0\prime} = 0,\ \frac{\alpha^0}{\gamma^0} = \frac{\alpha^{0\prime}}{\gamma^{0\prime}};$$

da aber jeder dieser Brüche in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, und α^0, $\alpha^{0\prime}$ gleiche Zeichen haben, indem die Zeichen von μ und μ' gleich sind, so folgt $\alpha^0 = \alpha^{0\prime}$, $\gamma^0 = \gamma^{0\prime}$, mithin auch $\mu = \mu'$,

und nach (5) $\nu = \nu'$; daher nach (2) und (4)

$$\nu(\beta^0 - \beta^{0\prime}) = (\varkappa' - \varkappa)\alpha^0, \quad \nu(\delta^0 - \delta^{0\prime}) = (\varkappa' - \varkappa)\gamma^0;$$

folglich

$$(\varkappa' - \varkappa)\alpha^0, \quad (\varkappa' - \varkappa)\gamma^0,$$

oder

$$(\varkappa' - \varkappa)\alpha^0\delta^0, \quad (\varkappa' - \varkappa)\beta^0\gamma^0$$

oder

$$(\varkappa' - \varkappa)(\alpha^0\delta^0 - \beta^0\gamma^0),$$

d. i. $\varkappa' - \varkappa$ durch ν theilbar, also $\varkappa' = \varkappa$ indem $\varkappa$ und $\varkappa'$ beide zwischen 0 und $\nu - 1$ liegen sollen; hieraus folgt weiter $\beta^0 = \beta^{0\prime}$, $\delta^0 = \delta^{0\prime}$, mithin die Formen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ identisch.

'51. Für die Praxis des Verfahrens werden noch folgende Bemerkungen zweckdienlich sein.

Bezeichnet man die Charakteristik der Form $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ mit (K, L, M), so folgt aus den Formeln [4] durch Rechnung

$$[5] \quad A' = \mu^2 e^2 K, \quad B' = \mu e^2(\nu L + \varkappa K, \quad C' = e^2(\nu^2 M + 2\varkappa\nu L + \varkappa^2 K);$$

folglich, wenn man diese Gleichungen mit [4] combinirt,

$$[6] \ldots\ldots \mathfrak{A} = \frac{a'}{\mu^3}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\frac{b'}{\mu^2} - \varkappa\mathfrak{A}}{\nu};$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \frac{b'b' - a'c'}{\mu^2 e^2};$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{D} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{b'c' - a'd'}{\mu e^2} - 2\varkappa . \frac{b'c' - a'c'}{\mu^2 e^2}\right].$$

Nach der Voraussetzung müssen $\frac{b'b' - a'c'}{e^2}$, $\frac{b'c' - a'd'}{e^2}$ ganze Zahlen sein. Man wird also damit anfangen, nur diejenigen Theiler μ in Betracht zu ziehen, für welche a' durch μ^3, b' und $\frac{b'b' - a'c'}{e^2}$ durch μ^2, $\frac{b'c' - a'd'}{e^2}$ durch μ theilbar. Die Congruenz $\varkappa\mathfrak{A} \equiv \frac{b}{r}$ (mod. ν) wird die verschiedenen Werthe von $\varkappa$ unter ν geben wodurch zugleich die Werthe von $\mathfrak{B}$ bekannt werden. Die be-

den letzten Gleichungen [6] liefern die Werthe von $\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{D}$, wenn $\mathfrak{A}$ nicht verschwindet. Verschwindet a', also auch $\mathfrak{A}$, so kann man sich bei der Berechnung von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ unmittelbar der Formeln [4] bedienen.

Beispiel.

$f=(a, b, c, d)=(1, 2, 0, -1) \ldots\ \varphi=(8, 1, 4) \ldots D=-31$

$f'=(a', b' c', d')=(1, 7, 13 -8) \ldots\ \varphi'=(72, 99, 450) .. D'=-31 . 3^6$.

Hier ist $e=3$, μ kann nur $=1$ sein, also

$\nu=3$, $\mathfrak{A}=1$, $\varkappa\equiv 7$ (mod. 3) $=1$, $\mathfrak{B}=2$, $\mathfrak{C}=0$, $\mathfrak{D}=-1$;

folglich $\mathfrak{F}=(1, 2, 0, -1)$. Es giebt eine eigentliche Substitution, durch welche f in die mit ihr eigentliche Form $\mathfrak{F}$ übergeht, nämlich $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0 = 1, 0, 0, 1$, folglich ist f' unter f enthalten, und 1, 1, 0, 3 die einzig mögliche eigentliche Transformation aus f in f'.

52. Durch die vorhergehende Theorie sind die Untersuchungen über die Aequivalenz und Einschliessung der Formen des dritten Grades der Hauptsache nach erledigt. Es müsste nun die Theorie der Darstellungen folgen, durch welche zunächst jede **homogene** Gleichung des dritten Grades mit zwei Variabeln aufgelöst würde.

Da es mir aber noch nicht gelungen ist, diesen schwierigen Gegenstand erschöpfend zu behandeln, wenn sich auch schon eine Menge einzelner, auffallend merkwürdiger, Resultate dargeboten hat, so dürfte es angemessen scheinen, die Behandlung desselben uns gegenwärtig noch vorzubehalten.

II.

Ueber den Vortrag der Lehre von Kegelschnitten.

Von
dem Herausgeber.

I.

Bei dem elementaren Vortrage der Lehre von den
schnitten, den ich für jetzt bloss allein im Auge habe, giel
gewöhnlich für jede dieser drei Curven eine aus ihrer Ents
in der Ebene hergeleitete besondere Definition, geht von
Definition zu der Gleichung der Curve über, und leitet au
selben dann die verschiedenen Eigenschaften der Curve her
ser und wissenschaftlicher wäre es indess vielleicht, wen
um Alles gleich von vorn herein unter einen allgemeinen Ge
punkt zu fassen, von einer allgemeinen Definition aller dr
gelschnitte ausginge, aus dieser Definition dann eine allge
Gleichung dieser Curven herleitete, hierauf die verschieden
ten der in dieser allgemeinen Gleichung enthaltenen Curve
suchte, deren specielle Gleichungen entwickelte, und sowo
diesen, als auch aus der allgemeinen Gleichung die Eiger
ten der Curve herleitete. Dass dieser Weg wesentliche V
vor dem, welcher gewöhnlich bei dem elementaren Vortrage der
von den Kegelschnitten eingeschlagen wird, haben würde, s
mir keinem Zweifel zu unterliegen; die ganze Darstellung
dadurch offenbar an Einheit gewinnen, und sich mehr der
nen Methode nähern, welche man in der analytischen Geo
wo man die Kegelschnitte gleich von vorne herein als Lini
zweiten Ordnung betrachtet und durch eine ganz allgemeine
chung charakterisirt, zu befolgen pflegt. Es käme nur dar
eine leicht verständliche allgemeine Definition der Kegels
zu finden, und die Darstellung, wie es der elementare V

fordert, überhaupt so einfach wie möglich zu machen. Vielleicht dürfte der folgende Weg, den ich hier zugleich auch deshalb betrete, um zu zeigen, wie man, wenn man denselben weiter verfolgt, auch auf die einfachste und leichteste Weise zu der für viele Untersuchungen so wichtigen allgemeinen Polargleichung der Kegelschnitte gelangen kann, zu weiterer Beachtung bei dem Unterrichte in der Lehre von den Kegelschnitten sich einigermassen empfehlen.

II.

Erklärung.

Wenn eine krumme Linie nach einem solchen Gesetze gekrümmt ist, dass die beiden Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von einem gegebenen Punkte und einer der Lage nach gegebenen geraden Linie ein constantes Verhältniss zu einander haben, so nennt man diese krumme Linie einen Kegelschnitt.

Der gegebene Punkt wird der Brennpunkt oder Focus, die gegebene gerade Linie wird die Directrix des Kegelschnitts genannt. Den Exponenten des constanten Verhältnisses zwischen den beiden Entfernungen eines jeden Punktes des Kegelschnitts von seinem Brennpunkte und seiner Directrix, oder bestimmter die Zahl, mit welcher man die Entfernung eines jeden Punktes des Kegelschnitts von der Directrix multipliciren muss, um die Entfernung dieses Punktes des Kegelschnitts von dem Brennpunkte zu erhalten, welche natürlich immer als positiv zu betrachten ist, wollen wir die Charakteristik des Kegelschnitts nennen, und im Folgenden immer durch n bezeichnen.

Aufgabe.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte zu finden.

Auflösung. Man nehme der Einfachheit wegen den Brennpunkt als Anfang, die durch den Brennpunkt gehende und auf der Directrix senkrecht stehende gerade Linie als Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, und bezeichne in diesem Systeme die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Directrix mit der Axe der x durch i, 0. Sind nun x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Kegelschnitts in dem in Rede stehenden Coordinatensysteme, so ist x^2+y^2 das Quadrat der Entfernung dieses Punktes von dem Brennpunkte, und $(x-i)^2$ oder $(i-x)^2$ ist offenbar das Quadrat seiner Entfernung von der Directrix. Daher ist nach der vorhergehenden allgemeinen Erklärung der Kegelschnitte

$$1) \qquad x^2+y^2=n^2(i-x)^2$$

die allgemeine Gleichung dieser Curven.

Folgerungen aus der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte.

Die ersten Coordinaten der Punkte, in denen die Axe der x von dem Kegelschnitte geschnitten wird, erhält man, wenn man in der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte $y=0$ setzt, und aus der dadurch hervorgehenden Gleichung dann x bestimmt. Für $y=0$ ist aber nach 1)

$$x^2=n^2(i-x)^2,$$

also

$$x=\pm n(i-x)=\pm ni\mp nx, \quad (1\pm n)x=\pm ni;$$

folglich für $y=0$:

$$2)\qquad x=\pm\frac{ni}{1\pm n}=\frac{ni}{n\pm1}.$$

Die doppelten Zeichen in dieser Gleichung lassen sogleich erkennen, dass im Allgemeinen die Axe der x in zwei Punkten von dem Kegelschnitte geschnitten wird, deren erste Coordinaten

$$\frac{ni}{n+1} \text{ und } \frac{ni}{n-1}$$

sind. Nur der Fall macht eine Ausnahme hiervon, wenn $n=1$ ist, weil in diesem Falle

$$\frac{ni}{n-1}$$

unendlich wird, d. h. keinen bestimmten Werth hat, so dass es also in diesem Falle nur einen durch die erste Coordinate

$$\frac{ni}{n+1}$$

bestimmten Durchschnittspunkt des Kegelschnitts mit der Axe der x giebt.

Dies führt unmittelbar darauf, zwei Klassen von Kegelschnitten zu unterscheiden, nämlich:

1. Kegelschnitte, welche die Axe der x ein Mal schneiden, deren Charakteristik $n=1$ ist;

2. Kegelschnitte, welche die Axe der x zwei Mal schneiden, deren Charakteristik $n \lessgtr 1$ ist.

Ueberhaupt aber werden sich offenbar die folgenden drei Arten der Kegelschnitte unterscheiden lassen:

1. Kegelschnitte, deren Charakteristik $n=1$ ist;

2. Kegelschnitte, deren Charakteristik $n<1$ ist;
3. Kegelschnitte, deren Charakteristik $n>1$ ist.

Jede dieser drei Arten der Kegelschnitte wollen wir nun etwas näher betrachten.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, deren Charakteristik $n=1$ ist, ist nach 1)

$$3)\qquad x^2+y^2=(i-x)^2.$$

Ferner ist nach dem Obigen $\frac{1}{2}i$ die erste Coordinate des Durchschnittspunkts des Kegelschnitts mit der Axe der x. Nehmen wir diesen Punkt als Anfang eines neuen dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems an, und bezeichnen auch in diesem neuen Systeme die Coordinaten durch x, y, so müssen wir in der vorhergehenden Gleichung für x, y respective $\frac{1}{2}i+x$, y setzen, wodurch diese Gleichung die Form

$$\left(\frac{1}{2}i+x\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}i-x\right)^2,$$

oder, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt, die Form

$$4)\qquad y^2=-2ix$$

erhält. Bezeichnet man den absoluten Werth von $-2i$ durch p, so ist die Gleichung des Kegelschnitts

$$5)\qquad y^2=\pm px,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem i negativ oder positiv ist, wobei man immer die aus dem Obigen bekannte Bedeutung der Grösse i gehörig im Auge zu behalten hat.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, deren Charakteristik $n \lessgtr 1$ ist, ist nach 1)

$$6)\qquad x^2+y^2=n^2(i-x)^2,$$

und die ersten Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit der Axe der x sind

$$\frac{ni}{n+1} \text{ und } \frac{ni}{n-1}.$$

Also ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ni}{n+1}+\frac{ni}{n-1}\right),$$

d. i., wie man leicht findet,

$$\frac{n^2 i}{n^2-1}$$

die erste Coordinate des Mittelpunkts der durch die beiden Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit der Axe der x der Grösse und Lage nach bestimmten geraden Linie. Nimmt man diesen Punkt als den Anfang eines neuen dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems an, und bezeichnet auch in diesem neuen Systeme die Coordinaten durch x, y, so muss man in der Gleichung 6) für x, y respective $\frac{n^2 i}{n^2-1}+x$, y setzen, wodurch diese Gleichung die Form

$$\left(\frac{n^2 i}{n^2-1}+x\right)^2+y^2=n^2\left(i-\frac{n^2 i}{n^2-1}-x\right)^2$$

oder

$$\left(\frac{n^2 i}{n^2-1}+x\right)^2+y^2=n^2\left(\frac{i}{n^2-1}+x\right)^2,$$

d. i., wie man hieraus mittelst leichter Rechnung findet, die Form

$$7)\qquad (1-n^2)x^2+y^2=\frac{n^2 i^2}{1-n^2}$$

erhält. Diese Gleichung kann man sowohl unter der Form

$$8)\qquad \frac{(1-n^2)^2 x^2}{n^2 i^2}+\frac{(1-n^2)y^2}{n^2 i^2}=1,$$

als auch unter der Form

$$9)\qquad \frac{(n^2-1)^2 x^2}{n^2 i^2}-\frac{(n^2-1)y^2}{n^2 i^2}=1$$

darstellen. Ist nun $n<1$, so sind die Grössen

$$\frac{n^2 i^2}{(1-n^2)^2} \text{ und } \frac{n^2 i^2}{1-n^2}$$

beide positiv, und man kann also

$$10)\qquad a^2=\frac{n^2 i^2}{(1-n^2)^2},\qquad b^2=\frac{n^2 i^2}{1-n^2},$$

wo a und b positive Grössen bezeichnen sollen, setzen, wodurch die Gleichung 8) die Form

$$11)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

erhält. Ist dagegen $n>1$, so sind die Grössen

$$\frac{n^2 i^2}{(n^2-1)^2} \text{ und } \frac{n^2 i^2}{n^2-1}$$

beide positiv, und man kann also

$$12)\qquad a^2=\frac{n^2 i^2}{(n^2-1)^2},\qquad b^2=\frac{n^2 i^2}{n^2-1},$$

wo a und b positive Grössen bezeichnen sollen, setzen, wodurch die Gleichung 9) die Form

$$13)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

erhält.

Die Kegelschnitte, deren Charakteristik $n=1$ ist, heissen Parabeln, und ihre Gleichung ist nach dem Obigen

$$14)\qquad y^2=\pm px.$$

Der Punkt, in welchem das von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällte Perpendikel von der Parabel geschnitten wird, welcher bei der vorhergehenden Gleichung als Anfang der xy angenommen worden ist, wird der Scheitel der Parabel genannt, und die Grösse p heisst der Parameter der Parabel.

Die Kegelschnitte, deren Charakteristik $n<1$ ist, heissen Ellipsen, und ihre Gleichung ist nach dem Obigen

$$15)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

Die beiden Punkte, in denen das von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällte Perpendikel von der Ellipse geschnitten wird, heissen die Scheitel der Ellipse. Der Mittelpunkt der die beiden Scheitel mit einander verbindenden geraden Linie, welcher bei der vorhergehenden Gleichung als Anfang der xy angenommen worden ist, wird der Mittelpunkt der Ellipse genannt. Die Grösse $2a$ heisst die Hauptaxe, die Grösse $2b$ die Nebenaxe der Ellipse.

Die Kegelschnitte, deren Charakteristik $n>1$ ist, heissen Hyperbeln, und ihre Gleichung ist nach dem Obigen

$$16)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

Die beiden Punkte, in denen das von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällte Perpendikel von der Hyperbel geschnitten wird, heissen die Scheitel der Hyperbel. Der Mittelpunkt der die beiden Scheitel mit einander verbindenden geraden Linie, welcher bei der vorhergehenden Gleichung als Anfang der xy angenommen worden ist, wird der Mittelpunkt der Hyperbel genannt. Die Grösse $2a$ heisst die Hauptaxe, die Grösse $2b$ die Nebenaxe der Hyperbel.

Sowohl bei der Ellipse, als auch bei der Hyperbel, wird die Grösse

$$17)\qquad p=\frac{2b^2}{a}$$

der Parameter genannt.

Für $a=b$ geht die Gleichung der Ellipse in die Gleichung des Kreises über. Eine Hyperbel, bei welcher $a=b$ ist, wird eine gleichseitige Hyperbel genannt.

Die Eigenschaften der Kegelschnitte aus den obigen Gleichungen zu entwickeln, ist hier natürlich gar nicht meine Absicht. Indess verdient doch noch Folgendes über die Ellipse und Hyperbel bemerkt zu werden.

Aus den Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \text{ und } \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

dieser beiden Linien ergiebt sich nämlich leicht, dass dieselben um ihre Mittelpunkte herum auf völlig symmetrische Weise liegen, woraus folgt, dass es für jede dieser Curven ausser dem ursprünglich als gegeben betrachteten Brennpunkte und der ursprünglich als gegeben betrachteten Directrix noch einen zweiten Punkt und eine zweite gerade Linie auf der andern Seite des Mittelpunkts geben muss, welche gegen den Mittelpunkt und überhaupt gegen die ganze Curve übrigens ganz dieselbe Lage haben wie der ursprünglich gegebene Brennpunkt und die ursprünglich gegebene Directrix. Deshalb legt man jeder Ellipse und jeder Hyperbel zwei Brennpunkte und zwei Directrixen bei, nennt die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte von einander, d. h. die Entfernung eines jeden der beiden Brennpunkte von dem Mittelpunkte, die Excentricität der Ellipse oder der Hyperbel, und bezeichnet dieselbe in beiden Fällen durch e.

Bei der Ellipse hat man nach dem Obigen zwischen den vier Grössen n, i, a, b die beiden Gleichungen

$$\frac{n^2i^2}{(1-n^2)^2}=a^2,\quad \frac{n^2i^2}{1-n^2}=b^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$18)\qquad 1-n^2=\frac{b^2}{a^2},\qquad n^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\qquad i^2=\frac{b^4}{a^2-b^2}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{n^2i}{n^2-1}=-\frac{n^2i}{1-n^2}$$

die erste Coordinate des Mittelpunkts der Ellipse in Bezug auf den ursprünglich gegebenen Brennpunkt als Anfang; also sind offenbar

$$\frac{n^2i}{1-n^2} \text{ und } -\frac{n^2i}{1-n^2}$$

die ersten Coordinaten der beiden Brennpunkte der Ellipse in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang, und

$$\frac{n^2 i}{1-n^2}$$

ist in Bezug auf denselben Anfang die erste Coordinate des ursprünglich gegebenen Brennpunkts. Führt man in diese Ausdrücke die vorher gefundenen Werthe von n^2 und i^2 ein, so ergiebt sich, dass

$$\pm\sqrt{a^2-b^2}$$

die ersten Coordinaten der beiden Brennpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfang sind, woraus man ferner unmittelbar für die Excentricität e den Ausdruck

$$19)\qquad e=\sqrt{a^2-b^2}$$

erhält. Die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Directrixen mit der Axe der x in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfang sind, wie man leicht findet:

$$\frac{i}{1-n^2} \text{ und } -\frac{i}{1-n^2},$$

wo die erste Coordinate

$$\frac{i}{1-n^2}$$

der ursprünglich gegebenen Directrix entspricht. Führt man die vorher gefundenen Werthe von n^2 und i^2 ein, so ergiebt sich, dass

$$\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Directrixen mit der Axe der x in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfang sind.

Für den Kreis, d. h. für $a=b$, ist $n=0$, $e=0$ und i wird unendlich, woraus man sieht, dass der Kreis streng genommen nicht unter der obigen allgemeinen Erklärung der Kegelschnitte enthalten ist.

Bei der Hyperbel hat man nach dem Obigen zwischen den vier Grössen n, i, a, b die beiden Gleichungen

$$\frac{n^2 i^2}{(n^2-1)^2}=a^2,\quad \frac{n^2 i^2}{n^2-1}=b^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$20)\qquad n^2-1=\frac{b^2}{a^2},\ n^2=\frac{a^2+b^2}{a^2},\ i^2=\frac{b^4}{a^2+b^2}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{n^2 i}{n^2-1}$$

die erste Coordinate des Mittelpunkts der Hyperbel in Bezug auf den ursprünglich gegebenen Brennpunkt als Anfang; also sind offenbar

$$-\frac{n^2 i}{n^2-1} \text{ und } \frac{n^2 i}{n^2-1}$$

die ersten Coordinaten der beiden Brennpunkte der Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt als Anfang, und

$$-\frac{n^2 i}{n^2-1}$$

ist in Bezug auf denselben Anfang die erste Coordinate des ursprünglich gegebenen Brennpunkts. Führt man in diese Ausdrücke die vorher gefundenen Werthe von n^2 und i^2 ein, so ergiebt sich, dass

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

die ersten Coordinaten der beiden Brennpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfang sind, woraus man ferner unmittelbar für die Excentricität e den Ausdruck

$$21) \qquad e=\sqrt{a^2+b^2}$$

erhält. Die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Directrixen mit der Axe der x in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfang sind, wie man leicht findet:

$$-\frac{i}{n^2-1} \text{ und } \frac{i}{n^2-1},$$

wo die erste Coordinate

$$-\frac{i}{n^2-1}$$

der ursprünglich gegebenen Directrix entspricht. Führt man die vorher gefundenen Werthe von n^2 und i^2 ein, so ergiebt sich, dass

$$\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

die ersten Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Directrixen mit der Axe der x in Bezug auf den Mittelpunkt als Anfang sind.

Für die gleichseitige Hyperbel, d. h. für $a=b$, ist $n=\sqrt{2}$ und $i^2=\frac{1}{2}a^2$.

III.

Wir wollen uns jetzt einen beliebigen Kegelschnitt denken und den einen Brennpunkt desselben als den Anfang eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems der xy annehmen. Ein beliebiger von dem in Rede stehenden Brennpunkte ausgehender Vector dieses Kegelschnitts sei r, und der von diesem Vector mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählen, sei $\overline{\omega}$. Sind dann x, y die Coordinaten des Endpunkts des Vectors r in dem Systeme der xy, so ist in völliger Allgemeinheit:

$$1)\qquad x=r\cos\overline{\omega},\quad y=r\sin\overline{\omega}.$$

Durch denselben Brennpunkt wie vorher als Anfang lege man ferner ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem der $x'y'$; die Axe der x' sei die Hauptaxe des Kegelschnitts, welche bekanntlich durch die Brennpunkte geht, und auf den Directrixen senkrecht steht, und den positiven Theil der Axe der y' nehme man so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x' durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe y zu gelangen. Bezeichnen wir dann den von dem positiven Theile der Axe der x' mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählen, durch ω, so ist, wenn die Coordinaten x, y und x', y' einem und demselben Punkte entsprechen, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit:

$$2)\qquad \begin{cases} x=x'\cos\omega-y'\sin\omega, \\ y=x'\sin\omega+y'\cos\omega\,; \end{cases}$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$3)\qquad \begin{cases} x'=\ \ x\cos\omega+y\sin\omega, \\ y'=-x\sin\omega+y\cos\omega; \end{cases}$$

und folglich nach 1):

$$4)\qquad \begin{cases} x'=\ \ r(\cos\omega\cos\overline{\omega}+\sin\omega\sin\overline{\omega})=\ \ r\cos(\omega-\overline{\omega}), \\ y'=-r(\sin\omega\cos\overline{\omega}-\cos\omega\sin\overline{\omega})=-r\sin(\omega-\overline{\omega}). \end{cases}$$

Nach II. 1) ist, wenn n und i dieselbe Bedeutung haben wie in II.

$$x'^2+y'^2=n^2(i-x')^2$$

die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts; führt man aber in diese Gleichung für x', y' ihre Werthe aus 4) ein, so erhält man auf der Stelle

$$5)\qquad r^2=n^2\{i-r\cos(\omega-\overline{\omega})\}^2,$$

also

$$6)\qquad r=\pm n\{i-r\cos(\omega-\overline{\omega})\},$$

oder

$$7)\qquad r\{1\pm n\cos(\omega-\overline{\omega})\}=\pm ni,$$

wo nun hauptsächlich die Frage entsteht, wie man in diesen Gleichungen die Zeichen zu nehmen hat.

Um diese Frage mit Sicherheit und Bestimmtheit zu beantworten, wollen wir jetzt annehmen, dass i positiv sei, was offenbar verstattet ist, da im Vorhergehenden die Lage des positiven Theils der Axe der x' noch ganz unbestimmt gelassen worden ist.

Für die Parabel und Ellipse ist bekanntlich $n \overline{\overline{<}} 1$, und man kann also in diesem Falle

$$n\cos(\omega-\overline{\omega})=\cos\varphi$$

setzen. Dann ist

$$1\pm n\cos(\omega-\overline{\omega})=1\pm\cos\varphi,$$

d. i.

$$1\pm n\cos(\omega-\overline{\omega})=\begin{cases}2\cos\frac{1}{2}\varphi^2\\ 2\sin\frac{1}{2}\varphi^2\end{cases}$$

woraus sich ergiebt, dass im vorliegenden Falle die Grösse $1\pm n\cos(\omega-\varphi)$ stets positiv ist, und daher, weil nach der Voraussetzung i positiv ist, in der Gleichung 7), also auch in der Gleichung 6), die oberen Zeichen genommen werden müssen, für die Parabel und Ellipse also immer

$$8)\qquad r=n\{i-r\cos(\omega-\overline{\omega})\}$$

ist.

Bei der Hyperbel, wo $n>1$ ist, müssen wir die beiden Zweige dieser Curve, nämlich den Zweig, in welchem der als Pol angenommene Brennpunkt liegt, und den Zweig, in welchem der

als Pol angenommene Brennpunkt nicht liegt, die wir der Kürze wegen beziehungsweise den ersten und den zweiten Zweig der Hyperbel nennen wollen, von einander unterscheiden.

Die ersten Coordinaten der beiden Scheitel der Hyperbel im System der $x'y'$ sind nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{ni}{n+1} \text{ und } \frac{ni}{n-1}.$$

Von diesen beiden Coordinaten ist $\frac{ni}{n+1}$ die kleinste, $\frac{ni}{n-1}$ die grösste. Für den ersten Zweig der Hyperbel ist also offenbar immer

$$x' < \frac{ni}{n+1},$$

also

$$\frac{ni}{n+1} - x' = \frac{ni}{n+1} - i + i - x' = -\frac{i}{n+1} + i - x'$$

eine positive Grösse, so dass folglich, weil $-\frac{i}{n+1}$ eine negative Grösse ist, jedenfalls auch

$$i - x' = i - r\cos(\omega - \bar{\omega})$$

eine positive Grösse sein muss, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle in der Gleichung 6) das obere Zeichen genommen, und daher

$$r = n\{i - r\cos(\omega - \bar{\omega})\}$$

gesetzt werden muss. Für den zweiten Zweig der Hyperbel is dagegen offenbar immer

$$x' > \frac{ni}{n-1},$$

also

$$x' - \frac{ni}{n-1} = -i + x' + i - \frac{ni}{n-1} = -(i - x') - \frac{i}{n-1}$$

eine positive Grösse, woraus sich, da $-\frac{i}{n-1}$ eine negative Grösse ist, ergiebt, dass in diesem Falle $-(i-x')$ eine positive, also

$$i - x' = i - r\cos(\omega - \bar{\omega})$$

eine negative Grösse ist, und daher in derGleichung 6) das untere Zeichen genommen, folglich

$$r = -n\{i - r\cos(\omega - \bar{\omega})\}$$

gesetzt werden muss. Ueberhaupt ist also für die Hyperbel

$$9) \qquad r = \pm n\{i - r\cos(\omega - \bar{\omega})\},$$

wenn man für den ersten Zweig der Hyperbel das obere, für den zweiten Zweig derselben dagegen das untere Zeichen nimmt.

Demnach ist für jeden Kegelschnitt

$$10) \qquad r = \pm n\{i - r\cos(\omega - \bar{\omega})\},$$

wenn man für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel das obere, für den zweiten Zweig der Hyperbel das untere Zeichen nimmt.

Nimmt man nun aber n nicht wie bisher stets positiv, sondern für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel positiv, für den zweiten Zweig der Hyperbel dagegen negativ, so ist ganz allgemein für jeden Kegelschnitt:

$$11) \qquad r = n\{i - r\cos(\omega - \bar{\omega})\},$$

also

$$12) \qquad r\{1 + n\cos(\omega - \bar{\omega})\} = ni,$$

oder

$$13) \qquad r = \frac{ni}{1 + n\cos(\omega - \bar{\omega})},$$

oder

$$14) \qquad r = \frac{1}{\frac{1}{ni} + \frac{1}{i}\cos(\omega - \bar{\omega})},$$

oder

$$15) \qquad r = \left\{\frac{1}{ni} + \frac{1}{i}\cos(\omega - \bar{\omega})\right\}^{-1}.$$

Die ersten Coordinaten der Scheitel im System der $x'y'$ sind für jeden Kegelschnitt nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{ni}{n+1} \text{ und } \frac{ni}{n-1},$$

wo für die Parabel jedoch nur die erste dieser beiden ersten Coordinaten, welche positiv ist, gilt. Für die Ellipse und Hyperbel entspricht $\frac{ni}{n+1}$, welches positiv ist, dem Scheitel, der dem

Pol angenommenen Brennpunkte zunächst liegt. Hieraus ergiebt sich, dass man den positiven Theil der Axe der x' immer von dem als Pol angenommenen Brennpunkte an nach dem Scheitel des Kegelschnitts hin nehmen muss, welcher diesem als Pol angenommenen Brennpunkte zunächst liegt.

Setzen wir

$$16)\qquad A=\frac{1}{ni},\quad B=\frac{1}{i};$$

so ist unter den im Vorhergehenden gemachten Voraussetzungen

$$17)\qquad r=\{A+B\cos(\omega-\bar{\omega})\}^{-1}$$

die allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte, und A ist positiv für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel, negativ für den zweiten Zweig der Hyperbel, B dagegen ist immer positiv.

Für die Parabel ist

$$A=B=\frac{1}{i},$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$18)\qquad A=B=\frac{2}{p}.$$

Für die Ellipse ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$n=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{e}{a},\quad i=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{b^2}{e};$$

also

$$ni=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}p,$$

und folglich

$$19)\qquad A=\frac{2}{p},\quad B=\frac{e}{b^2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}=\frac{2\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{p};$$

oder, wenn man

$$20)\qquad \varepsilon=\frac{b}{a}$$

setzt:

$$21) \qquad A = \frac{2}{p}, \quad B = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{p}.$$

Also ist $A > B$.

Für die Hyperbel ist nach dem vorhergehenden Paragraphen, wenn man immer für den ersten Zweig die oberen, für den zweiten Zweig die unteren Zeichen nimmt:

$$n = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \pm \frac{e}{a}, \quad i = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2}{e};$$

also

$$ni = \pm \frac{b^2}{a} = \pm \frac{1}{2} p,$$

und folglich

$$22) \qquad A = \pm \frac{2}{p}, \quad B = \frac{e}{b^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} = \frac{2\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}{p};$$

oder, wenn man auch jetzt

$$23) \qquad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

setzt:

$$24) \qquad A = \pm \frac{2}{p}, \quad B = \frac{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{p}.$$

Also ist der absolute Werth von $A < B$.

Auf diese Weise kann man die Constanten A und B leicht durch die gewöhnlichen Elemente der Kegelschnitte ausdrücken.

Zählt man überhaupt den Winkel φ von der geraden Linie an, welche von dem als Pol angenommenen Brennpunkte aus nach dem diesem Brennpunkte zunächst liegenden Scheitel des Kegelschnitts hin gerichtet ist, nach einer gewissen Richtung hin von 0 bis 360°, so geht aus dem Obigen leicht hervor, dass die allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte

$$r = (A + B\cos\varphi)^{-1}$$

oder

$$r = \frac{1}{A + B\cos\varphi}$$

ist. A ist positiv für die Parabel, die Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel, negativ für den zweiten Zweig der Hyperbel; B dagegen ist immer positiv. Für die Parabel ist $A = B$, für die Ellipse ist $A > B$, für die Hyperbel ist der absolute Werth von $A < B$.

IV.

Um eine Anwendung der allgemeinen Polargleichung III. 17) der Kegelschnitte zu zeigen, will ich nun noch die folgende in vielen Beziehungen, bekanntlich besonders in der Astronomie, sehr wichtige Aufgabe auflösen.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte als Brennpunkt einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Die Vectoren der drei gegebenen Punkte, welche natürlich als gegeben zu betrachten sind, seien r_1, r_2, r_3; die von diesen Vectoren mit einer beliebigen von dem gegebenen Brennpunkte ausgehenden geraden Linie eingeschlossenen, ebenfalls als gegeben zu betrachtenden Winkel, welche von der in Rede stehenden geraden Linie an nach einer und derselben Richtung hin von 0 bis 360° gezählt werden, seien $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$; der auf gleiche Weise genommene Winkel, welchen die von dem gegebenen Brennpunkte aus nach dem diesem Brennpunkte zunächst liegenden Scheitel des gesuchten Kegelschnitts hin gezogene gerade Linie mit der obigen von dem Brennpunkte aus gezogenen geraden Linie einschliesst, sei ω. Dies vorausgesetzt, haben wir nach III. 17) die drei folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} r_1 = \{A + B\cos(\omega - \overline{\omega}_1)\}^{-1}, \\ r_2 = \{A + B\cos(\omega - \overline{\omega}_2)\}^{-1}, \\ r_3 = \{A + B\cos(\omega - \overline{\omega}_3)\}^{-1}; \end{cases}$$

oder

$$2)\quad \begin{cases} r_1\{A + B\cos(\omega - \overline{\omega}_1)\} = 1, \\ r_2\{A + B\cos(\omega - \overline{\omega}_2)\} = 1, \\ r_3\{A + B\cos(\omega - \overline{\omega}_3)\} = 1; \end{cases}$$

in denen r_1, r_2, r_3; $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ die gegebenen, dagegen ω, A, B die gesuchten Grössen sind, durch welche letzteren der Kegelschnitt vollkommen bestimmt wird.

Formeln für A.

Aus den Gleichungen 2) erhält man:

$$1-r_1A=r_1B\cos(\omega-\bar{\omega}_1),$$
$$1-r_2A=r_2B\cos(\omega-\bar{\omega}_2),$$
$$1-r_3A=r_3B\cos(\omega-\bar{\omega}_3);$$

also

$$\frac{1-r_1A}{1-r_2A}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\bar{\omega}_1+\sin\bar{\omega}_1\tang\omega}{\cos\bar{\omega}_2+\sin\bar{\omega}_2\tang\omega},$$
$$\frac{1-r_2A}{1-r_3A}=\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{\cos\bar{\omega}_2+\sin\bar{\omega}_2\tang\omega}{\cos\bar{\omega}_3+\sin\bar{\omega}_3\tang\omega},$$
$$\frac{1-r_3A}{1-r_1A}=\frac{r_3}{r_1}\cdot\frac{\cos\bar{\omega}_3+\sin\bar{\omega}_3\tang\omega}{\cos\bar{\omega}_1+\sin\bar{\omega}_1\tang\omega};$$

und hieraus

$$r_2(1-r_1A)\cos\bar{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\cos\bar{\omega}_1$$
$$=-\{r_2(1-r_1A)\sin\bar{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\sin\bar{\omega}_1\}\tang\omega,$$
$$r_3(1-r_2A)\cos\bar{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\cos\bar{\omega}_2$$
$$=-\{r_3(1-r_2A)\sin\bar{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\sin\bar{\omega}_2\}\tang\omega,$$
$$r_1(1-r_3A)\cos\bar{\omega}_1-r_3(1-r_1A)\cos\bar{\omega}_3$$
$$=-\{r_1(1-r_3A)\sin\bar{\omega}_1-r_3(1-r_1A)\sin\bar{\omega}_3\}\tang\omega;$$

folglich

$$\frac{r_2(1-r_1A)\cos\bar{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\cos\bar{\omega}_1}{r_3(1-r_2A)\cos\bar{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\cos\bar{\omega}_2}$$
$$=\frac{r_2(1-r_1A)\sin\bar{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\sin\bar{\omega}_1}{r_3(1-r_2A)\sin\bar{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\sin\bar{\omega}_2},$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$0=r_2r_3\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3).(1-r_1A)$$
$$+r_3r_1\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1).(1-r_2A)$$
$$+r_1r_2\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2).(1-r_3A)$$

oder

$$0 = \sin(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - A\right)$$
$$+ \sin(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1) \cdot \left(\frac{1}{r_2} - A\right)$$
$$+ \sin(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \cdot \left(\frac{1}{r_3} - A\right),$$

also

$$3) \quad A = \frac{\frac{1}{r_1}\sin(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3) + \frac{1}{r_2}\sin(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1) + \frac{1}{r_3}\sin(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{\sin(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + \sin(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3) + \sin(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1)}$$

oder, wie man leicht findet:

$$4) \quad A = -\frac{\frac{1}{r_1}\sin(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3) + \frac{1}{r_2}\sin(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1) + \frac{1}{r_3}\sin(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{4\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1)},$$

oder auch

$$5) \quad 2A = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3)}{r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1)}$$
$$- \frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1)}{r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}$$
$$- \frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3)}$$

Formeln für B.

Aus 2) ergiebt sich:

$$r_2 - r_1 = r_1 r_2 \{\cos(\omega - \bar{\omega}_1) - \cos(\omega - \bar{\omega}_2)\} B,$$
$$r_3 - r_2 = r_2 r_3 \{\cos(\omega - \bar{\omega}_2) - \cos(\omega - \bar{\omega}_3)\} B,$$
$$r_1 - r_3 = r_3 r_1 \{\cos(\omega - \bar{\omega}_3) - \cos(\omega - \bar{\omega}_1)\} B;$$

also

Formeln für A.

Aus den Gleichungen 2) erhält man:

$$1-r_1A=r_1B\cos(\omega-\overline{\omega}_1),$$
$$1-r_2A=r_2B\cos(\omega-\overline{\omega}_2),$$
$$1-r_3A=r_3B\cos(\omega-\overline{\omega}_3);$$

also

$$\frac{1-r_1A}{1-r_2A}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\overline{\omega}_1+\sin\overline{\omega}_1\operatorname{tang}\omega}{\cos\overline{\omega}_2+\sin\overline{\omega}_2\operatorname{tang}\omega},$$

$$\frac{1-r_2A}{1-r_3A}=\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{\cos\overline{\omega}_2+\sin\overline{\omega}_2\operatorname{tang}\omega}{\cos\overline{\omega}_3+\sin\overline{\omega}_3\operatorname{tang}\omega},$$

$$\frac{1-r_3A}{1-r_1A}=\frac{r_3}{r_1}\cdot\frac{\cos\overline{\omega}_3+\sin\overline{\omega}_3\operatorname{tang}\omega}{\cos\overline{\omega}_1+\sin\overline{\omega}_1\operatorname{tang}\omega};$$

und hieraus

$$\begin{aligned}&r_2(1-r_1A)\cos\overline{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\cos\overline{\omega}_1\\&=-\{r_2(1-r_1A)\sin\overline{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\sin\overline{\omega}_1\}\operatorname{tang}\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&r_3(1-r_2A)\cos\overline{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\cos\overline{\omega}_2\\&=-\{r_3(1-r_2A)\sin\overline{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\sin\overline{\omega}_2\}\operatorname{tang}\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&r_1(1-r_3A)\cos\overline{\omega}_1-r_3(1-r_1A)\cos\overline{\omega}_3\\&=-\{r_1(1-r_3A)\sin\overline{\omega}_1-r_3(1-r_1A)\sin\overline{\omega}_3\}\operatorname{tang}\omega;\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}&\frac{r_2(1-r_1A)\cos\overline{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\cos\overline{\omega}_1}{r_3(1-r_2A)\cos\overline{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\cos\overline{\omega}_2}\\&=\frac{r_2(1-r_1A)\sin\overline{\omega}_2-r_1(1-r_2A)\sin\overline{\omega}_1}{r_3(1-r_2A)\sin\overline{\omega}_3-r_2(1-r_3A)\sin\overline{\omega}_2},\end{aligned}$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\begin{aligned}0=\;&r_2r_3\sin(\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_3).(1-r_1A)\\&+r_3r_1\sin(\overline{\omega}_3-\overline{\omega}_1).(1-r_2A)\\&+r_1r_2\sin(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2).(1-r_3A)\end{aligned}$$

oder

$$0=\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3).\left(\frac{1}{r_1}-A\right)$$
$$+\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1).\left(\frac{1}{r_2}-A\right)$$
$$+\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2).\left(\frac{1}{r_3}-A\right),$$

also

$$3)\qquad A=\frac{\frac{1}{r_1}\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\frac{1}{r_2}\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)+\frac{1}{r_3}\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)}{\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)+\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)}$$

oder, wie man leicht findet:

$$4)\qquad A=-\frac{\frac{1}{r_1}\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\frac{1}{r_2}\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)+\frac{1}{r_3}\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)}{4\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)},$$

oder auch

$$5)\qquad 2A=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)}{r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)}$$
$$-\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)}{r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)}$$
$$-\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)}{r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)}$$

Formeln für *B*.

Aus 2) ergiebt sich:

$$r_2-r_1=r_1r_2\{\cos(\omega-\bar{\omega}_1)-\cos(\omega-\bar{\omega}_2)\}B,$$
$$r_3-r_2=r_2r_3\{\cos(\omega-\bar{\omega}_2)-\cos(\omega-\bar{\omega}_3)\}B,$$
$$r_1-r_3=r_3r_1\{\cos(\omega-\bar{\omega}_3)-\cos(\omega-\bar{\omega}_1)\}B;$$

also

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{1}{B}=(\cos\bar{\omega}_1-\cos\bar{\omega}_2)\cos\omega+(\sin\bar{\omega}_1-\sin\bar{\omega}_2)\sin\omega,$$

$$\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\frac{1}{B}=(\cos\bar{\omega}_2-\cos\bar{\omega}_3)\cos\omega+(\sin\bar{\omega}_2-\sin\bar{\omega}_3)\sin\omega,$$

$$\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\frac{1}{B}=(\cos\bar{\omega}_3-\cos\bar{\omega}_1)\cos\omega+(\sin\bar{\omega}_3-\sin\bar{\omega}_1)\sin\omega.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen erhält man leicht

$$-\left\{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\cos\bar{\omega}_1+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\cos\bar{\omega}_2+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos\bar{\omega}_3\right\}\frac{1}{B}$$
$$=\{\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)+\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\}\sin\omega,$$

$$\left\{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin\bar{\omega}_1+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\bar{\omega}_2+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin\bar{\omega}_3\right\}\frac{1}{B}$$
$$=\{\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)+\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\}\cos\omega.$$

Quadrirt man nun und addirt, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\cos\bar{\omega}_1+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\cos\bar{\omega}_2+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos\bar{\omega}_3\right]^2\\+\left[\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin\omega_1+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\bar{\omega}_2+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin\bar{\omega}_3\right]^2\end{array}\right\}\frac{1}{B^2}$$
$$=\{\sin(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)+\sin(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\sin(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\}^2$$
$$=\{4\sin\tfrac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\tfrac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\tfrac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\}^2.$$

Der Factor von $\frac{1}{B^2}$ ist:

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)^2+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\cos(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)$$
$$+2\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)$$
$$+2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\cos(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1).$$

Also ist

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{r_1\cos(\omega-\bar{\omega}_1)-r_2\cos(\omega-\bar{\omega}_2)}{2r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\{\omega-\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}},\\
A &= \frac{r_2\cos(\omega-\bar{\omega}_2)-r_3\cos(\omega-\bar{\omega}_3)}{2r_2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\}},\\
A &= \frac{r_3\cos(\omega-\bar{\omega}_3)-r_1\cos(\omega-\bar{\omega}_1)}{2r_3r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)\}};
\end{aligned}\right.$$

er

$$10)\quad\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{1}{r_2}\cos(\omega-\bar{\omega}_1)-\frac{1}{r_1}\cos(\omega-\bar{\omega}_2)}{2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}},\\
A &= \frac{\frac{1}{r_3}\cos(\omega-\bar{\omega}_2)-\frac{1}{r_2}\cos(\omega-\bar{\omega}_3)}{2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\}},\\
A &= \frac{\frac{1}{r_1}\cos(\omega-\bar{\omega}_3)-\frac{1}{r_3}\cos(\omega-\bar{\omega}_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)\}}.
\end{aligned}\right.$$

Mittelst dieser Formeln kann man A finden, wenn man ω mit elst einer der obigen Formeln 7) oder 8) berechnet hat.

In Verbindung mit dem Obigen ergiebt sich aus 9) und 10):

$$11)\quad\left\{\begin{aligned}
B &= \frac{r_1-r_2}{2r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}},\\
B &= \frac{r_2-r_3}{2r_2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\}},\\
B &= \frac{r_3-r_1}{2r_3r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)\}};
\end{aligned}\right.$$

oder

woraus

$$r_1(r_2-r_3)\cos(\omega-\bar{\omega}_1)+r_2(r_3-r_1)\cos(\omega-\bar{\omega}_2)$$
$$+r_3(r_1-r_2)\cos(\omega-\bar{\omega}_3)=0,$$

und hieraus ferner

$$7)\quad \tang\omega=-\frac{r_1(r_2-r_3)\cos\bar{\omega}_1+r_2(r_3-r_1)\cos\bar{\omega}_2+r_3(r_1-r_2)\cos\bar{\omega}_3}{r_1(r_2-r_3)\sin\bar{\omega}_1+r_2(r_3-r_1)\sin\bar{\omega}_2+r_3(r_1-r_2)\sin\bar{\omega}_3}$$

oder

$$8)\qquad \tang\omega$$
$$=-\frac{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\cos\bar{\omega}_1+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\cos\bar{\omega}_2+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos\bar{\omega}_3}{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin\bar{\omega}_1+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\bar{\omega}_2+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin\bar{\omega}_3}.$$

Bestimmt man aus den oben für $\frac{B}{A}$ gegebenen Ausdrücken die Grösse B durch A, und führt die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen 2) ein, so erhält man:

$$r_1A\left\{1-\frac{(r_1-r_2)\cos(\omega-\bar{\omega}_1)}{r_1\cos(\omega-\bar{\omega}_1)-r_2\cos(\omega-\bar{\omega}_2)}\right\}=1,$$

$$r_2A\left\{1-\frac{(r_2-r_3)\cos(\omega-\bar{\omega}_2)}{r_2\cos(\omega-\bar{\omega}_2)-r_3\cos(\omega-\bar{\omega}_3)}\right\}=1,$$

$$r_3A\left\{1-\frac{(r_3-r_1)\cos(\omega-\bar{\omega}_3)}{r_3\cos(\omega-\bar{\omega}_3)-r_1\cos(\omega-\bar{\omega}_1)}\right\}=1;$$

d. i.

$$\frac{2r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}}{r_1\cos(\omega-\bar{\omega}_1)-r_2\cos(\omega-\bar{\omega}_2)}A=1,$$

$$\frac{2r_2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\}}{r_2\cos(\omega-\bar{\omega}_2)-r_3\cos(\omega-\bar{\omega}_3)\}}A=1,$$

$$\frac{2r_3r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)\}}{r_3\cos(\omega-\bar{\omega}_3)-r_1\cos(\omega-\bar{\omega}_1)}A=1;$$

also

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{r_1\cos(\omega-\bar\omega_1)-r_2\cos(\omega-\bar\omega_2)}{2r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1-\bar\omega_2)\sin\{\omega-\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1+\bar\omega_2)\}},\\
A &= \frac{r_2\cos(\omega-\bar\omega_2)-r_3\cos(\omega-\bar\omega_3)}{2r_2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2-\bar\omega_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_2+\bar\omega_3)\}},\\
A &= \frac{r_3\cos(\omega-\bar\omega_3)-r_1\cos(\omega-\bar\omega_1)}{2r_3r_1\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3-\bar\omega_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_3+\bar\omega_1)}
\end{aligned}\right.$$

er

)

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{1}{r_2}\cos(\omega-\bar\omega_1)-\frac{1}{r_1}\cos(\omega-\bar\omega_2)}{2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1-\bar\omega_2)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_1+\bar\omega_2)},\\
A &= \frac{\frac{1}{r_3}\cos(\omega-\bar\omega_2)-\frac{1}{r_2}\cos(\omega-\bar\omega_3)}{2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2-\bar\omega_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_2+\bar\omega_3)},\\
A &= \frac{\frac{1}{r_1}\cos(\omega-\bar\omega_3)-\frac{1}{r_3}\cos(\omega-\bar\omega_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3-\bar\omega_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_3+\bar\omega_1)\}}.
\end{aligned}\right.$$

Mittelst dieser Formeln kann man A finden, wenn man ω mit
lst einer der obigen Formeln 7) oder 8) berechnet hat.

In Verbindung mit dem Obigen ergiebt sich aus 9) und 10):

11)
$$\left\{\begin{aligned}
B &= \frac{r_1-r_2}{2r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1-\bar\omega_2)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_1+\bar\omega_2)\}},\\
B &= \frac{r_2-r_3}{2r_2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2-\bar\omega_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_2+\bar\omega_3)\}},\\
B &= \frac{r_3-r_1}{2r_3r_1\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3-\bar\omega_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar\omega_3+\bar\omega_1)\}};
\end{aligned}\right.$$

oder

$$
12)\quad \left\{
\begin{aligned}
B &= \frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}},\\
B &= \frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\}},\\
B &= \frac{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}}{2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\{\omega-\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)\}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Mittelst dieser Formeln kann B gefunden werden, wenn man ω kennt.

Die Formeln 7) oder 8) liefern für den zwischen 0 und 360^0 liegenden Winkel ω immer zwei um 180^0 von einander verschiedene Werthe. Man sieht aber aus den Formeln 11) oder 12) leicht, dass diese beiden Werthe von ω jederzeit für B zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe liefern, und da nun B bekanntlich stets positiv sein muss, so hat man für ω immer denjenigen der beiden in Rede stehenden Werthe zu nehmen, welcher für B einen positiven Werth liefert. Daher kann es nie zweifelhaft bleiben, wie man den Winkel ω in jedem Falle zu nehmen hat, und die Aufgabe ist folglich immer vollkommen bestimmt.

Andere Auflösung.

So elegant auch die obigen Formeln dem grössten Theile nach sind, so hat mir doch eigentlich für die wirkliche Anwendung immer die folgende Auflösung unserer Aufgabe am geeignetsten geschienen.

Man setze

$$B\sin\omega = X,\qquad B\cos\omega = Y;$$

so hat man nach 2) die folgenden Gleichungen:

$$A + X\sin\bar{\omega}_1 + Y\cos\bar{\omega}_1 = \frac{1}{r_1},$$

$$A + X\sin\bar{\omega}_2 + Y\cos\bar{\omega}_2 = \frac{1}{r_2},$$

$$A + X\sin\bar{\omega}_3 + Y\cos\bar{\omega}_3 = \frac{1}{r_3}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraction:

$$\left.\begin{array}{r}2X\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\\ -2Y\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\end{array}\right\}=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2},$$

$$\left.\begin{array}{r}2X\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\\ -2Y\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\end{array}\right\}=\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3};$$

also

$$2X\cot\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)-2Y=\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)},$$

$$2X\cot\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)-2Y=\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)}$$

und

$$2X-2Y\tang\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)=\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)},$$

$$2X-2Y\tang\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)=\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)}.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$13)\quad \begin{cases} M = \dfrac{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}{2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1 - \bar\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3 - \bar\omega_1)}, \\[2em] N = \dfrac{\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_3}}{2\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2 - \bar\omega_3)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3 - \bar\omega_1)}; \end{cases}$$

so erhält man aus dem Obigen:

$$14)\quad \begin{cases} X = M\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2 + \bar\omega_3) - N\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1 + \bar\omega_2), \\ Y = M\cos\frac{1}{2}(\bar\omega_2 + \bar\omega_3) - N\cos\frac{1}{2}(\bar\omega_1 + \bar\omega_2). \end{cases}$$

Ferner erhält man leicht mittelst des Obigen:

$$15)\quad A = \frac{1}{r_2} - M\cos\frac{1}{2}(\bar\omega_2 - \bar\omega_3) + N\cos\frac{1}{2}(\bar\omega_1 - \bar\omega_2).$$

Diese Formeln scheinen mir zur Berechnung von A, sehr bequem. Zur Berechnung von ω und B ergiebt sicl aus dem Obigen

$$16)\quad \tan g\omega = \frac{X}{Y}$$

und

$$17)\quad B = \frac{X}{\sin\omega} = \frac{Y}{\cos\omega},$$

wo man für ω den zwischen 0 und 360° liegenden Winkel z men hat, welcher der Gleichung 16) genügt und mittelst de drücke 17) für B einen positiven Werth liefert.

Weil, wie man leicht findet

$$\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2 + \bar\omega_3)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_2 - \bar\omega_3) + \sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1 + \bar\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_1 - $$

$$= -\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3 + \bar\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega_3 - \bar\omega_1)$$

und

$$\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)+\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)$$
$$=-\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)$$

ist; so ist auch

$$18)\quad X=\frac{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)}{2r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)}$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)}{2r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)}$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)}{2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)}$$

und

$$19)\quad Y=\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3)}{2r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)}$$
$$+\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1)}{2r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)}$$
$$+\frac{\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)}{2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)}.$$

Nimmt man nun hierzu noch den aus 5) sich ergebenden Ausdruck von A, und setzt der Kürze wegen

$$20)\quad \begin{cases} F=\{2r_1\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\}^{-1}, \\ G=\{2r_2\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\}^{-1}, \\ H=\{2r_3\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1)\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3)\}^{-1}; \end{cases}$$

so hat man zur Bestimmung von A, X, Y die folgenden Formeln:

21)

$$\begin{cases} A = -F\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3) - G\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1) - H\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2), \\ X = \quad F\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3) + G\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1) + H\sin\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2), \\ Y = \quad F\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3) + G\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3+\bar{\omega}_1) + H\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2). \end{cases}$$

Die Grössen ω, B werden nun ferner wie oben mittelst der Formeln 16) und 17) gefunden.

Auch ist

$$B^2 = X^2 + Y^2,$$

also nach 21):

22) $B^2 = F^2 + G^2 + H^2$

$$+2FG\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2) + 2GH\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_3) + 2HF\cos\frac{1}{2}(\bar{\omega}_3-\bar{\omega}_1).$$

Bestimmung der übrigen Elemente des Kegelschnitts aus den Grössen A und B.

Wenn A positiv und $A=B$ ist, so ist der Kegelschnitt bekanntlich eine Parabel, und nach III. 18) ist

$$A = B = \frac{2}{p}, \quad \text{also} \quad p = \frac{2}{A} = \frac{2}{B}.$$

Wenn A positiv und $A > B$ ist, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, und nach III. 21) ist

$$A = \frac{2}{p}, \qquad B = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{p}.$$

Also ist

$$p = \frac{2}{A},$$

und

$$B = A\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2-B^2}{A^2},$$

woraus

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}=\frac{\sqrt{(A-B)(A+B)}}{A}$$

folgt. Bekanntlich ist aber

$$p=\frac{2}{A}=\frac{2b^2}{a},\quad \frac{1}{A}=\frac{b^2}{a}=\frac{A^2-B^2}{A^2}a;$$

also

$$a=\frac{A}{A^2-B^2}=\frac{A}{(A-B)(A+B)},$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}}=\frac{1}{\sqrt{(A-B)(A+B)}}.$$

Wenn A positiv und $A<B$ ist, so ist der Kegelschnitt der erste Zweig einer Hyperbel, und nach III. 24) ist

$$A=\frac{2}{p},\quad B=\frac{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{p}.$$

Also ist

$$p=\frac{2}{A},$$

und

$$B=A\sqrt{1+\varepsilon^2},\quad \varepsilon^2=\frac{b^2}{a^2}=\frac{B^2}{A^2}-1=\frac{B^2-A^2}{A^2},$$

woraus

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{A}=\frac{\sqrt{(B-A)(B+A)}}{A}$$

folgt. Bekanntlich ist aber

$$p=\frac{2}{A}=\frac{2b^2}{a},\quad \frac{1}{A}=\frac{b^2}{a}=\frac{B^2-A^2}{A^2}a;$$

also

$$a=\frac{A}{B^2-A^2}=\frac{A}{(B-A)(B+A)},$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{B^2-A^2}}=\frac{1}{\sqrt{(B-A)(B+A)}}.$$

Wenn A negativ ist, so ist der Kegelschnitt der zweite Zwei einer Hyperbel, und nach III. 24) ist

$$A=-\frac{2}{p},\quad B=\frac{2\sqrt{1+\varepsilon^2}}{p}.$$

Also ist

$$p=-\frac{2}{A},$$

und

$$B=-A\sqrt{1+\varepsilon^2},\quad \varepsilon^2=\frac{b^2}{a^2}=\frac{B^2}{A^2}-1=\frac{B^2-A^2}{A^2},$$

woraus

$$\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{A}=-\frac{\sqrt{(B-A)(B+A)}}{A}$$

folgt. Bekanntlich ist aber

$$p=-\frac{2}{A}=\frac{2b^2}{a},\quad -\frac{1}{A}=\frac{b^2}{a}=\frac{B^2-A^2}{A^2}a;$$

also

$$a=-\frac{A}{B^2-A^2}=-\frac{A}{(B-A)(B+A)},$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{B^2-A^2}}=\frac{1}{\sqrt{(B-A)(B+A)}}.$$

Dass in diesem letzteren Falle nie $B \overline{\overline{<}} -A$ sein kann, e hellet leicht Denn wäre

$$B \overline{\overline{<}} -A,$$

so wäre auch, wobei man zu beachten hat, dass $-A$ und B p sitive Grössen sind,

$$B\cos(\omega-\overline{\omega}_1) \overline{\overline{<}} -A,$$

also

$$A+B\cos(\omega-\overline{\omega}_1) \overline{\overline{<}} 0,$$

was wegen der Gleichung

$$r_1\{A+B\cos(\omega-\bar{\omega}_1)\}=1$$

unmöglich ist. Daher ist in diesem Falle immer $B>-A$, d. h. der absolute Werth von $A<B$, wie auch aus III. schon bekannt ist.

Wir schliessen mit der folgenden Aufgabe:

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte als Brennpunkt eine Parabel zu beschreiben, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Bedienen wir uns ähnlicher Bezeichnungen wie vorher, so haben wir jetzt, weil bei der Parabel bekanntlich $A=B$ ist, die beiden folgenden Gleichungen:

$$23)\quad \begin{cases} r_1A\{1+\cos(\omega-\bar{\omega}_1)\}=1, \\ r_2A\{1+\cos(\omega-\bar{\omega}_2)\}=1; \end{cases}$$

oder

$$24)\quad \begin{cases} 2r_1A\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)^2=1, \\ 2r_2A\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)^2=1; \end{cases}$$

woraus

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\left\{\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)}\right\}^2=1 \text{ oder } \left\{\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)}\right\}^2=\frac{r_2}{r_1}$$

folgt. Also ist

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)}=\pm\frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}},$$

folglich

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)-\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)+\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)}=\frac{\sqrt{r_1}\mp\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}\pm\sqrt{r_2}},$$

d. i.

$$-\frac{\sin\frac{1}{4}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\sin\{\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}}{\cos\frac{1}{4}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2)\cos\{\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)\}}=\frac{\sqrt{r_1}\mp\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}\pm\sqrt{r_2}},$$

also

$$25)\qquad \operatorname{tang}\{\frac{1}{4}(\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2)-\frac{1}{2}\omega\}=\frac{\sqrt{r_1}\mp\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}\pm\sqrt{r_2}}\cot\frac{1}{4}(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2).$$

Aus dieser Gleichung könnte man leicht tang $\frac{1}{2}\omega$ entwickeln, und da $\frac{1}{2}\omega$ positiv und nie grösser als 180° ist, so sieht man, dass mittelst derselben $\frac{1}{2}\omega$, also auch ω vollständig bestimmt ist, wobei es sich aber natürlich von selbst versteht, dass es wegen der doppelten Zeichen zwei Werthe von ω giebt.

Hat man ω, so erhält man A mittelst der Formeln

$$26)\qquad A=\frac{1}{2r_1\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)^2}=\frac{1}{2r_2\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)^2},$$

oder, weil bekanntlich

$$A=\frac{2}{p},\qquad p=\frac{2}{A}$$

ist, den Parameter p mittelst der Formeln

$$27)\qquad p=4r_1\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_1)^2=4r_2\cos\frac{1}{2}(\omega-\bar{\omega}_2)^2.$$

So wie der Winkel ω haben auch A und p zwei Werthe.

III.

Conséquences tirées des formules rèlatives à la transformation du module.

Par

Monsieur Ubbo H. Meyer

de Groningue.

En adoptant les notations du No. XXXIII. T. XVI. les formules trouvées dans le §. VI. permettent d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 1.

Soient H, K, θ, k des constantes déterminées par les équations

$$(\alpha)\quad \begin{cases} H = \prod\limits_{p=1}^{p=n} P_{\frac{2p}{n}\tau}, & K = \prod\limits_p^n P_{\frac{2p+1}{n}\tau}; \\ \theta = \dfrac{H}{K}, & k = c^n K^2; \end{cases}$$

on aura

$$(\beta)\quad \begin{cases} P_{\theta x, k} = \dfrac{1}{K} \prod\limits_p^n P_{x+\frac{2p}{n}\tau}, \\ 1 - \dfrac{P^2_{\theta x, k}}{P^2_{\theta y, k}} = \prod\limits_p^n \dfrac{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}}. \end{cases}$$

Et, en déterminant les fonctions $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ par la condition de devenir $\theta\varepsilon$, 1, 1, 1 pour $x = \varepsilon = 0$, et par les équations

$$(\gamma)\begin{cases}\mathfrak{A}^2_n=\theta^2 P^2_x \overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}\right),\\ \mathfrak{B}^2_n=\overset{n}{\Pi}_p\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right),\\ \mathfrak{C}^2_n=\overset{n}{\Pi}_p\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right)=\overset{n}{\Pi}_p\left(1-c^2P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}P^2_x\right),\\ \mathfrak{D}^2_n=\overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)=\overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}}\left(1-c^2P^2_{\frac{2p}{n}\tau}P^2_x\right),\end{cases}$$

on aura encore

$$(\delta)\quad P_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{D}_n},\quad Q_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{D}_n},\quad R_{\theta x,k}=\frac{\mathfrak{C}_n}{\mathfrak{D}_n}.$$

Enfin, en déterminant b et h par les équations

$$(\varepsilon)\quad\begin{cases}b=\overline{\omega}_c, & h=\overline{\omega}_k,\\ \overline{\omega}^2_u=1-u^2, & \overline{\omega}_0=1,\end{cases}$$

on aura les relations

$$(\zeta)\quad\begin{cases}\theta\tau_c=n\tau_k, & \theta\varrho_c=\varrho_k,\\ \theta\varrho_b=n\varrho_h, & \theta\tau_b=\tau_h,\\ \dfrac{\tau_c}{\tau_b}=n\dfrac{\tau_k}{\tau_h}.\end{cases}$$

Nous avons déja fait l'observation, qu'il sera bon de traiter séparement les deux cas où n est pair et où n est impair, afin de réduire les seconds membres des équations (γ) à des formes quarrées: c'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

§. I. Considération distincte des deux cas où *n* est pair et impair.

10. Soit n un nombre pair.

En vertu de l'équation

$$(1)\qquad \overset{n}{\Pi}_p f_p=\overset{p=n}{\underset{p=0}{\Pi}} f_p=f_0f_1f_2\dots f_{n-1},$$

on trouvera aisément

$$(2)\qquad \overset{n}{\Pi}_p f_p=f_0\overset{p=n}{\underset{p=1}{\Pi}} f_{n-p}=\overset{n}{\Pi}_p f_{n-p-1},$$

puis

$$\prod_{p=1}^{p=n} f_p = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} f_p \prod_p^{\frac{n}{2}} f_{\frac{n}{2}+p} = f_{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} f_p \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} f_{n-p},$$

$$\prod_p^{n} F_p = \prod_p^{n} F_p \prod_p^{n} F_{\frac{n}{2}+p} = \prod_p^{n} F \prod_p^{n} F_{n-p-1};$$

et, lorsque les fonctions f_p et F_p jouissent de la proprieté de satisfaire aux conditions

$$(2) \qquad f_{n-p} = f_p, \; F_{n-p-1} = F_p,$$

on aura

$$(3) \quad \begin{cases} \prod_{p=1}^{p=n} f_p = f_{\frac{n}{2}} \left\{ \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} f_p \right\}^2, \\ \prod_p^{n} F_p = \left\{ \prod_p^{\frac{n}{2}} F_p \right\}^2. \end{cases}$$

Maintenant, comme on a

$$P_x = -P_{-x}, \; P_{x+2\tau} = -P_x, \; P_{x+2\varrho} = P_x,$$

d'où

$$(4) \qquad P_{2\tau-x} = P_x, \; P_{x+\varrho} = P_{x-\varrho},$$

et par suite

$$(5) \quad \begin{cases} P_{\frac{2(n-p)}{n}\tau} = P_{\frac{2p}{n}\tau}, \; P_{\frac{2(n-p-1)+1}{n}\tau} = P_{\frac{2p+1}{n}\tau}, \\ P_{\varrho+\frac{2(n-p-1)+1}{n}\tau} = P_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}, \; P_{\varrho+\frac{2(n-p)}{n}\tau} = P_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}, \end{cases}$$

on pourra substituer aux équations (γ), en vertu des formules (3),

$$\mathfrak{A}^2_n = \theta^2 P^2_x \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_\tau}\right) \left\{ \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}\right) \right\}^2,$$

$$\mathfrak{B}^2_n = \left\{ \prod_p^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right) \right\}^2,$$

$$\mathfrak{C}^2_n = \left\{ \prod_p^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right) \right\}^2,$$

$$\mathfrak{D}^2_n = \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\tau}}\right) \left\{ \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right) \right\}^2.$$

De plus en observant, que l'on a

$$
(6)\quad \begin{cases} 1-\dfrac{P^2_x}{P^2_\tau}=1-P^2_x=Q^2_x, \\[2mm] 1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\tau}}=1-\dfrac{P^2_x}{P^2_\sigma}=1-c^2P^2_x=R^2_x, \end{cases}
$$

et se rappelant, que $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ se réduisent à $\theta\varepsilon$, 1, 1, 1 pour $x=\varepsilon=0$, on tirera des précédentes:

$$
(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n=\theta P_x Q_x \prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}\right), \\[3mm] \mathfrak{B}_n=\prod\limits_p^{\frac{n}{2}}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right), \\[3mm] \mathfrak{C}_n=\prod\limits_p^{\frac{n}{2}}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right)=\prod\limits_p^{\frac{n}{2}}\left(1-c^2P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}P^2_x\right), \\[3mm] \mathfrak{D}_n=R_x\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left(1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)=R_x\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left(1-c^2P^2_{\frac{2p}{n}\tau}P^2_x\right). \end{cases}
$$

En appliquant les formules (3) aux équations (α), et ayant égard aux formules (2), (4), (5), on trouvera

$$
(8)\quad \begin{cases} H=P_\tau\left\{\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}P_{\frac{2p}{n}\tau}\right\}^2=\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}P^2_{\frac{2p}{n}\tau}, \\[3mm] K=\left\{\prod\limits_p^{\frac{n}{2}}P_{\frac{2p+1}{n}\tau}\right\}^2=\prod\limits_p^{\frac{n}{2}}P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}, \end{cases}
$$

d'où

$$
(9)\qquad \theta=\frac{1}{P^2_{\frac{1}{n}\tau}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}},\quad k=c^n\prod_p^{\frac{n}{2}}P^4_{\frac{2p+1}{n}\tau}
$$

La valeur de k étant connue, on en déduit celle de h. Mais on déterminera h indépendamment de k, en observant que, comme on a

$$
R\tau_{c,0}=b,
$$

il s'en suivra

$$R_{\tau_k,k}=h,$$

ou, suivant les équations (5),

$$R_{\theta\frac{\tau}{n},k}=h:$$

donc on aura, en vertu des équations (δ) et (7),

$$(10)\qquad h=\frac{1-c^2P^4{}_{\frac{1}{n}\tau}}{R_{\frac{1}{n}\tau}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{1-c^2P^2{}_{\frac{1}{n}\tau}P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}{1-c^2P^2{}_{\frac{1}{n}\tau}P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}$$

$$=2\frac{P_{\frac{1}{n}\tau}Q_{\frac{1}{n}\tau}}{P_{\frac{2}{n}\tau}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{1-c^2P^2{}_{\frac{1}{n}\tau}P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}{1-c^2P^2{}_{\frac{1}{n}\tau}-P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}.$$

2°. Soit n un nombre impair.

En vertu de l'équation (1) on aura

$$\overset{n}{\Pi_p}f_p=\prod_{p=1}^{p=n+1}f_{n-p}=\overset{n}{\Pi_p}f_{n-p-1},$$

puis

$$\prod_{p=1}^{p=n}f_p=\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}f_p\,\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}f_{\frac{n+1}{2}+p}=\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}f_p\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}f_{n-p},$$

$$\overset{n}{\Pi_p}F_p=\overset{\frac{n+1}{2}}{\Pi_p}F_p\,\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}F_{\frac{n+1}{2}+p}=F_{\frac{n-1}{2}}\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}F_p\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}F_{n-p-1};$$

et lorsque les fonctions f_p et F_p jouissent de la proprieté de satisfaire aux conditions (2), il viendra

$$\prod_{p=1}^{p=n}f_p=\{\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}f_p\}^2,\ \overset{n}{\Pi_p}F_p=F_{\frac{n-1}{2}}\{\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}F_p\}^2.$$

On pourra donc substituer aux équationes (γ), en ayant égard aux formules (4) et (5),

$$\mathfrak{A}^2{}_n=\theta^2P^2{}_x\left\{\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}\right)\right\}^2,$$

$$\mathfrak{B}^2{}_n=\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_\tau}\right)\left\{\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right)\right\}^2,$$

$$\mathfrak{C}^2{}_n=\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\tau}}\right)\left\{\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right)\right\}^2,$$

$$\mathfrak{D}^2{}_n=\left\{\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)\right\}^2;$$

d'où l'on tire, eu égard aux formules (6),

$$(11)\quad\begin{cases}\mathfrak{A}_n=\theta P_x\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}\left(1-\dfrac{P_x{}^2}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}\right),\\[2ex]\mathfrak{B}_n=Q_x\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}\right),\\[2ex]\mathfrak{C}_n=R_x\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p+1}{n}\tau}}\right)=R_x\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}(1-c^2P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}P^2{}_x),\\[2ex]\mathfrak{D}_n=\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}\left(1-\dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)=\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}(1-c^2P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}P^2{}_x).\end{cases}$$

Pareillement les équations (α) peuvent être remplacées par

$$(12)\quad\begin{cases}H=\left\{\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}P_{\frac{2p}{n}\tau}\right\}^2=\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau},\\[2ex]K=P_\tau\left\{\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}P_{\frac{2p+1}{n}\tau}\right\}^2=\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau},\\[2ex]\theta=\dfrac{P^2{}_{\tau-\frac{1}{n}\tau}}{P^2{}_{\frac{1}{n}\tau}}\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\dfrac{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}}=\dfrac{Q^2{}_{\frac{1}{n}\tau}}{P^2{}_{\frac{1}{n}\tau}R^2{}_{\frac{1}{n}\tau}}\prod\limits_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\dfrac{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau}}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}},\\[2ex]k=c^n\overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi_p}P^4{}_{\frac{2p+1}{n}\tau}.\end{cases}$$

On pourrait déterminer h à l'aide des équations (δ) et (11); mais on obtiendra une expression plus simple par les transformations suivantes.

D'abord on déduit de la seconde des formules (β)

$$\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta y,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta z,k}}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{P^2_x}{P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}}}.$$

En observant ensuite, qu'en vertu des formules (ζ) on a

$$\theta\tau=n\tau_k,\quad \theta\sigma=\varrho_k+n\tau_k,$$

et que, puisque n est un nombre impair, on aura, non seulement

$$P_\tau=1,\ P_\sigma=\frac{1}{c},$$

mais encóre

$$P^2_{n\tau_k,k}=1,\ P^2_{\varrho_k+\tau_k,k}=P^2_{\sigma_k,k}=\frac{1}{k^2},$$

il viendra, en faisent $x=\tau$, puis $x=\sigma$,

$$\frac{1-\dfrac{1}{P^2_{\theta y,k}}}{1-\dfrac{1}{P^2_{\theta,z,k}}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\dfrac{1}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{1}{P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

$$\frac{1-\dfrac{1}{k^2P^2_{\theta y,k}}}{1-\dfrac{1}{k^2P^2_{\theta z,k}}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\dfrac{1}{c^2P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}}{1-\dfrac{1}{c^2P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

ou

$$\frac{P^2_{\theta z,k}}{P^2_{\theta y,k}}\frac{Q^2_{\theta y,k}}{Q^2_{\theta z,k}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}\frac{Q^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}{Q^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}},$$

$$\frac{P^2_{\theta z,k}}{P^2_{\theta y,k}}\frac{R^2_{\theta y,k}}{R^2_{\theta z,k}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{P^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}\frac{R^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}{R^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}};$$

d'où, en vertu de la première des formules (β),

$$\frac{Q^2_{\theta y,k}}{Q^2_{\theta z,k}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{Q^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}{Q^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}},\quad \frac{R^2_{\theta y,k}}{R^2_{\theta z,k}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{R^2_{y+\frac{2p}{n}\tau}}{R^2_{z+\frac{2p}{n}\tau}},$$

et enfin, en faisant $z=0$,

$$(13)\qquad Q_{\theta y,k}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{Q_{y+\frac{2p}{n}\tau}}{Q_{\frac{2p}{n}\tau}},\quad R_{\theta y,k}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{R_{y+\frac{2p}{n}\tau}}{R_{\frac{2p}{n}\tau}}.$$

Maintenant, comme on a

$$R_{\tau_k,k}=R_{\theta\frac{\tau}{n},k}=h,$$

la seconde des formules (13) donnera, en faisant $y=\frac{1}{n}\tau$:

$$(14)\qquad h=\overset{n}{\Pi_p}\frac{R_{\frac{2p+1}{n}\tau}}{R_{\frac{2p}{n}\tau}}.$$

Mais n étant impair, on aura aussi

$$R_{n\tau_k,k}=R_{\theta\tau,k}=h:$$

donc il viendra, en faisant $y=\tau$,

$$h=\overset{n}{\Pi_p}\frac{R_{\tau+\frac{2p}{n}\tau}}{R_{\frac{2p}{n}\tau}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{b}{R^2_{\frac{2p}{n}\tau}}=b^n\overset{n}{\Pi_p}\frac{1}{R^2_{\frac{2p}{n}\tau}},$$

ou bien

$$(15)\qquad h=b^n\prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}\frac{1}{R^4_{\frac{2p}{n}\tau}}.$$

Remarquons encore, qu'en appliquant la formule

$$\overset{n}{\Pi}_p f_p = \overset{p=n+1}{\underset{p=1}{\Pi}} f_{n-p} = \overset{n}{\Pi}_p f_{n-p-1}$$

aux formules précédentes, elle se présenteront sous une autre forme. Ainsi les équations (12) se changeront en

$$H = \overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi}_p P^2_{\tau-\frac{2p+1}{n}\tau} = \overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi}_p \frac{Q^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}}{R^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}},$$

$$K = \overset{p=\frac{n+1}{2}}{\underset{p=1}{\Pi}} P^2_{\tau-\frac{2p}{n}\tau} = \overset{p=\frac{n+1}{2}}{\underset{p=1}{\Pi}} \frac{Q^2_{\frac{2p}{n}\tau}}{R^2_{\frac{2p}{n}\tau}}.$$

En combinant cette expression de K avec celle de H fournie par la première des équations (12), on trouvera

$$(16) \qquad \theta = \frac{H}{K} = \overset{p=\frac{n+1}{2}}{\underset{p=1}{\Pi}} \frac{P^2_{\frac{2p}{n}\tau} R^2_{\frac{2p}{n}\tau}}{Q^2_{\frac{2p}{n}\tau}}.$$

Pareillement l'équation (15) se réduira à

$$h = b^n \overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi}_p \frac{1}{R^4_{\tau-\frac{2p+1}{n}\tau}} = \frac{1}{b^{n-2} \overset{\frac{n-1}{2}}{\Pi}_p R^4_{\frac{2p+1}{n}\tau}}.$$

§. II. Transformations ulterieures des formules trouvées.

En résumant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, on pourra énoncer les théorèmes suivants.

Théorème II.

Soit n un nombre pair. Déterminons les constantes H, K, θ, k par les équations

$$H = P^2_{\frac{2}{n}\tau} P^2_{\frac{4}{n}\tau} P^2_{\frac{6}{n}\tau} \ldots P^2_{\frac{n-2}{n}\tau},$$

$$K = P^2_{\frac{1}{n}\tau} P^2_{\frac{3}{n}\tau} P^2_{\frac{5}{n}\tau} \ldots P^2_{\frac{n-1}{n}\tau},$$

$$\theta = \frac{H}{K}, \quad k = c^n K^2$$

On aura

$$P_{\theta x,k}=\theta\frac{P_xQ_x}{R_x}\cdot\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_x}\cdot\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{4}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{4}{n}\tau}P^2_x}\cdots\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{n-2}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{n-2}{n}\tau}P^2_x},$$

$$Q_{\theta x,k}=\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{1}{n}\tau}}}{R_x}\cdot\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{3}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_x}\cdot\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{5}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{4}{n}\tau}P^2_x}\cdots\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{n-1}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{n-2}{n}\tau}P^2_x},$$

$$R_{\theta x,k}=\frac{1-c^2P^2_{\frac{1}{n}\tau}P^2_x}{R_x}\cdot\frac{1-c^2P^2_{\frac{3}{n}\tau}P^2_x}{1-c^2P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_x}\cdot\frac{1-c^2P^2_{\frac{5}{n}\tau}P^2_x}{1-c^2P^2_{\frac{4}{n}\tau}P^2_x}\cdots$$

$$\cdots\frac{1-c^2P^2_{\frac{n-1}{n}\tau}P^2_x}{1-c^2P^2_{\frac{n-2}{n}\tau}P^2_x}.$$

Théorème III.

En supposant n impair, on déterminera H et K par les équations

$$H=P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_{\frac{4}{n}\tau}P^2_{\frac{6}{n}\tau}\cdots P^2_{\frac{n-1}{n}\tau},$$

$$K=P^2_{\frac{1}{n}\tau}P^2_{\frac{3}{n}\tau}P^2_{\frac{5}{n}\tau}\cdots P^2_{\frac{n-2}{n}\tau},$$

et on aura

$$P_{\theta x,k}=\theta P_x\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_x}\cdot\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{4}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{3}{n}\tau}P^2_x}\cdots\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{n-1}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{n-1}{n}\tau}P^2_x},$$

$$Q_{\theta x,k}=Q_x\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{1}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_x}\cdot\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{3}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{4}{n}\tau}P^2_x}\cdots\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{n-2}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{n-1}{n}\tau}P^2_x},$$

$$R_{\theta x,k}=R_x\frac{1-c^2P^2_{\frac{1}{n}\tau}P^2_x}{1-c^2P^2_{\frac{2}{n}\tau}P^2_x}\cdot\frac{1-c^2P^2_{\frac{3}{n}\tau}P^2_x}{1-c^2P^2_{\frac{4}{n}\tau}P^2_x}\cdots\frac{1-c^2P^2_{\frac{n-2}{n}\tau}P^2_x}{1-c^2P^2_{\frac{n-1}{n}\tau}P^2_x}.$$

Le théorème III., applicable au cas où n est pair, reproduit le théorème connu de Jacobi. Ce théorème sera donc complété par le théorème II. applicable au cas où n est pair et conduisant par suite, comme on devoit s'y attendre, à la transformation du module découverte par Lagrange. D'ailleurs ces deux théorèmes sont compris dans le théor. I., qui subsiste pour tout nombre entier et positif n.

Les formules précédentes se présenteront sous d'autres formes en y appliquant les formules trouvées dans le §. IV. du No. XXXIII. T. XVI. Or ces transformations étant faciles à executer, nous ne les écrivons pas. Occupons nous seulement des relations par lesquelles les fonctions à variable imaginaire sont liées aux fonctions à variable réelle.

On aura pour cela, en vertu des formules (16) et (19) du paragraphe cité,

$$P_{ix,b}=i\frac{P_{x,c}}{Q_{x,c}},\quad Q_{ix,b}=\frac{1}{Q_{x,c}},\quad R_{ix,b}=\frac{R_{x,c}}{Q_{x,b}},$$

ou

$$P_{ix,b}=i\frac{P_{x,b}}{Q_{x,b}},\quad Q_{ix,c}=\frac{1}{Q_{x,b}},\quad R_{ix,c}=\frac{R_{x,b}}{Q_{x,b}},$$

et

$$\frac{1-\frac{P^2_{ix,b}}{P^2_{iy\,b}}}{1-\frac{P^2_{ix,b}}{P^2_{iz,b}}}=\frac{1-\frac{P^2_{x,c}}{P^2_{y,c}}}{1-\frac{P^2_{x,c}}{P^2_{z,c}}}.$$

On aura de même

$$P_{\theta ix,k}=i\frac{P_{\theta x,h}}{Q_{\theta x,h}},\quad Q_{\theta ix,k}=\frac{1}{Q_{\theta x,h}},\quad R_{\theta ix,k}=\frac{R_{\theta x,h}}{Q_{\theta x,h}},$$

$$\frac{1-\frac{P^2_{\theta x,h}}{P^2_{\theta y,h}}}{1-\frac{P^2_{\theta x,h}}{P^2_{\theta z,h}}}=\frac{1-\frac{P^2_{\theta ix,k}}{P^2_{\theta iy,k}}}{1-\frac{P^2_{\theta ix,k}}{P^2_{\theta iz,k}}}.$$

Maintenant on déduit du théor. I., eu égard à la relation $\varrho_b=i\tau_c$,

$$P_{\theta ix,k}=\frac{1}{K}\Pi_p P_{i(x+\frac{2p}{n}\varrho_b),c},$$

$$\frac{1-\frac{P^2_{\theta ix,k}}{P^2_{\theta iy,k}}}{1-\frac{P^2_{\theta ix,k}}{P^2_{\theta iz,k}}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\frac{P^2_{ix,c}}{P^2_{i(y+\frac{2p}{n}\varrho_b),c}}}{1-\frac{P^2_{ix,c}}{P^2_{i(z+\frac{2p}{n}\varrho_b),c}}}:$$

donc on aura

$$(1)\qquad \frac{P_{\theta x,h}}{Q_{\theta x,h}}=\frac{(i)^{n-1}}{K}\overset{n}{\Pi_p}\frac{P_{x+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}{Q_{x+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}},$$

$$\frac{1-\frac{P^2_{\theta x,h}}{P^2_{\theta y,h}}}{1-\frac{P^2_{\theta x,h}}{P^2_{\theta z,h}}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{z+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}};$$

d'où, en faisant $z=\frac{1}{n}\varrho_b=\frac{1}{\theta}\varrho_h$,

$$(2)\qquad 1-\frac{P^2_{\theta x,h}}{P^2_{\theta y,h}}=\overset{n}{\Pi_p}\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{y+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\varrho_b,b}}}.$$

En faisant ensuite successivement

$$y=0,\ y=\tau_b,\ y=\tau_b+\frac{1}{n}\varrho_b,$$

et en observant que

$$\theta\tau_b=\tau_h,\ \theta(\tau_b+\frac{1}{n}\varrho_b)=\tau_h+\varrho_h=\sigma_h,$$

on déduit de la précédente

$$(3)\left\{\begin{aligned}
P^2_{\theta x,b} &= \frac{\theta^2 P^2_{x,b}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{4}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{5}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2(n-1)}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2n-1}{n}\rho_b,b}}},\\
Q^2_{\theta x,b} &= \frac{Q^2_{x,b}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{4}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{5}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2(n-1)}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2n-1}{n}\rho_b,b}}},\\
R^2_{\theta x,b} &= \frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{1}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{3}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2n-1}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2n-1}{n}\rho_b,b}}};
\end{aligned}\right.$$

puis, si n est pair,

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
P_{\theta x,b} &= \frac{\theta P_{x,b}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{4}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{5}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_b,b}}},\\
Q_{\theta x,b} &= \frac{Q_{x,b}R_{x,b}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{4}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{5}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{n-2}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_b,b}}};\\
R_{\theta x,b} &= \frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{1}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{3}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{n-1}{n}\rho_b,b}}}{1-\frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_b,b}}};
\end{aligned}\right.$$

et, si n est impair,

$$
(5)\quad\left\{\begin{aligned}
P_{\theta x,h} &= \theta P_{x,b}\,\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{4}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\rho_b,b}}},\\
Q_{\theta x,h} &= Q_{x,b}\,\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{4}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{n-1}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\rho_b,b}}};\\
R_{\theta x,h} &= R_{x,b}\,\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{1}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_b,b}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{3}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_b,b}}}\cdots\frac{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{n-2}{n}\rho_b,b}}}{1-\dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\rho_b,b}}}.
\end{aligned}\right.
$$

Ajoutons que de la formule (23). §. VI. du No. XXXIII. T. XVI. jointe aux relations

$$\theta\tau_c = n\tau_k,\quad \theta\rho_c = \rho_k,$$

on déduit

$$
(6)\qquad 1-\frac{P^2_{nx,c}}{P^2_{ny,c}} = \Pi_p^{n}\,\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta y+\frac{2p}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\rho_k,k}}},
$$

$$
(7)\quad\left\{
\begin{aligned}
P^2_{nx,c} &= \frac{n^2}{\theta^2}\,\frac{P^2_{\theta x,k}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_k,k}}}\prod_{p=1}^{p=n}\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\rho_k,k}}},\\[2ex]
Q^2_{nx,c} &= \prod_p^n \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{2p}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\rho_k,k}}},\\[2ex]
R^2_{nx,k} &= \prod_p^n \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{2p+1}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\rho_k,k}}};
\end{aligned}
\right.
$$

puis, si n est pair,

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
P_{nx,c} &= \frac{n}{\theta}\cdot\frac{P_{\theta x,k}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_k,k}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_k,k}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{4}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{5}{n}\rho_k,k}}}\cdots\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_k,k}}},\\[2ex]
Q_{nx,c} &= \frac{Q_{\theta x,k}R_{\theta x,k}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_k,k}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{2}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_k,k}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{4}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{5}{n}\rho_k,k}}}\cdots\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{n-2}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_k,k}}},\\[2ex]
R_{nx,c} &= \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{1}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\rho_k,k}}}\cdot\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{3}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{3}{n}\rho_k,k}}}\cdots\frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{n-1}{n}\rho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\rho_k,k}}};
\end{aligned}
\right.
$$

et, si n est impair,

$$
(9)\left\{
\begin{aligned}
P_{nx,c} &= \frac{n}{\theta} P_{\theta x,k} \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{2}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\varrho_k,k}}} \cdot \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{4}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{3}{n}\varrho_k,k}}} \cdots \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-1}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\varrho_k,k}}}, \\
Q_{nx,c} &= Q_{\theta x,k} \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{2}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\varrho_k,k}}} \cdot \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{4}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{3}{n}\varrho_k,k}}} \cdots \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{n-1}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\varrho_k,k}}}, \\
R_{nx,c} &= R_{\theta x,c} \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{1}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\varrho_k,k}}} \cdot \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{3}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{3}{n}\varrho_k,k}}} \cdots \frac{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\tau_k+\frac{n-2}{n}\varrho_k,k}}}{1-\dfrac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\frac{n-2}{n}\varrho_k,k}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Au moyen de ces formules on sera conduit à une équation propre à déterminer le module c par k. En effet, lorsque dans les premières des formules (4) et (5), après avoir divisé par θ, on change b en k, puis x en θx, et en divisant encore par θ, les seconds membres deviendront respectivement égaux à ceux des formules (8) et (9) divisés par n; donc aussi les premiers membres seront égaux sous la même condition. On aura par conséquent pour n pair et pour n impair

$$
(10) \qquad \frac{1}{\theta\theta'} P_{\theta\theta' x,h'} = \frac{1}{n} P_{nx,c},
$$

en désignant par θ', h' ce que deviennent θ, h par le changement de b en k. Mais on a

$$
\theta\tau_c = n\tau_k, \quad \theta\varrho_c = \varrho_k,
$$
$$
\theta\tau_b = \tau_h, \quad \theta\varrho_b = n\varrho_h,
$$

d'où

$$
\theta'\tau_k = \tau_{h'}, \quad \theta'\varrho_k = n\varrho_{h'};
$$

et par suite

$$
\theta\theta'\tau_c = n\tau_{h'}, \quad \theta\theta'\varrho_c = n\varrho_{h'};
$$

puis

$$
\theta\theta'\sigma_c = n\sigma_{h'}:
$$

dnc on tirera de l'équation (10)

$$\frac{1}{\theta\theta'}P_{\tau_{h'},h'}=\frac{1}{n}P_{\tau_{c},c} \qquad \frac{1}{\theta\theta'}P_{\sigma_{h'},h'}=\frac{1}{n}P_{\sigma_{c},c},$$

ou

$$\frac{1}{\theta\theta'}=\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{\theta\theta'}\cdot\frac{1}{h'}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{c},$$

d'où

$$n=\theta\theta', \quad c=h':$$

ce qui montre que, par le changement de b en k, ou, ce qui revient au même, de c en h, θ se réduira à $\frac{n}{\theta}$, h à c et par suite k en b, proposition, qu'on a la coutume d'introduire sans démonstration. On pourra observer, qu'en posant

$$\theta=\theta_c, \; k=k_c, \; h=h_c,$$

il résultera

$$\theta'=\theta_h, \; h'=h_h$$

ce qui donnera

$$n=\theta_c\theta_h, \quad c=h_h, \quad b=k_h, \tag{11}$$

ou, en vertu des équations (9), (10), (12), (15), §. I.:

1°. Si n est pair,

$$\left\{\begin{aligned} & n=\frac{1}{P^2_{\frac{1}{n}\tau_{c},c}P^2_{\frac{1}{n}\tau_{h},h}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{P^2_{\frac{2p}{n}\tau_{c},c}P^2_{\frac{2p}{n}\tau_{h},h}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau_{c},c}P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau_{h},h}}, \\ & c=2\frac{P_{\frac{1}{n}\tau_{h},h}Q_{\frac{1}{n}\tau_{h},h}}{P_{\frac{2}{n}\tau_{h},h}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{1-h^2P^2_{\frac{1}{n}\tau_{h},h}P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau_{h},h}}{1-h^2P^2_{\frac{1}{n}\tau_{h},h}P^2_{\frac{2p}{n}\tau_{h},h}}, \\ & b=h_n\prod_p^{\frac{n}{2}}P^4_{\frac{2p+1}{n}\tau_{h},h}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

2°. Si n est impair,

$$
(13)\left\{
\begin{aligned}
n &= \frac{Q^2_{\frac{1}{n}\tau_c,c}\,Q^2_{\frac{1}{n}\tau_h,h}}{P^2_{\frac{1}{n}\tau_c,c}\,R^2_{\frac{1}{n}\tau_c,c}\,P^2_{\frac{1}{n}\tau_h,h}\,R^2_{\frac{1}{n}\tau_h,h}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{P^2_{\frac{2p}{n}\tau_c,c}\,P^2_{\frac{2p}{n}\tau_h,h}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau_c,c}\,P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau_h,h}},\\
c &= k^n \prod_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}} \frac{1}{R^4_{\frac{2p}{n}\tau_h,h}},\\
b &= h^n \prod_{p}^{\frac{n-1}{2}} P^4_{\frac{2p+1}{n}\tau_h,h}.
\end{aligned}
\right.
$$

§. III.

Application des formules trouvées au cas partici où n est égal à 2.

L'emploi des formules précédentes exige la détermi préalable des valeurs particulières

$$
P_{\frac{p}{n}\tau},\ Q_{\frac{p}{n}\tau},\ R_{\frac{p}{n}\tau},\ P_{\frac{p}{n}\varrho},\ Q_{\frac{p}{n}\varrho},\ R_{\frac{p}{n}\varrho},
$$

pour tout nombre entier et positif p inférieur à n. Pour l que nons allons considérer, où n est égal à 2, il s'agira donc primer $P_{\frac{1}{2}x}$, $Q_{\frac{1}{2}x}$, $R_{\frac{1}{2}x}$ en fonction de P_x, Q_x, R_x, ce qui revi résoudre les équations (6), §. V. du No. XXXIII. T. XVI rapport à P_x, Q_x, R_x.

Mettons les formules citées sous la forme

$$
P_{2x}=2\frac{P_xQ_xR_x}{1-c^2P_x^4},\quad 1+Q_{2x}=2\frac{Q^2_x}{1-c^2P^4_x},\quad 1+R_{2x}=2\frac{R^2_x}{1-c^2P^4_x}
$$

d'où

$$
R_{2x}-Q_{2x}=2b^2\frac{P^2_x}{1-c^2P^4_x},
$$

$$
b^2+R_{2x}-c^2Q_{2x}=2\frac{b^2}{1-c^2P^4_x},
$$

en observant que

$$
R^2_x-Q^2_x=b^2P^2_x,\quad R^2_x-c^2Q^2_x=b^2.
$$

En combinant ces équations on en tirera

$$(1)\qquad P_xQ_xR_x = b^2\frac{P_{2x}}{b^2+R_{2x}-c^2Q_{2x}},$$

$$\frac{P_xQ_x}{R_x}=\frac{P_{2x}}{1+R_{2x}},\ \frac{Q_xR_x}{P_x}=b^2\frac{P_{2x}}{R_{2x}-Q_{2x}},\ \frac{R_xP_x}{Q_x}=\frac{P_{2x}}{1+Q_{2x}};$$

observant que

$$P^2_x=1-Q^2_x,\ c^2P^2_x=1-R^2_x,\ b^2P^2_x=R^2_x-Q^2_x;$$

ù

$$\frac{P_x}{1+Q_x}=\frac{1-Q_x}{P_x},\ \frac{cP_x}{1+R_x}=\frac{1-R_x}{cP_x},\quad \frac{bP_x}{R_x+Q_x}=\frac{R_x-Q_x}{bP_x},$$

viendra

$$(2)\quad\begin{cases}\dfrac{P_xQ_x}{R_x}=\dfrac{P_{2x}}{1+R_{2x}}=\dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{1-R_{2x}}{P_{2x}},\\ \dfrac{Q_xR_x}{P_x}=b^2\dfrac{P_{2x}}{R_{2x}-Q_{2x}}=\dfrac{R_{2x}+Q_{2x}}{P_{2x}},\\ \dfrac{R_xP_x}{Q_x}=\dfrac{P_{2x}}{1+Q_{2x}}=\dfrac{1-Q_{2x}}{P_{2x}};\end{cases}$$

is

$$(3)\quad\begin{cases}P^2_x=\dfrac{1-Q_{2x}}{1+R_{2x}}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{1-R_{2x}}{1+Q_{2x}},\\ Q^2_x=\dfrac{R_{2x}+Q_{2x}}{1+R_{2x}}=\dfrac{b^2}{c^2}\dfrac{1-R_{2x}}{R_{2x}-Q_{2x}},\\ R^2_x=\dfrac{R_{2x}+Q_{2x}}{1+Q_{2x}}=b^2\dfrac{1-Q_{2x}}{R_{2x}-Q_{2x}}.\end{cases}$$

aintenant comme on a

$$P_\tau=1,\quad Q_\tau=0,\quad R_\tau=b;$$

$$\frac{1}{P_\varrho}=0,\quad \frac{1}{Q_\varrho}=0,\quad \frac{1}{R_\varrho}=0;$$

$$\frac{P_\varrho}{Q_\varrho}=i,\quad \frac{Q_\varrho}{R_\varrho}=\frac{1}{c},\quad \frac{R_\varrho}{P_\varrho}=\frac{c}{i};$$

résultera

$$(4)\left\{\begin{array}{ll} P^2_{\frac{1}{2}\tau}=\frac{1}{1+b}=\frac{1-b}{c^2}, & P^2_{\frac{1}{2}\varrho}=-\frac{1}{c};\\ Q^2_{\frac{1}{2}\tau}=\frac{b}{1+b}=b\frac{1-b}{c^2}, & Q^2_{\frac{1}{2}\varrho}=\frac{1+c}{c}=\frac{b^2}{c}\cdot\frac{1}{1-c};\\ R^2_{\frac{1}{2}\tau}=b, & R^2_{\frac{1}{2}\varrho}=1+c=\frac{b^2}{1-c}. \end{array}\right.$$

Ajoutons, qu'en vertu des principes établis dans le §. II. du No. XXXIII. T. XVI.

$$P_{\frac{1}{2}\tau},\ Q_{\frac{1}{2}\tau},\ R_{\frac{1}{2}\tau},\ \frac{1}{i}P_{\frac{1}{2}\varrho},\ Q_{\frac{1}{2}\varrho},\ R_{\frac{1}{2}\varrho}$$

seront des quantités positives; on aura par suite

$$(5)\left\{\begin{array}{ll} P_{\frac{1}{2}\tau}=\frac{1}{\sqrt{1+b}}=\frac{\sqrt{1-b}}{c}, & P_{\frac{1}{2}\varrho}=\frac{i}{c};\\ Q_{\frac{1}{2}\tau}=\frac{b}{\sqrt{b(1+b)}}=\frac{\sqrt{b(1-b)}}{c}, & Q_{\frac{1}{2}\varrho}=\frac{\sqrt{c(1+c)}}{c}=\frac{b}{\sqrt{c(1-c)}};\\ R_{\frac{1}{2}\tau}=\sqrt{b}, & R_{\frac{1}{2}\varrho}=\sqrt{1+c}=\frac{b}{\sqrt{1-c}}; \end{array}\right.$$

en désignant par $\sqrt{\alpha}$ la racine positive d'une quantité positive α.

Au moyen de ces valeurs particulières on déduit du théor. II., §. II.

$$(6)\left\{\begin{array}{ll} H=1 & K=\frac{1}{1+b}=\frac{1-b}{c^2};\\ \theta=1+b & k=\frac{1-b}{1+b}; \end{array}\right.$$

$$(7)\left\{\begin{array}{l} P_{\theta x,k}=\theta\frac{P_{x,c}\,Q_{x,c}}{R_{x,c}},\\ Q_{\theta x,k}=\frac{1-(1+b)P^2_{x,c}}{R_{x,c}},\\ R_{\theta x,k}=\frac{1-(1-b)P^2_{x,c}}{R_{x,c}}; \end{array}\right.$$

l'équation (10), §. I. et les formules (4), §. II. donneront

$$(8)\qquad h=\frac{2\sqrt{b}}{1+b},$$

$$(9)\qquad \begin{cases} P_{\theta x,h}=\theta\,\dfrac{P_{x,b}}{1+bP^2_{x,b}},\\ Q_{\theta x,h}=\dfrac{Q_{x,b}R_{x,b}}{1+bP^2_{x,b}},\\ R_{\theta x,h}=\dfrac{1-bP^2_{x,b}}{1+bP^2_{x,b}}; \end{cases}$$

formules (8), §. II. conduiront à

$$(10)\qquad \begin{cases} P_{2x,c}=\dfrac{2}{\theta}\dfrac{P_{\theta x,k}}{1+kP^2_{\theta x,k}},\\ Q_{2x,c}=\dfrac{Q_{\theta x,k}R_{\theta x,k}}{1+kP^2_{\theta x,k}},\\ R_{2x,c}=\dfrac{1-kP^2_{\theta x,k}}{1+kP^2_{\theta x,k}}. \end{cases}$$

formules on pourra joindre les équations (12), §. II., savoir

$$(11)\qquad \begin{cases} 2=(1+b)(1+k)\\ c=\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad b=\dfrac{1-k}{1+k}; \end{cases}$$

n les relations

$$\theta\tau_c=2\tau_k,\quad \theta\varrho_c=\varrho_k,$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \tau_k=\dfrac{1+b}{2}\tau_c,\quad \varrho_k=(1+b)\varrho_c;\\ \tau_h=(1+b)\tau_b,\quad \varrho_h=\dfrac{1+b}{2}\varrho_b;\\ \tau_c=(1+k)\tau_k,\quad \varrho_c=\dfrac{1+k}{2}\varrho_k;\\ \tau_b=\dfrac{1+k}{2}\tau_h,\quad \varrho_b=(1+k)\varrho_h. \end{cases}$$

quons encore, que, $P_{2x,c}$, $Q_{2x,c}$, $R_{2x,c}$ étant exprimées en n de $P_{\theta x,k}$, $Q_{\theta x,k}$, $R_{\theta x,k}$, par les formules (10) on pourra déterminer $P_{x,c}$, $Q_{x,c}$, $R_{x,c}$ par les mêmes fonctions à l'aide rmules (8). §. V. du Nr. XXXIII. T. XVI.
n effet on en tire

$$R_{2x,c}+cQ_{2x,c}=(1+c)\frac{1-cP^2_{x,c}}{1+cP^2_{x,c}},$$

d'où

$$R_{2\theta x,k}+kQ_{2\theta x,k}=(1+k)\frac{1-kP^2_{\theta x,k}}{1+kP^2_{\theta x,k}},$$

ce qui change la troisième des formules (10) en

$$R_{2x,c}=\frac{1}{1+k}\{R_{2\theta x,k}+kQ_{2\theta x,k}\},$$

ou

$$R_{x,c}=\frac{1}{1+k}\{R_{\theta x,k}+kQ_{\theta x,k}\}; \tag{13}$$

et, en observant que $c^2=\frac{4k}{(1+k)^2}$, on en déduit

$$\begin{cases} 2P^2_{x,c}=1-Q_{\theta x,k}R_{\theta x,k}+kP^2_{\theta x,k}, \\ 2Q^2_{x,c}=1+Q_{\theta x,k}R_{\theta x,k}-kP^2_{\theta x,k}. \end{cases} \tag{14}$$

§. IV.

Application des formules trouvées au cas partic où n est infini.

Lorsqu'on attribue à n une valeur infinie, il sera indi de supposer n pair ou impair. Supposons donc n pair, et dérons d'abord la formule

$$P_{\theta x,k}=\theta\frac{P_xQ_x}{R_x}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{1-\frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2p}{n}\tau}P^2_x}. \tag{1}$$

Observons, que k déterminée par l'équation

$$k=c^n\Pi_p^{\frac{n}{2}}P^4_{\frac{2p+1}{n}\tau}$$

s'évanouira pour une valeur infinie de n, puisque c et
sont inférieures à 1; donc, comme on a

$$\tau_k=\frac{\pi}{2}\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\},$$

il viendra pour ce cas

$$(2)\qquad \tau_k=\tau_0=\frac{\pi}{2}.$$

Puis on a

$$\theta\tau_c=n\tau_k,$$

et par suite

$$(3)\qquad \frac{\theta}{n}=\frac{\tau_k}{\tau_c}=\frac{\pi}{2\tau}.$$

En remplaçant donc $\frac{x}{n}$ à x dans la formule (1), on obtiendra

$$P_{\frac{\pi}{2\tau}x,\,0}=\frac{\pi}{2\tau}\,\frac{P_{\frac{1}{n}x}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{Q_{\frac{1}{n}x}}{R_{\frac{1}{n}x}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{1-\dfrac{P^2_{\frac{1}{n}x}}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2p}{n}\tau}P^2_{\frac{1}{n}x}}.$$

Maintenant, n étant infini, $\frac{1}{n}$ sera égal à zéro. De plus, $2p$ étant compris entre 1 et n, $\frac{2p}{n}$ sera égal à zéro, lorsque $2p$ aura des valeurs finies, ou même infinies, pourvu que $2p$ ne soit comparable à n. Mais, pour des valeurs croissantes, $2p$ finira par devenir comparable à n, et $\frac{2p}{n}$ obtiendra une valeur assignable comprise entre 0 et 1. On saura donc concevoir un nombre pair m, de manière que $\frac{2p}{n}$ sera égal à zéro pour des valeurs de $2p$ inférieures à m, et que ce rapport aura une valeur différente de zéro et comprise entre 0 et 1 pour des valeurs de $2p$ égales ou supérieures à m. Ce nombre m devant être comparable à n deviendra infini avec n.

Cela posé, on pourra substituer à la précédente

$$P_{\frac{\pi}{2\tau}x,\,0}=J\frac{\pi}{2\tau}\cdot\frac{P_{\frac{1}{n}x}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{Q_{\frac{1}{n}x}}{R_{\frac{1}{n}x}}\prod_{p=1}^{p=\frac{m}{2}}\frac{1-\dfrac{P^2_{\frac{1}{n}x}}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1-c^2P^2_{\frac{2p}{n}\tau}P^2_{\frac{1}{n}x}},$$

ayant fait, pour abréger,

$$J = \prod_{p=\frac{m}{2}}^{p=\frac{n}{2}} \frac{1 - \frac{P^2_{\frac{1}{n}x}}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1 - c^2 P^2_{\frac{2p}{n}\tau} P_{\frac{1}{n}x}};$$

et, en vertu des suppositions faites, $\frac{2p}{n}$ sera égal à zéro dans la première de ces équations, tandis que ce rapport sera différent de zéro et compris entre 0 et 1 dans l'autre. La valeur de $P^2_{\frac{2p}{n}\tau}$ sera donc nulle dans la première, et différente de zéro dans la seconde; d'où il suit, que, pour des valeurs finies de x, le rapport

$$\frac{P^2_{\frac{1}{n}x}}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}$$

se réduira à $\left(\frac{x}{2p\tau}\right)^2$ dans la première, et à zero dans la seconde, tandis que le produit $P^2_{\frac{2p}{n}\tau} P^2_{\frac{1}{n}x}$ s'évanouira dans l'une et l'autre. La valeur de J sera par suite indépendante de x; et si l'on observe, que, pour des valeurs finies de x, $\frac{n}{x} P_{\frac{1}{n}x}$, $Q_{\frac{1}{n}x}$, $R_{\frac{1}{n}x}$ se réduiront à 1, et qu'on a

$$P_{\frac{\pi}{2\tau}x,0} = \sin\frac{\pi}{2\tau}x,$$

il viendra

$$\sin\frac{\pi}{2\tau}x = J\frac{\pi}{2\tau}x \prod_{p=1}^{p=\frac{m}{2}} \left\{1 - \left(\frac{x}{2p\tau}\right)^2\right\}.$$

On voit, que la valeur de J sera égale à 1; et, comme m désigne un nombre infini, on pourra substituer à la précédente

$$(4) \qquad \sin x = x \prod_{p=1}^{p=\infty} \left\{1 - \left(\frac{x}{p\pi}\right)^2\right\},$$

et on sera assuré, que cette équation subsiste pour toute valeur finie de x.

Ajoutons que de la précedente on deduit

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{x}{y}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{1-\left(\frac{x}{p\pi}\right)^2}{1-\left(\frac{y}{p\pi}\right)^2}=\frac{x}{y}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{(x-p\pi)(x+p\pi)}{(y-p\pi)(y+p\pi)},$$

et, puisque

$$\frac{x+p\pi}{y+p\pi}\ \text{et}\ \frac{x-p\pi}{y-p\pi}$$

se réduisent à 1 pour p infini, on aura encore

$$(5)\qquad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{x}{y}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{x-p\pi}{y-p\pi}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{x+p\pi}{y+p\pi},$$

ou enfin

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\prod_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{x-p\pi}{y-p\pi}.$$

On trouvera pareillement

$$(6)\qquad \begin{cases}\cos x=\prod_p^{\infty}\left\{1-\left(\frac{2x}{\overline{2p+1}\pi}\right)^2\right\}=\prod_{p=-\infty}^{p=\infty}\left\{1-\frac{2x}{\overline{2p+1}\pi}\right\},\\[2ex] \frac{\cos x}{\cos y}=\prod_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{2x-\overline{2p+1}\pi}{2y-\overline{2p+1}\pi}.\end{cases}$$

Nous passons les formules (4) du §. II., puisque la supposition de n infini conduira aux fonctions

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \frac{2}{e^x+e^{-x}},$$

qu'on déduira aussi des précédentes.

Considérons donc ensuite les formules (8) du §. II. En remplaçant $\frac{1}{n}x$ à x, on aura

$$P_x=\frac{n}{\theta}\,\frac{P_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\varrho_k,k}}}\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\frac{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p}{n}\varrho_k,k}}}{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\varrho_k,k}}}.$$

Maintenant la valeur des fonctions

$$P_{\frac{2p}{n}\varrho_k,k} \text{ et } P_{\frac{2p+1}{n}\varrho_k,k}$$

s'accroitra, à mésure que p augmente, et, pour une valeur infinie de n, ces fonctions finiront par devenir égales à

$$P_{\varrho_k,k} = \infty i.$$

En substituant donc à la précédente

$$(7)\quad P_x = J' \frac{n}{\theta} \frac{P_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{1}{n}\varrho_k,k}}} \prod_{p=1}^{p=\frac{m}{2}} \frac{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p}{n}\varrho_k,k}}}{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\varrho_k,k}}},$$

dans laquelle

$$J' = \prod_{p=\frac{m}{2}}^{p=\frac{n}{2}} \frac{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p}{n}\varrho_k,k}}}{1-\frac{P^2_{\frac{1}{n}\theta x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\varrho_k,k}}},$$

on pourra concevoir le nombre pair m, de manière que la valeur des fonctions

$$P_{\frac{2p}{n}\varrho_k,k} \text{ et } P_{\frac{2p+1}{n}\varrho_k,k}$$

sera finie dans la première, et infinie dans l'autre; d'où il suit, que J' sera indépendante de x, à moins que $P_{\frac{1}{n}\theta x,k}$ ne soit infinie, ce qui n'aura lieu que pour une valeur $\overline{2q+1}\,\frac{n}{\theta}\varrho_k$ de x, q étant un nombre entier quelconque. Or on a trouvé pour n infini

$$k=0,\quad \tau_k=\frac{\pi}{2},\quad \frac{\theta}{n}=\frac{\pi}{2\tau}$$

et de la relation

$$\frac{\tau}{\varrho} = n\frac{\tau_k}{\varrho_k}$$

on tire

$$\rho_k = n\frac{\pi\rho}{2\tau} = in\frac{\pi\tau_b}{2\tau};$$

donc $P_{\frac{1}{n}\theta x,k}$ ne sera infinie que lorsque

$$x=(2q+1)n\rho = i(2q+1)n\tau_b,$$

c'est-à-dire, lorsque x est infinie elle même. De plus, k étant égal à zéro pour n infini, la fonction $P_{x,k}$ se réduira à $\sin x$, pourvu-que $P_{x,k}$ ne soit infinie. Cette réduction sera par suite appliquable à la formule (7), puisque la valeur de $P_{\frac{2p}{n}\rho_k,k}$ est finie par hypothèse, et $P_{\frac{1}{n}\theta x,k}$ ne sera infinie que pour x infinie. Si donc on suppose la valeur de x finie, et qu'on substitue à $\frac{\theta}{n}$ et ρ_k les valeurs trouvées, il viendra

$$P_x = J'\frac{2\tau}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi x}{2\tau}}{1-\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2\tau}}{\sin\frac{\pi\rho}{2\tau}}\right)^2}\prod_{p=1}^{p=\frac{m}{2}}\frac{1-\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2\tau}}{\sin p\frac{\pi\rho}{\tau}}\right)^2}{1-\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2\tau}}{\sin\overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{2\tau}}\right)^2}.$$

La valeur de J' indépendante de x se réduira evidemment à 1; et, comme le nombre m doit être comparable à n, il sera infini avec n; de sorte qu'on pourra substituer à la précédente

$$(8)\quad P_{\frac{2\tau}{\pi}x} = \frac{2\tau}{\pi}\frac{\sin x}{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi\rho}{2\tau}}\right)^2}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{1-\left(\frac{\sin x}{\sin p\frac{\pi\rho}{\tau}}\right)^2}{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{2\tau}}\right)^2}.$$

On trouvera pareillement

(9)

$$Q_{\frac{2\tau}{\pi}x} = \frac{\cos x}{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2} \prod_{p=1}^{p=\infty} \frac{1-\left(\frac{\sin x}{\cos p\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2}{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\overline{2p+1}\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2},$$

$$R_{\frac{2\tau}{\pi}x} = \prod_p^{\infty} \frac{1-\left(\frac{\sin x}{\cos\overline{2p+1}\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2}{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\overline{2p+1}\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2}.$$

Ajoutons, qu'on a

$$(\sin\alpha)^2-(\sin\beta)^2=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$

$$(\cos\alpha)^2-(\sin\beta)^2=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

et observons, que les rapports

$$\frac{\sin(x-2p\varrho)}{\sin(y-2p\varrho)}\cdot\frac{\sin(y-\overline{2p+1}\varrho)}{\sin(x-\overline{2p+1}\varrho)},\quad \frac{\cos(x-2p\varrho)}{\cos(y-2p\varrho)}\cdot\frac{\sin(y-\overline{2p+1}\varrho)}{\sin(x-\overline{2p+1}\varrho)}$$

se réduisent à 1 pour p infini, puisque ϱ est imaginaire: donc on deduira des formules (8) et (9)

(10)

$$\frac{P_x}{P_y}=\prod_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2\tau}(x-2p\varrho)}{\sin\frac{\pi}{2\tau}(y-2p\varrho)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2\tau}(y-\overline{2p+1}\varrho)}{\sin\frac{\pi}{2\tau}(x-\overline{2p+1}\varrho)},$$

$$\frac{Q_x}{Q_y}=\prod_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2\tau}(x-2p\varrho)}{\cos\frac{\pi}{2\tau}(y-2p\varrho)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2\tau}(y-\overline{2p+1}\varrho)}{\sin\frac{\pi}{2\tau}(x-\overline{2p+1}\varrho)}.$$

$$\frac{R_x}{R_y}=\prod_{p=-\infty}^{p=\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2\tau}(x-\overline{2p+1}\varrho)}{\cos\frac{\pi}{2\tau}(y-\overline{2p+1}\varrho)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2\tau}(y-\overline{2p+1}\varrho)}{\sin\frac{\pi}{2\tau}(x-\overline{2p+1}\varrho)},$$

ou, en vertu des formules (5) et (6):

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{P_x}{P_y}=\prod\limits_{p=-\infty}^{p=\infty}\prod\limits_{q=-\infty}^{q=\infty}\dfrac{x-2p\tau-2q\varrho}{y-2p\tau-2q\varrho}\cdot\dfrac{y-2p\tau-\overline{2q+1}\varrho}{x-2p\tau-\overline{2q+1}\varrho},\\[2ex] \dfrac{Q_x}{Q_y}=\prod\limits_{p=-\infty}^{p=\infty}\prod\limits_{q=-\infty}^{q=\infty}\dfrac{x-\overline{2p+1}\tau-2q\varrho}{y-\overline{2p+1}\tau-2q\varrho}\cdot\dfrac{y-2p\tau-\overline{2q+1}\varrho}{x-2p\tau-\overline{2q+1}\varrho},\\[2ex] \dfrac{R_x}{R_y}=\prod\limits_{p=-\infty}^{p=\infty}\prod\limits_{q=-\infty}^{q=\infty}\dfrac{x-\overline{2p+1}\tau-\overline{2q+1}\varrho}{y-\overline{2p+1}\tau-\overline{2q+1}\varrho}\cdot\dfrac{y-2p\tau-\overline{2q+1}\varrho}{x-2p\tau-\overline{2q+1}\varrho}.\end{cases}$$

On pourrait demander, ce que deviennent les équations (12), §. II. dans la supposition de n infini. On trouverait les constantes $\frac{\theta}{n}$ ou $\frac{\pi}{2\tau}$, b et c exprimées en produits composés d'un nombre infini de facteurs. Mais, pour éviter le passage du fini à l'infini, il sera à préferer de déduire ces expressions des formules (8) et (9). On y parviendra en observant, qu'on a

$$P_\tau=1,\quad R_\tau=b,\quad \frac{R_\varrho}{Q_\varrho}=c;$$

ce qui donnera, en posant pour abréger $\mu=\frac{\pi\varrho}{2\tau}$,

$$\frac{\pi}{2\tau}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{(\sin\mu)^2}}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{1-\dfrac{1}{(\sin 2p\mu)^2}}{1-\dfrac{1}{(\sin\overline{2p+1}\mu)^2}},$$

$$b=\prod_p^{\infty}\frac{1-\dfrac{1}{(\cos\overline{2p+1}\mu)^2}}{1-\dfrac{1}{(\sin\overline{2p+1}\mu)^2}},$$

$$c=\frac{1-\left(\dfrac{\sin\mu}{\cos\mu}\right)^2}{\cos\mu}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{1-\left(\dfrac{\sin\mu}{\cos\overline{2p+1}\mu}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\sin\mu}{\cos 2p\mu}\right)^2};$$

ou

$$(12)\quad\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\tau}=-\left(\dfrac{\sin\mu}{\cos\mu}\right)^2\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}\left(\dfrac{\sin\overline{2p+1}\mu}{\sin 2p\mu}\right)^2\left(\dfrac{\cos 2p\mu}{\cos\overline{2p+1}\mu}\right)^2,\\[2ex] b=\prod\limits_p^{\infty}\left(\dfrac{\sin\overline{2p+1}\mu}{\cos\overline{2p+1}\mu}\right)^4,\\[2ex] c=\dfrac{\cos 2\mu}{(\cos\mu)^3}\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}\left(\dfrac{\cos 2p\mu}{\cos\overline{2p+1}\mu}\right)^3\left(\dfrac{\cos\overline{2p+2}\mu}{\cos\overline{2p-1}\mu}\right).\end{cases}$$

Remarquons que, ϱ étant imaginaire et égale à $i\tau_b$, μ en s pareillement, et on aura

$$(13) \qquad \mu = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varrho_c}{\tau_c} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\tau_b}{\tau_c}i,$$

et par suite

$$\sin p\mu = \frac{e^{-p\frac{\pi\tau_b}{2\tau}} - e^{p\frac{\pi\tau_b}{2\tau}}}{2i}, \quad \cos p\mu = \frac{e^{-p\frac{\pi\tau_b}{2\tau}} + e^{p\frac{\pi\tau_b}{2\tau}}}{2}.$$

Si donc on pose

$$(14) \qquad \zeta = e^{-\frac{\pi\tau_b}{\tau}},$$

on aura

$$\sin p\mu = \frac{1}{2i}\left(\zeta^{\frac12 p} - \frac{1}{\zeta^{\frac12 p}}\right), \quad \cos p\mu = \frac{1}{2}\left(\zeta^{\frac12 p} + \frac{1}{\zeta^{\frac12 p}}\right);$$

ou

$$(15) \qquad \sin p\mu = \frac{i}{2\zeta^{\frac12 p}}(1-\zeta^p), \quad \cos p\mu = \frac{1}{2\zeta^{\frac12 p}}(1+\zeta^p);$$

et les équations (12) se réduiront à

$$\frac{\pi}{2\tau} = \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 \prod_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{1-\zeta^{2p+1}}{1+\zeta^{2p+1}}\right)^2\left(\frac{1+\zeta^{2p}}{1-\zeta^{2p}}\right)^2,$$

$$b = \prod_p^{\infty}\left(\frac{1-\zeta^{2p+1}}{1+\zeta^{2p+1}}\right)^4,$$

$$c = 4\zeta^{\frac12}\frac{1+\zeta^2}{(1+\zeta)^3}\prod_{p=1}^{p=\infty}\left(\frac{1+\zeta^{2p}}{1+\zeta^{2p+1}}\right)^3\left(\frac{1+\zeta^{2p+2}}{1+\zeta^{2p-1}}\right).$$

Puis, en observant que, ζ étant une quantité positive et inféri à 1, ζ^p convergera vers zéro, à mésure que p augmente, on clura qu'on pourra écrire les précédentes sous la forme

$$\left(\frac{\pi}{2\tau}\right) = \left\{\frac{1+\zeta^2}{1+\zeta}\cdot\frac{1+\zeta^4}{1+\zeta^3}\cdot\frac{1+\zeta^6}{1+\zeta^5}\cdots\right\}\cdot\left\{\frac{1-\zeta}{1-\zeta^2}\cdot\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^4}\cdot\frac{1-\zeta^5}{1-\zeta^6}\cdots\right\},$$

$$b^{\frac14} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\cdot\frac{1-\zeta^3}{1+\zeta^3}\cdot\frac{1-\zeta^5}{1+\zeta^5}\cdots,$$

$$\frac{c^{\frac14}}{2^{\frac12}\zeta^{\frac18}} = \frac{1+\zeta^2}{1+\zeta}\cdot\frac{1+\zeta^4}{1+\zeta^3}\cdot\frac{1+\zeta^6}{1+\zeta^5}\cdots;$$

d'où

$$(16)\quad \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}} = \frac{1-\zeta}{1-\zeta^2} \cdot \frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^4} \cdot \frac{1-\zeta^5}{1-\zeta^6} \cdots, \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{4}} \zeta^{\frac{1}{8}} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta^2} \cdot \frac{1-\zeta^3}{1+\zeta^4} \cdot \frac{1-\zeta^5}{1+\zeta^6} \cdots, \\ b^{\frac{1}{4}} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \cdot \frac{1-{}^{3}}{1+\zeta^3} \cdot \frac{1-\zeta^5}{1+\zeta^5} \cdots, \end{cases}$$

Ces quantités positives à exposant fractionnaire représentent seulement les valeurs positives qu'elles admettent. Ajoutons que, comme on a évidemment

$$\overset{\infty}{\Pi}_p (1-\zeta^{2p+1})(1+\zeta^{2p+1})(1-\zeta^{2p+2})(1+\zeta^{2p+2})$$

$$= \overset{\infty}{\Pi}_p (1-\zeta^{4p+2})(1-\zeta^{4p+4}) = \overset{\infty}{\Pi}_p (1-\zeta^{2p+2}),$$

d'où

$$\overset{\infty}{\Pi}_p (1-\zeta^{2p+1}) = \overset{\infty}{\Pi}_p \frac{1}{(1+\zeta^{2p+1})(1+\zeta^{2p+2})} = \overset{\infty}{\Pi}_p \frac{1}{1+\zeta^p},$$

ou

$$(1-\zeta)(1-\zeta^3)(1-\zeta^5)\ldots\ldots = \frac{1}{1+\zeta} \cdot \frac{1}{1+\zeta^2} \cdot \frac{1}{1+\zeta^3} \cdots,$$

on tirera des équations (16)

$$(2b)^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{4}} \zeta^{\frac{1}{8}} = (1-\zeta)^3 (1-\zeta^3)^3 (1-\zeta^5)^3 \ldots,$$

et ensuite

$$(17)\quad \begin{cases} (2b)^{\frac{1}{6}} c^{-\frac{1}{12}} \zeta^{\frac{1}{24}} = (1-\zeta)(1-\zeta^3)(1-\zeta^5)\ldots., \\ \left(\frac{\tau}{\pi}\right) (2bc)^{\frac{1}{6}} \zeta^{-\frac{1}{12}} = (1-\zeta^2)(1-\zeta^4)(1-\zeta^6)\ldots., \\ 2^{\frac{1}{6}} (bc)^{-\frac{1}{12}} \zeta^{\frac{1}{24}} = (1+\zeta)(1+\zeta^3)(1+\zeta^5)\ldots\ldots \\ 2^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{12}} c^{\frac{1}{6}} \zeta^{-\frac{1}{12}} = (1+\zeta^2)(1+\zeta^4)(1+\zeta^6)\ldots\ldots. \end{cases}$$

Les produits composés d'un nombre infini de facteurs seront donc réduits à des expressions finies.

On éliminera de même la quantité imaginaire ϱ des formules (8) et (9). Observons pour cela, qu'on a généralement

$$1-\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 = -\frac{1}{2(\sin\beta)^2}\{\cos 2\beta - \cos 2\alpha\},$$

$$1-\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{1}{2(\cos\beta)^2}\{\cos 2\beta + \cos 2\alpha\};$$

et par suite, eu égard aux équations (13) et (14),

$$1-\left(\frac{\sin x}{\sin p\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2=\frac{1}{(1-\zeta^p)^2}\{1-2\zeta^p\cos 2x+\zeta^{2p}\},$$

$$1-\left(\frac{\sin x}{\cos p\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2=\frac{1}{(1+\zeta^p)^2}\{1+2\zeta^p\cos 2x+\zeta^{2p}\}.$$

On transformera donc la formule (8) en

$$P_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{2\tau}{\pi}(1-\zeta)^2\frac{\sin x}{1-2\zeta\cos 2x+\zeta^2}\prod_{p=1}^{p=\infty}\left\{\left(\frac{1-\zeta^{2p+1}}{1-\zeta^{2p}}\right)^2\frac{1-2\zeta^{2p}\cos 2x+\zeta^{4p}}{1-2\zeta^{2p+1}\cos 2x+\zeta^{4p+2}}\right\};$$

puis, en observant, que ζ^p s'évanouit pour p infini, et ayant égard aux équations (16), on pourra substituer à la précédente

$$(18)\qquad P_{\frac{2\tau}{\pi}x}=2c^{-\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{4}}\sin x\,\frac{1-2\zeta^2\cos 2x+\zeta^4}{1-2\zeta\cos 2x+\zeta^2}\cdot\frac{1-2\zeta^4\cos 2x+\zeta^8}{1-2\zeta^3\cos 2x+\zeta^6}\cdots.$$

Pareillement on tirera des formules (9)

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}Q_{\frac{2\tau}{\pi}x}&=2\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{4}}\cos x\,\frac{1+2\zeta^2\cos 2x+\zeta^4}{1-2\zeta\cos 2x+\zeta^2}\cdot\frac{1+2\zeta^4\cos 2x+\zeta^8}{1-2\zeta^3\cos 2x+\zeta^6}\cdots,\\ R_{\frac{2\tau}{\pi}x}&=b^{\frac{1}{2}}\frac{1+2\zeta\cos 2x+\zeta^2}{1-2\zeta\cos 2x+\zeta^2}\cdot\frac{1+2\zeta^3\cos 2x+\zeta^6}{1-2\zeta^3\cos 2x+\zeta^6}\cdots.\end{aligned}\right.$$

Il suit de ces formules, que les trois fonctions circulaires du second ordre peuvent être exprimées par deux autres fonctions. En effet, si l'on pose

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}Z_x&=\sin x\,(1-2\zeta^2\cos 2x+\zeta^4)\,(1-2\zeta^4\cos 2x+\zeta^8)\ldots\ldots,\\ \Theta_x&=(1-2\zeta\cos 2x+\zeta^2)\,(1-2\zeta^3\cos 2x+\zeta^6)\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(21)\quad P_{\frac{2\tau}{\pi}x}=2\frac{\zeta^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{Z_x}{\Theta_x},\quad Q_{\frac{2\tau}{\pi}x}=2\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{4}}\frac{Z_{x+\frac{1}{2}\pi}}{\Theta_x},\quad R_{\frac{2\tau}{\pi}x}=b^{\frac{1}{2}}\frac{\Theta_{x+\frac{1}{2}\pi}}{\Theta_x}$$

M. Jacobi a découvert plusieurs proprietés de ces deux transcendantes, ou plutôt de deux autres, qui sont proportionnelles à celles-ci. Tout cela étant assez connu par les Traités sur les fonctions elliptiques, je terminerai ce Mémoire, en montrant seulement, comment on pourra convertir les fonctions Z_x et Θ_x dans une somme de termes proportionnels aux sinus ou cosinus de x ou des multiples de x, parceque nous en profiterons dans la suite.

En faisant

$$(22) \qquad \omega = e^{xi},$$

aura

$$\sin x = \frac{1}{2i}(\omega - \frac{1}{\omega}) = \frac{i}{2\omega}(1 - \omega^2),$$

$$1 - 2\zeta^2 \text{Cos} 2x + \zeta^4 = (1 - \zeta^2\omega^2)(1 - \zeta^2 \frac{1}{\omega^2});$$

qui changera les équations (20) en

$$Z_x = \frac{i}{2\omega}(1 - \omega^2) \prod_{p=1}^{p=\infty} (1 - \zeta^{2p}\omega^2)(1 - \zeta^{2p}\frac{1}{\omega^2}),$$

$$\Theta_x = \prod_p^{\infty} (1 - \zeta^{2p+1}\omega^2)(1 - \zeta^{2p+1}\frac{1}{\omega^2}).$$

plus, en posant

$$\varphi\omega = \prod_p^{\infty} (1 - \zeta^{2p}\omega^2),$$

équations précédentes se réduiront à

$$Z_x = \frac{i}{2\omega}\varphi\omega\,\varphi_{\zeta\frac{1}{\omega}}, \quad \Theta_x = \varphi\zeta^{\frac{1}{2}}\omega\,\varphi_{\zeta^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\omega}};$$

si l'on fait encore

$$F\omega = \varphi\omega\,\varphi_{\zeta\frac{1}{\omega}},$$

aura

$$(23) \qquad Z_x = \frac{i}{2\omega}F\omega, \; \Theta_x = F\zeta^{\frac{1}{2}}\omega,$$

ıdis que la fonction F_ω, à cause de

$$\varphi\omega = (1 - \omega^2)\varphi\zeta\omega,$$

tisfera à la condition

$$(24) \qquad F\omega + \omega^2 F\zeta\omega = 0.$$

ıintenant, la fonction $\varphi\omega$ étant développable en série suivant les ıssances entières et positives de ω^2, $F\omega$ sera développable en ie suivant les puissances entières positives et négatives de ω^2: ıc on pourra poser

$$F\omega = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} (-1)^p \alpha_p \omega^{2p},$$

étant indépendant de ω; et, en vertu de l'équation (24), on ra

$$\alpha_p = \alpha_{p-1}\zeta^{2(p-1)},$$

d'où

$$\alpha_p = \alpha_0 \zeta^{p(p-1)}.$$

On aura donc

$$F\omega = \alpha_0 \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p(p-1)} \omega^{2p},$$

et, en vertu des équations (23),

$$Z_x = \frac{\alpha_0}{2i} \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p(p+1)} \omega^{2p+1},$$

$$\Theta_x = \alpha_0 \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p^2} \omega^{2p};$$

ou

$$Z_x = \alpha_0 \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p(p+1)} \frac{1}{2i} \left(\omega^{2p+1} - \frac{1}{\omega^{2p+1}}\right),$$

$$\Theta_x = \alpha_0 \left\{1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p^2} \frac{1}{2} \left(\omega^{2p} + \frac{1}{\omega^{2p}}\right)\right\},$$

ou bien, suivant l'équation (22),

$$(25) \quad \begin{cases} Z_x = \alpha_0 \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p(p+1)} \sin \overline{2p+1}\, x, \\[2ex] \Theta_x = \alpha_0 \left\{1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \zeta^{p^2} \cos 2px \right\}; \end{cases}$$

et les équations (21) se réduiront à

$$(26) \quad \begin{cases} P_{\frac{2\tau}{\pi}x} = 2\dfrac{\zeta^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}} \dfrac{\sin x - \zeta^{1\cdot 2}\sin 3x + \zeta^{2\cdot 3}\sin 5x - \ldots\ldots}{1 - 2\zeta^{1\cdot 1}\cos 2x + 2\zeta^{2\cdot 2}\cos 4x - 2\zeta^{3\cdot 3}\cos 6x + \ldots}, \\[3ex] Q_{\frac{2\tau}{\pi}x} = 2\left(\dfrac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{4}} \dfrac{\cos x + \zeta^{1\cdot 2}\cos 3x + \zeta^{2\cdot 3}\cos 5x + \ldots}{1 - 2\zeta^{1\cdot 1}\cos 2x + 2\zeta^{2\cdot 2}\cos 4x - 2\zeta^{2\cdot 3}\cos 6x + \ldots}, \\[3ex] R_{\frac{2\tau}{\pi}x} = b^{\frac{1}{2}} \dfrac{1 + 2\zeta^{1\cdot 1}\cos 2x + 2\zeta^{2\cdot 2}\cos 4x + 2\zeta^{3\cdot 3}\cos 6x + \ldots}{1 - 2\zeta^{1\cdot 1}\cos 2x + 2\zeta^{2\cdot 2}\cos 4x - 2\zeta^{3\cdot 3}\cos 6x + \ldots}. \end{cases}$$

Pour la théorie des transcendantes Z_x et Θ_x il fallait encore déterminer la constante α_0. On y parviendra en observant, que de la première des formules (20) on tire

$$\frac{Z_\varepsilon}{\varepsilon} = (1-\zeta^2)^2(1-\zeta^4)^2(1-\zeta^6)^2 \ldots.$$

ε étant égal à zéro. La première des formules (25) donnera par suite

$$(1-\zeta^2)^2(1-\zeta^4)^2(1-\zeta^6)^2\ldots\ldots=\alpha_0\{1-3\zeta^{1\cdot2}+5\zeta^{2\cdot3}-7\zeta^{3\cdot4}+\ldots\},$$

équation propre à déterminer α_0. D'ailleurs on pourra représenter la série contenue dans le second membre sous une forme finie. En effet, ayant démontré qu'on aura pour un module de z inférieur à 1

$$(1-z^2)^3(1-z^4)^3(1-z^6)^3\ldots\ldots=1-3z^{1\cdot2}+5z^{2\cdot3}-7z^{3\cdot4}+\ldots\ldots,$$

il s'en suivra, que cette équation subsistera aussi, lorsqu'on remplace z par ζ. On aura par suite

$$\alpha_0=\frac{1}{1-\zeta^2}\cdot\frac{1}{1-\zeta^4}\cdot\frac{1}{1-\zeta^6}\cdots,$$

ou, en vertu des équations (17),

$$(27)\qquad \alpha_0=\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}(2bc)^{-\frac{1}{3}}\zeta^{\frac{1}{12}}.$$

Ajoutons que, comme on déduit des formules (26) par la supposition de $x=0$

$$1-2\zeta^{1\cdot1}+2\zeta^{2\cdot2}-2\zeta^{3\cdot3}+\ldots\ldots$$
$$=\frac{\pi}{\tau}\frac{\zeta^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}}\{1-3\zeta^{1\cdot2}+5\zeta^{2\cdot3}-7\zeta^{3\cdot4}+\ldots\},$$

$$1-2\zeta^{1\cdot1}+2\zeta^{2\cdot2}-2\zeta^{3\cdot3}+\ldots\ldots$$
$$=2\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{4}}\{1+\zeta^{1\cdot2}+\zeta^{2\cdot3}+\zeta^{3\cdot4}+\ldots\},$$

$$1-2\zeta^{1\cdot1}+2\zeta^{2\cdot2}-2\zeta^{3\cdot3}+\ldots\ldots$$
$$=b^{\frac{1}{2}}\{1+2\zeta^{1\cdot1}+2\zeta^{2\cdot2}+2\zeta^{3\cdot3}+\ldots\},$$

et que nous avons trouvé

$$(28)\qquad 1-3\zeta^{1\cdot2}+5\zeta^{2\cdot3}-7\zeta^{3\cdot4}+\ldots=\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}(2bc)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{4}},$$

on aura de plus

$$(29)\qquad \begin{cases} 1-2\zeta^{1\cdot1}+2\zeta^{2\cdot2}-2\zeta^{3\cdot3}+\ldots\ldots=\left(\dfrac{2b\tau}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ 1+\zeta^{1\cdot2}+\zeta^{2\cdot3}+\zeta^{3\cdot4}+\ldots\ldots=\left(\dfrac{c\tau}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{4}}, \\ 1+2\zeta^{1\cdot1}+2\zeta^{2\cdot2}+2\zeta^{3\cdot3}+\ldots\ldots=\left(\dfrac{2\tau}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Remarquons enfin, qu'en substituant à ζ sa valeur $e^{\frac{\pi\varrho}{\tau}i}$, les équations (20) se réduiront à

$$Z_x = \sin x \prod_{p=1}^{p=\infty} (1 - 2e^{2p\frac{\pi\rho}{\tau}i} \cos 2x + e^{4p\frac{\pi\rho}{\tau}i}),$$

$$\Theta_x = \Pi_p \left(1 - 2e^{\overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{\tau}i} \cos 2x + e^{\overline{4p+2}\frac{\pi\rho}{\tau}i}\right);$$

d'où

$$\frac{Z_x}{Z_y} = \frac{\sin x}{\sin y} \prod_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos 2p\frac{\pi\rho}{\tau} - \cos 2x}{\cos 2p\frac{\pi\rho}{\tau} - \cos 2y},$$

$$\frac{\Theta_x}{\Theta_y} = \overset{\infty}{\Pi_p} \frac{\cos \overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{\tau} - \cos 2x}{\cos \overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{\tau} - \cos 2y}$$

ou

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{Z_x}{Z_y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\infty} \dfrac{\sin(x + 2p\frac{\pi\rho}{2\tau}) \sin(x - 2p\frac{\pi\rho}{2\tau})}{\sin(y + 2p\frac{\pi\rho}{2\tau}) \sin(y - 2p\frac{\pi\rho}{2\tau})}, \\[2ex] \dfrac{\Theta_x}{\Theta_y} = \overset{\infty}{\Pi_p} \dfrac{\sin(x + \overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{2\tau}) \sin(x - \overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{2\tau})}{\sin(y + \overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{2\tau}) \sin(y - \overline{2p+1}\frac{\pi\rho}{2\tau})}. \end{cases}$$

De même, en substituant en outre à ω sa valeur e^{xi}, les équations (23) et (24) deviendront

$$Z_x = -\frac{1}{2i} e^{-xi} F_{e^{xi}}, \qquad \Theta_x = F_{e^{(x+\frac{\pi\rho}{2\tau})i}},$$

$$F_{e^{xi}} = -e^{2xi} F_{e^{(x+\frac{\pi\rho}{\tau})i}};$$

d'où l'on déduit les relations

$$(31)\quad \begin{cases} Z_x = \dfrac{1}{2i} e^{xi} \Theta_{x+\frac{\pi\rho}{2\tau}}, & \Theta_x = -2ie^{(x+\frac{\pi\rho}{2\tau})i} Z_{x+\frac{\pi\rho}{2\tau}}, \\[2ex] Z_{x-\frac{\pi\rho}{2\tau}} = -e^{2xi} Z_{x+\frac{\pi\rho}{2\tau}}, & \Theta_{x-\frac{\pi\rho}{2\tau}} = -e^{2xi} \Theta_{x+\frac{\pi\rho}{2\tau}}, \end{cases}$$

auxquelles on pourra joindre

$$Z_{x+\pi} = -Z_x, \qquad \Theta_{x+\pi} = \Theta_x.$$

IV.

Neue Methode zur Berechnung der Cometenbahnen.

Il est bon que les méthodes se multiplient, que chaque calculateur ait la sienne, qu'il affectionne et avec laquelle il se familiarise; les calculs lui paraitront moins fastidieux, les orbites des comètes qu'on decouvrira seront calculées de plusieurs manières, les résultats en seront d'autant plus sûrs.

(Delambre: Astronomie théorique et pratique. T. III. p 387.).

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Eine völlig directe Methode zur Berechnung der Cometenbahnen*) giebt es bekanntlich leider nicht. Alle bekannten Me-

*) Wenn man in der Astronomie von der Berechnung der Cometenbahnen spricht, so meint man damit eigentlich immer überhaupt die Bestimmung der Bahn eines nach den Kepler'schen Gesetzen sich bewegenden Weltkörpers aus einigen wenigen, nicht zu weit entfernt von einander liegenden Beobachtungen. Es kann daher unter diesem Ausdruck eben so gut auch die Bestimmung einer Planetenbahn aus einigen wenigen, nicht zu weit von einander entfernt liegenden Beobachtungen verstanden werden, wobei man dann aber natürlich die Bahn selbst als eine Ellipse betrachten muss. Denn dass man bei der Berechnung der Come-

thoden beruhen auf näherungsweisen Voraussetzungen oder gehen von näherungsweisen Annahmen aus. Selbst die schöne Methode von Olbers mit der ihr durch Gauss zu Theil gewordenen mehrfachen Verbesserungen, von der gegenwärtig in der praktischen Astronomie mit vollem Rechte allgemein Gebrauch gemacht wird, ist nur eine Näherungsmethode, und auch als solche nicht einmal direct, weil man bei ihr von einer willkührlichen Annahme ausgehen muss, und nur durch Probiren und successive Annäherungen zu dem gesuchten Resultate gelangt. Olbers geht nämlich bei seiner Methode, die bekanntlich drei Beobachtungen des Cometen zum Grunde legt, eigentlich von einem genäherten Werthe der Summe der beiden Entfernungen des Cometen von der Sonne in der ersten und dritten Beobachtung aus, und sagt, um einen solchen ersten Näherungswerth zu finden: wenn die scheinbare Entfernung eines Cometen von der Sonne 30^0 sei, so erhelle leicht, dass seine lineare Entfernung von der Sonne mindestens $\frac{1}{2}$ sei*); sei also die scheinbare Entfernung des Cometen von der Sonne nur 30^0, so könne die in Rede stehende Summe der Entfernungen des Cometen von der Sonne in der ersten und dritten Beobachtung nicht kleiner als 1 sein; auf der anderen Seite habe die Erfahrung gelehrt, dass die uns sichtbaren Cometen, sehr wenige Ausnahmen abgerechnet, innerhalb der Marsbahn, deren grosse Halbaxe $1\frac{1}{2}$ ist, seien, so dass also die Summe der Entfernungen des Cometen von der Sonne in der ersten und dritten Beobachtung fast immer kleiner als 3 sein werde, wodurch man daher die beiden Gränzen 1 und 3 für die in Rede stehende Summe der Entfernungen des Cometen von der Sonne in der ersten und dritten Beobachtung erhalte, von denen man dann zu weiteren Näherungen übergehen könne. Man sieht also, dass Olbers, um eine solche erste Näherung zu finden, selbst zu

---

tenbahn dieselbe als eine Parabel zu betrachten pflegt, ist nur eine näherungsweise Voraussetzung, deren erste glückliche Idee bekanntlich dem Geistlichen Dörfel zu Plauen im Voigtlande gebührt, der dieselbe zuerst in der eben deshalb historisch merkwürdig gewordenen Schrift: Astronomische Betrachtungen des grossen Cometen, welcher 1680 und 1681 erschienen, dessen zu Plauen angestellte Observationes, von M. G. S. D. 1681. ausgesprochen hat. Wenn daher in der vorliegenden Abhandlung zwar bloss von der Cometenbahn gesprochen wird, so soll darunter doch auch die Planetenbahn verstanden werden, insofern es sich um die Bestimmung der Bahn aus einigen wenigen, nicht zu weit von einander entfernt liegenden Beobachtungen handelt. Dass die näherungsweise Voraussetzung der parabolischen Bahn bloss der eigentlichen Cometenbahn angehört und entspricht, brauche ich hier wohl kaum noch einmal besonders zu bemerken und hervorzuheben.

*) Nämlich, wie sogleich aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung hervorgeht, mindestens der Sinus von 30^0, die Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit, oder als Halbmesser, angenommen, also mindestens $\frac{1}{2}$, da $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ ist.

Erfahrungen seine Zuflucht zu nehmen gezwungen ist, was freilich bei einem geometrischen Probleme, wie es doch das Cometenproblem seiner ganzen Natur nach durchaus eigentlich ist, einigermassen auffallen muss und von einiger Misslichkeit sich nicht wohl frei sprechen lässt, wobei ich mich aber ausdrücklich gegen den Vorwurf verwahre, als wollte ich durch diese und einige noch folgende Bemerkungen den wohl erworbenen grossen praktischen Werth der schönen Methode von **Olbers** im Geringsten schmälern, den vielmehr Niemand mehr als ich anzuerkennen bereit sein kann.

Um aber, ohne zu solchen eigentlich nur auf dem Wege der Erfahrung gewonnenen Annäherungen seine Zuflucht nehmen zu müssen, auf streng wissenschaftlichem Wege einen vorläufigen Schritt zu der Auflösung des grossen Problems thun zu können, hat man — und zwar nach meiner Meinung ganz im Geiste der strengen Geometrie — schon früh der Rechnung gewisse bloss in's Gebiet der geraden Linie und der Ebene gehörende geometrische Aufgaben zum Grunde gelegt, welche als näherungsweise richtige Ausdrücke oder Darstellungen des eigentlichen Cometenproblems angesehen werden können, und einer völlig directen und strengen Auflösung bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis und analytischen Geometrie fähig sind, was sich, wie schon erwähnt, von dem eigentlichen Cometenproblem nicht sagen lässt.

Newton hat in der **Arithmetica universalis. Probl. geometr. 56.** zu diesem Zwecke die folgende Aufgabe vorgeschlagen, die ich hier im Sinne der neueren analytischen Geometrie ausdrücken werde:

Wenn die Gleichungen von vier in *einer* Ebene liegenden geraden Linien in Bezug auf ein beliebiges (rechtwinkliges) Coordinatensystem gegeben sind: die Gleichung einer fünften geraden Linie zu finden, auf welcher die vier gegebenen geraden Linien drei Stücke abschneiden, die in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Die Beziehung dieser Aufgabe zu dem Cometenproblem ist leicht zu übersehen. Man legt vier Beobachtungen zum Grunde, die nur durch geringe Zwischenzeiten von einander getrennt sind, und betrachtet das entsprechende Stück der Cometenbahn, so wie demzufolge auch dessen Projection auf der Ebene der Erdbahn, als eine gerade Linie. Die Projectionen der vier von der Erde nach dem Cometen in den Momenten der vier Beobachtungen gezogenen Gesichtslinien auf der Ebene der Erdbahn sind durch die vier Beobachtungen des Cometen gegeben, und diese vier Projectionen werden nach dem Gesetze der Flächen und einigen ganz bekannten geometrischen Sätzen von der Projection der Cometenbahn offenbar so geschnitten, dass sich die zwischen den vier Durchschnittspunkten liegenden drei Abschnitte der Projection der Cometenbahn wie die Zwischenzeiten zwischen den vier Beobachtungen verhalten, was unmittelbar zu der obigen Aufgabe

führt; und wenn man die Projection der Cometenbahn auf der Ebene der Erdbahn kennt, ist natürlich auch die Cometenbahn selbst leicht zu bestimmen.

Die einfachste synthetische Auflösung der obigen Aufgabe ist von dem berühmten Baumeister Sir Christopher Wren gegeben worden, und findet sich z. B. in der Astronomie von David Gregory. Lib. V. Prop. 12.

Eine andere geometrische Aufgabe ist von Bouguer in Vorschlag gebracht worden. Diese Aufgabe ist folgende:

Wenn die Gleichungen dreier gerader Linien im Raume in Bezug auf ein beliebiges (rechtwinkliges) Coordinatensystem gegeben sind: die Gleichungen einer vierten geraden Linie zu finden, auf welcher die drei gegebenen geraden Linien zwei Stücke abschneiden, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Nach dem, was schon über die vorige Aufgabe bemerkt worden ist, unterliegt die Beziehung dieser neuen Aufgabe zu dem Cometenproblem keinem Zweifel, und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Bouguer hat die obige Aufgabe zuerst in der Abhandlung: De la determination de l'orbite des comètes. Mémoires de l'Académie des sciences de Paris. 1733. p. 331. angegeben und aufgelöst, und er scheint auf dieselbe in Bezug auf ihren Gebrauch bei der näherungsweisen Bestimmung der Cometenbahnen einen grossen Werth gelegt zu haben. Auch Hennert fällt über dieselbe ein sehr günstiges, jedenfalls zu günstiges, Urtheil, wenn er in den Dissertations sur la Théorie des Comètes, qui ont concouru au prix proposé par l'Académie royale des sciences et belles lettres de Prusse. A Utrecht. 1780. p. 113. von ihr sagt: „J'avoue que cette méthode est une des plus simples et des plus élégantes. Le celèbre Bouguer renferme la distance racourcie de la comète dans une seule formule qui n'est pas trop compliquée pour ces sortes de recherches. Il est vrai que sa méthode est encore fondée sur la supposition du mouvement uniforme et rectiligne dans l'espace de peu de jours. Mais malgré ce défaut commun à toutes ces méthodes connues jusqu'ici, elle l'emporteroit sur toutes les autres, si l'on savoit à vue d'oeil déterminer la position de l'orbite rectiligne de la comète reduite à l'Ecliptique*)." Nach ihrem wahren Werthe für das Cometenproblem ist aber die Bouguer'sche Aufgabe, so wie die obige Newton'sche, gewürdigt wor-

---

*) Die letztere Aeusserung Hennert's verstehe ich nicht ganz; jedenfalls kann dieselbe sich nur auf die von Bouguer gegebene Auflösung der Aufgabe, nicht auf diese letztere selbst, beziehen, denn eine mit gehöriger Strenge und Bestimmtheit durchgeführte Auflösung derselben kann einen solchen Zweifel, wie Hennert zu meinen scheint, nicht übrig lassen.

den von **Olbers** in der bekannten klassischen Schrift: **Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Weimar. 1797. (Neue, vielfach vermehrte Ausgabe von Encke. Weimar. 1847.)**, wonach mir hier nichts mehr zur Würdigung der obigen Aufgabe zu sagen übrig bleibt.

Man kann endlich auch das Cometenproblem noch auf die folgende Aufgabe zurückführen:

Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche vier gerade Linien im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, schneidet.

Andere geometrische Aufgaben als die vorhergehenden drei, welche man bisher benutzt hätte, um eine erste näherungsweise Bestimmung der Cometenbahn darauf zu gründen, sind mir nicht bekannt, wenn man nicht etwa noch die Methode von **Boscovich** anführen will, die mir aber wenigstens in geometrischer Beziehung nicht so viel Charakteristisches zu haben scheint, dass ich mich zu einer weiteren Besprechung derselben an diesem Orte verpflichtet halten müsste. Eine analytische Auflösung der dritten Aufgabe habe ich im **Archiv**. Thl. I. Nr. XXI. S. 136. gegeben, und eine andere Auflösung ward später im **Cambridge mathematical Journal** mitgetheilt. Für die erste und zweite der drei obigen Aufgaben werde ich in einem späteren Aufsatze analytische Auflösungen geben, da ich der vorliegenden Abhandlung nicht gern einen zu grossen Raum gönnen möchte. Es wird sich dann zeigen, dass es im Allgemeinen bei der ersten Aufgabe vier, bei der zweiten zwei derselben genügende gerade Linien giebt; die dritte Aufgabe lässt gleichfalls im Allgemeinen zwei Auflösungen zu.

Ueber die Methode von **Olbers** will ich mir noch die gelegentliche Bemerkung erlauben, dass sich derselben auch eine streng geometrische Fassung in Gestalt eines geometrischen Problems geben lässt, welches auf folgende Art ausgesprochen werden kann:

Wenn ein Punkt und drei gerade Linien im Raume gegeben sind, aus dem gegebenen Punkte als Brennpunkt eine Parabel zu beschreiben, welche die drei gegebenen geraden Linien schneidet, und so beschaffen ist, dass, wenn man ihre Durchschnittspunkte mit der ersten und zweiten, und mit der zweiten und dritten geraden Linie durch Sehnen verbindet, die Flächenräume der beiden von diesen Sehnen und den deren Endpunkten entsprechenden Vectoren der Parabel eingeschlossenen Dreiecke in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Gewöhnlich findet man bei der Methode von **Olbers** bemerkt,

dass durch drei vollständige*) Beobachtungen eines Cometen dessen Bahn schon mehr als bestimmt sei. Dies ist in astronomischer Rücksicht, um mich so auszudrücken, auch völlig richtig; in Bezug auf das obige geometrische Problem reichen aber drei vollständige Beobachtungen gerade hin, um die gesuchte Parabel den angegebenen Bedingungen gemäss bestimmen zu können. Weitere Erörterungen über diesen Gegenstand liegen jedoch jetzt meinem eigentlichen Zwecke in dieser Abhandlung zu fern, als dass ich denselben hier einen grösseren Raum zu widmen geneigt sein sollte. Bemerken will ich nur, dass es bei blossen näherungsweisen Auflösungen solcher Aufgaben wie die vorher zuletzt erwähnte, wenigstens mir immer etwas peinlich gewesen ist, dass man dadurch nicht alle die Auflösungen kennen lernt, welcher die Aufgabe fähig sein kann, wenigstens immer in Ungewissheit bleibt, ob es ausser der durch Näherung gefundenen Auflösung nicht vielleicht noch andere giebt. In astronomischer Beziehung hat dies nun freilich im vorliegenden Falle nicht viel zu sagen, wie Jeder gern zugeben wird, wer die schöne Methode von Olbers in ihrem innersten Wesen vollständig erkannt hat; aber in Betreff der obigen geometrischen Aufgabe möchte ich wenigstens gern alle Auflösungen, welche dieselbe zulässt, überhaupt eine vollständige völlig strenge Auflösung derselben kennen, und ich sage daher gern wie Kepler in einem anderen Falle, dass derjenige, wer mir eine solche Auflösung dieser Aufgabe giebt, mir „magnus Apollonius" sein werde.

In der vorliegenden Abhandlung will ich nun eine andere bloss dem Gebiete der geraden Linie und der Ebene angehörende Aufgabe auflösen, auf welche man eine erste genäherte Auflösung des Cometenproblems gründen kann. Ich betrachte vier vollständige Beobachtungen als gegeben, durch welche die Lage der in den Momenten der vier Beobachtungen von der Erde nach dem Cometen gezogenen vier Gesichtslinien im Raume gegeben wird, welches Coordinatensystem man auch zum Grunde legen mag. Die Sonne ist natürlich immer auch als ein gegebener Punkt zu betrachten, weil ja bekanntlich alle durch die astronomischen Tafeln oder Ephemeriden gegebenen, hier in Betracht kommenden Elemente sich auf die Sonne als einen bekannten Punkt beziehen. Die Ebene der Cometenbahn geht durch die Sonne und schneidet die in den Momenten der vier Beobachtungen von der Erde nach dem Cometen gezogenen vier Gesichtslinien in vier Punkten. Verbindet man den in Rücksicht auf die Zeitfolge, in welcher der Comet nach und nach in diese Punkte gelangt, ersten Durchschnittspunkt mit dem zweiten, den zweiten mit dem dritten, den dritten mit dem vierten durch gerade Linien, so erhält man eine in der Ebene der Cometenbahn liegende gebrochene

*) Unter einer vollständigen Beobachtung eines Cometen versteht man Länge und Breite desselben, oder wenigstens so viele beobachtete Elemente desselben, wie erforderlich sind, um seine Länge und Breite aus denselben ermitteln zu können. Natürlich muss auch die Zeit der Beobachtung gegeben sein.

Linie, die man mit desto grösserer Genauigkeit näherungsweise als die Cometenbahn selbst ansehen kann, je kleiner die Zwischenzeiten zwischen den vier Beobachtungen sind. Zieht man nun von der Sonne nach den vier Ecken dieses gebrochenen Zugs gerade Linien oder die sogenannten Vectoren des Cometen, so erhält man drei Dreiecke, deren Flächenräume sich mit desto grösserer Genauigkeit unter einander wie die entsprechenden Sectoren der Cometenbahn, d. h., nach dem Gesetze der Flächen, wie die gegebenen Zwischenzeiten zwischen den vier Beobachtungen verhalten werden, je kleiner diese Zwischenzeiten sind, und man wird also jetzt sehen, dass sich für das Cometenproblem näherungsweise, und zwar desto genauer, je kleiner die Zwischenzeiten zwischen den vier Beobachtungen sind, die folgende geometrische Aufgabe substituiren lässt:

W e n n i m R a u m e e i n P u n k t*) u n d v i e r g e r a d e L i n i e n**) g e g e b e n s i n d, d i e L a g e e i n e r E b e n e z u b e s t i m m e n, w e l c h e d u r c h d e n g e g e b e n e n P u n k t g e h t u n d d i e v i e r g e g e b e n e n g e r a d e n L i n i e n s o s c h n e i d e t, d a s s d i e F l ä c h e n r ä u m e d e r d r e i D r e i e c k e, w e l c h e m a n e r h ä l t, w e n n m a n d i e v i e r D u r c h s c h n i t t s p u n k t e d e r g e s u c h t e n E b e n e m i t d e n v i e r g e g e b e n e n L i n i e n d u r c h g e r a d e L i n i e n v e r b i n d e t***), u n d n a c h d i e s e n v i e r D u r c h s c h n i t t s p u n k t e n v o n d e m g e g e b e n e n P u n k t e g e r a d e L i n i e n z i e h t, s i c h w i e d r e i g e g e b e n e Z a h l e n****) z u e i n a n d e r v e r h a l t e n.

Man betrachtet bei Anwendung dieser Aufgabe einen Theil der Cometenbahn näherungsweise als eine gebrochene Linie, und schliesst sich dadurch gewissermassen einem Verfahren an, welches in der Geometrie bei der Betrachtung krummer Linien bekanntlich auch sonst ganz gewöhnlich ist. Ferner ist es hierbei ganz gleichgültig, als was für einen Kegelschnitt man die Cometenbahn bei der auf die durch obige Aufgabe gewonnene erste Annäherung gegründeten ferneren Annäherung betrachten will; man kann bei der ferneren Annäherung beliebig eine parabolische, oder eine elliptische, oder eine hyperbolische Bahn zum Grunde legen. Die obige Aufgabe gestattet eine, wenn auch nicht gerade sehr leichte, aber doch völlig directe Auflösung, und führt auf eine quadratische Gleichung, lässt also im Allgemeinen nur zwei Auflösungen zu. Dies Letztere würde ich aber immer noch für einen Fehler der Methode halten, weil dann immer noch eine

---

*) Die Sonne.

**) Die in den Momenten der vier Beobachtungen von der Erde nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien.

***) Dies muss in einer bestimmten Reihenfolge geschehen, und hier zwar in der Folge, wie in Rücksicht auf die Zeitfolge der Comet nach und nach in die vier gegebenen geraden Linien gelangt.

****) Wie die drei Zwischenzeiten zwischen den vier Beobachtungen, welche durch die Beobachtungen selbst gegeben werden.

Unterscheidung zwischen den beiden möglichen Auflösungen erforderlich sein wird, die zuweilen nicht ganz leicht sein kann. Wenn man sich jedoch noch eine weitere kleine nur näherungsweise richtige Voraussetzung gestattet, die späterhin näher bezeichnet werden wird, so fällt die eine der beiden Auflösungen immer von selbst ganz heraus, indem sich dieselbe sogleich als nicht dem beobachteten Cometen angehörend erweiset, so dass für denselben dann nur noch eine im Allgemeinen völlig bestimmte Ebene, und also nicht die geringste Zweideutigkeit mehr übrig bleibt, was ich, im Gegensatz zu dem vorher hervorgehobenen Fehler, für einen Vorzug der im Folgenden entwickelten Näherungsmethode halte. Hat man einmal auf diese Weise die Zweideutigkeit gehoben, so ist es natürlich immer auch leicht, zwischen den beiden Auflösungen, welche die vorher zuerst erwähnte Näherung lieferte, sicher zu entscheiden. Auch lässt sich die letztere vorher erwähnte Näherung auf den Ausdruck eines an sich interessanten geometrischen Problems bringen, bei welchem, wie sich später zeigen wird, man die Verhältnisse der drei oben näher bezeichneten Dreiecke **selbst** eigentlich gar nicht mehr zu kennen braucht. Und sollte auch selbst die obige geometrische Aufgabe in astronomischer Beziehung einen nicht viel grösseren Werth haben als die schon früher in Vorschlag gebrachten, oben erwähnten geometrischen Probleme, so halte ich doch die geometrische Aufgabe, um die es sich jetzt hier zunächst handelt, an sich, namentlich in geometrischer Beziehung, für interessant genug, um in dieser nicht vorzugsweise oder ausschliesslich der Astronomie gewidmeten Zeitschrift eine Stelle zu verdienen, da ich insbesondere mich nicht erinnere, dieselbe schon früher aufgestellt, viel weniger aufgelöst, irgendwo gefunden zu haben. Ich habe die Auflösung derselben zu verschiedenen Zeiten öfter auf verschiedene Arten versucht, bis ich zuletzt bei der mir am zweckmässigsten scheinenden Auflösung stehen geblieben bin, die ich im Folgenden entwickeln werde. Auch werde ich die Anwendung dieser Aufgabe bei der Auflösung des Cometenproblems zeigen und an einem Beispiele erläutern.

---

§. 1.

Wir wollen uns eine beliebige gerade Linie im Raume denken, deren Gleichungen in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

sein mögen. Beschreiben wir nun aus dem Anfange der Coordinaten als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r eine Kugelfläche und bezeichnen die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Kugel-

fläche mit der durch die obigen Gleichungen charakterisirten geraden Linie im Raume der Kürze wegen durch x, y, z selbst; so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die drei folgenden Gleichungen:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma};$$

oder, wie man diese Gleichungen auch ausdrücken kann:

$$\{(x-a)+a\}^2+\{(y-b)+b\}^2+\{(z-c)+c\}^2=r^2,$$

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Aus dem letzteren Systeme zweier Gleichungen ergiebt sich:

$$y-b=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-a),\quad z-c=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-a);$$

also durch Substitution in die erste Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\{a+(x-a)\}^2\\ +\{b+\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-a)\}^2\\ +\{c+\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-a)\}^2\end{array}\right\}=r^2,$$

und folglich, mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

nach gehöriger Entwickelung:

$$a^2+b^2+c^2+2(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)\frac{x-a}{\cos\alpha}+\left(\frac{x-a}{\cos\alpha}\right)^2=r^2$$

oder

$$\left(\frac{x-a}{\cos\alpha}\right)^2+2(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)\frac{x-a}{\cos\alpha}=r^2-(a^2+b^2+c^2).$$

Löst man diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, und setzt der Kürze wegen

$$A=a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma,$$

$$B^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2;$$

so erhält man:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=-A\pm\sqrt{r^2-B^2}.$$

Also ist nach dem Obigen überhaupt:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}=-A\pm\sqrt{r^2-B^2},$$

oder, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$x-a=-(A\mp\sqrt{r^2-B^2})\cos\alpha,$$

$$y-b=-(A\mp\sqrt{r^2-B^2})\cos\beta,$$

$$z-c=-(A\mp\sqrt{r^2-B^2})\cos\gamma;$$

oder

$$x=a-(A\mp\sqrt{r^2-B^2})\cos\alpha,$$

$$y=b-(A\mp\sqrt{r^2-B^2})\cos\beta,$$

$$z=c-(A\mp\sqrt{r^2-B^2})\cos\gamma.$$

Die Grösse

$$B^2=a^2+b^2+c^2-(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2$$

kann auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}B^2= &\ a^2\sin\alpha^2+b^2\sin\beta^2+c^2\sin\gamma^2\\ &-2ab\cos\alpha\cos\beta-2bc\cos\beta\cos\gamma-2ca\cos\gamma\cos\alpha,\end{aligned}$$

also, wegen der Gleichung

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

auch auf folgende Art:

$$\begin{aligned}B^2= &\ a^2(\cos\beta^2+\cos\gamma^2)+b^2(\cos\gamma^2+\cos\alpha^2)+c^2(\cos\alpha^2+\cos\beta^2)\\ &-2ab\cos\alpha\cos\beta-2bc\cos\beta\cos\gamma-2ca\cos\gamma\cos\alpha,\end{aligned}$$

d. i., wie hieraus sogleich erhellet, auf folgende Art:

$$\begin{aligned}B^2= &\ (a\cos\beta-b\cos\alpha)^2\\ &+(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2\\ &+(c\cos\alpha-a\cos\gamma)^2,\end{aligned}$$

woraus zugleich erhellet, dass B^2 immer eine positive Grösse, und daher B stets reell ist.

Möglich ist unsere Aufgabe nur dann, wenn

$$r^2 \overline{\overline{>}} B^2,$$

d. h., wie leicht erhellen wird, wenn der Halbmesser der zu beschreibenden Kugelfläche nicht kleiner als die Entfernung des Anfangs der Coordinaten von der gegebenen geraden Linie im Raume ist, was sich auch von selbst versteht.

§. 2

Wir wollen uns nun drei gerade Linien im Raume denken, deren Gleichungen in Bezug auf das im vorhergehenden Paragraphen angenommene rechtwinklige Coordinatensystem der xyz

$$\frac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-c_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-a_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-b_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-c_2}{\cos\gamma_2},$$

$$\frac{x-a_3}{\cos\alpha_3}=\frac{y-b_3}{\cos\beta_3}=\frac{z-c_3}{\cos\gamma_3}$$

sein mögen. Denken wir uns nun aus dem Anfangspunkte der Coordinaten als gemeinschaftlichen Mittelpunkt mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3 drei Kugelflächen beschrieben, welche die drei vorhergehenden geraden Linien im Raume respective in den Punkten $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ schneiden; so haben wir, wenn

$$A_1=a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1,$$

$$A_2=a_2\cos\alpha_2+b_2\cos\beta_2+c_2\cos\gamma_2,$$

$$A_3=a_3\cos\alpha_3+b_3\cos\beta_3+c_3\cos\gamma_3$$

und

$$\begin{aligned}B_1^2= & a_1^2+b_1^2+c_1^2-(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1)^2\\ = & (a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)^2\\ & +(b_1\cos\gamma_1-c_1\cos\beta_1)^2\\ & +(c_1\cos\alpha_1-a_1\cos\gamma_1)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2^2= & a_2^2+b_2^2+c_2^2-(a_2\cos\alpha_2+b_2\cos\beta_2+c_2\cos\gamma_2)^2\\ = & (a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)^2\\ & +(b_2\cos\gamma_2-c_2\cos\beta_2)^2\\ & +(c_2\cos\alpha_2-a_2\cos\gamma_2)^2,\end{aligned}$$

$$B_3^2 = a_3^2+b_3^2+c_3^2-(a_3\cos\alpha_3+b_3\cos\beta_3+c_3\cos\gamma_3)^2$$
$$= (a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)^2$$
$$+(b_3\cos\gamma_3-c_3\cos\beta_3)^2$$
$$+(c_3\cos\alpha_3-a_3\cos\gamma_3)^2$$

gesetzt wird, nach dem vorhergehenden Paragraphen die folgenden Gleichungen, in denen, was wohl zu beachten ist, eine Beziehung zwischen den oberen und unteren Zeichen nicht Statt findet:

$$\frac{x_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y_1-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z_1-c_1}{\cos\gamma_1}=-A_1\pm\sqrt{r_1^2-B_1^2},$$

$$\frac{x_2-a_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y_2-b_2}{\cos\beta_2}=\frac{z_2-c_2}{\cos\gamma_2}=-A_2\pm\sqrt{r_2^2-B_2^2},$$

$$\frac{x_3-a_3}{\cos\alpha_3}=\frac{y_3-b_3}{\cos\beta_3}=\frac{z_3-c_3}{\cos\gamma_3}=-A_3\pm\sqrt{r_3^2-B_3^2}.$$

Um in der Folge nicht verleitet zu werden, auch in diesen Gleichungen, wie sonst in ähnlichen Fällen durchgängig gewöhnlich ist, eine Beziehung zwischen den oberen und unteren Zeichen vorauszusetzen, wollen wir dieselben, indem μ_1, μ_2, μ_3 gewisse gerade oder ungerade ganze Zahlen bezeichnen, von jetzt an lieber auf folgende Art schreiben:

$$\frac{x_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y_1-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z_1-c_1}{\cos\gamma_1}=-A_1+(-1)^{\mu_1}\sqrt{r_1^2-B_1^2},$$

$$\frac{x_2-a_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y_2-b_2}{\cos\beta_2}=\frac{z_2-c_2}{\cos\gamma_2}=-A_2+(-1)^{\mu_2}\sqrt{r_2^2-B_2^2},$$

$$\frac{x_3-a_3}{\cos\alpha_3}=\frac{y_3-b_3}{\cos\beta_3}=\frac{z_3-c_3}{\cos\gamma_3}=-A_3+(-1)^{\mu_3}\sqrt{r_3^2-B_3^2};$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$u_1=A_1-(-1)^{\mu_1}\sqrt{r_1^2-B_1^2},$$

$$u_2=A_2-(-1)^{\mu_2}\sqrt{r_2^2-B_2^2},$$

$$u_3=A_3-(-1)^{\mu_3}\sqrt{r_3^2-B_3^2}$$

gesetzt wird, auf folgende Art:

$$\frac{x_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y_1-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{z_1-c_1}{\cos\gamma_1}=-u_1,$$

$$\frac{x_2-a_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y_2-b_2}{\cos\beta_2}=\frac{z_2-c_2}{\cos\gamma_2}=-u_2,$$

$$\frac{x_3-a_3}{\cos\alpha_3}=\frac{y_3-b_3}{\cos\beta_3}=\frac{z_3-c_3}{\cos\gamma_3}=-u_3.$$

diesen Gleichungen ergeben sich für die Coordinaten

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3$$

enden Ausdrücke:

$$x_1=a_1-u_1\cos\alpha_1,$$

$$y_1=b_1-u_1\cos\beta_1,$$

$$z_1=c_1-u_1\cos\gamma_1;$$

$$x_2=a_2-u_2\cos\alpha_2,$$

$$y_2=b_2-u_2\cos\beta_2,$$

$$z_2=c_2-u_2\cos\gamma_2;$$

$$x_3=a_3-u_3\cos\alpha_3,$$

$$y_3=b_3-u_3\cos\beta_3,$$

$$z_3=c_3-u_3\cos\gamma_3.$$

en nun die drei Punkte

$$(x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2),\quad (x_3y_3z_3)$$

ı Anfangspunkte der Coordinaten in einer und derselben iegen, so erfordert dies nach den Principien der analyti- Geometrie bekanntlich die Erfüllung der folgenden Bedin- eichung:

$$x_2y_3-x_3y_2)z_1+(x_3y_1-x_1y_3)z_2+(x_1y_2-x_2y_1)z_3=0.$$

wir aber, was offenbar verstattet ist,

$$c_1=0,\quad c_2=0,\quad c_3=0;$$

$$(a_1b_1),\quad (a_2b_2),\quad (a_3b_3)$$

chschnittspunkte der drei gegebenen geraden Linien im mit der Ebene der xy sind*); so wird die obige Bedin- eichung nach leichter Rechnung:

Der Fall, dass die eine oder die andere dieser drei Linien der

$$0=(a_2b_3-a_3b_2)\cos\gamma_1 . u_1$$
$$+(a_3b_1-a_1b_3)\cos\gamma_2 . u_2$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)\cos\gamma_3 . u_3$$
$$-\left\{\begin{matrix} a_3(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ -b_3(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\alpha_2\cos\gamma_1)\end{matrix}\right\} u_1u_2$$
$$-\left\{\begin{matrix} a_1(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2) \\ -b_1(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\alpha_3\cos\gamma_2)\end{matrix}\right\} u_2u_3$$
$$-\left\{\begin{matrix} a_2(\cos\beta_3\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_3) \\ -b_2(\cos\alpha_3\cos\gamma_1-\cos\alpha_1\cos\gamma_3)\end{matrix}\right\} u_3u_1$$
$$+\left\{\begin{matrix} (\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)\cos\gamma_1 \\ +(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)\cos\gamma_2 \\ +(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\cos\gamma_3\end{matrix}\right\} u_1u_2u_3.$$

Nehmen wir nun an, dass die drei Punkte

$$(x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2),\quad (x_3y_3z_3)$$

in der durch sie und den Anfang der Coordinaten gelegten I eine solche Lage haben, dass man sich, wenn man von de fange der Coordinaten durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ hindurch zu Punkte $(x_2y_2z_2)$, und wenn man von dem Anfange der Coo ten durch den Punkt $(x_2y_2z_2)$ hindurch zu dem Punkte $(x$ übergeht, in beiden Fällen nach derselben Richtung hin be muss; so sind, wenn die Flächenräume der zwischen den Pu

$$(000),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2)$$

und zwischen den Punkten

$$(000),\quad (x_2y_2z_2),\quad (x_3y_3z_3)$$

liegenden Dreiecke respective durch $\Delta_{1,2}$ und $\Delta_{2,3}$ beze werden, nach den Principien der analytischen Geometrie di chenräume der Projectionen dieser Dreiecke auf der Eben xy mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf ei respective

$$\pm\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) \text{ und } \pm\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2),$$

Ebene der xy parallel wäre, kann wenigstens bei dem Cometenpr das wir hier vorzugsweise im Auge haben, nicht vorkommen braucht daher hier nicht besonders betrachtet zu werden.

und es ist also nach einem bekannten Satze von den Projectionen unter der gemachten Voraussetzung in völliger Allgemeinheit:

$$\frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{2,3}}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2y_3-x_3y_2}.$$

Sollen nun die drei gegebenen geraden Linien im Raume von der durch den Anfang der Coordinaten gelegten Ebene in den Punkten

$$(x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2),\quad (x_3y_3z_3)$$

so geschnitten werden, dass die beiden Dreiecke $\Delta_{1,2}$ und $\Delta_{2,3}$ ein gewisses in Zahlen gegebenes Verhältniss $\tau_{1,2}:\tau_{2,3}$ zu einander haben, so dass nämlich

$$\Delta_{1,2}:\Delta_{2,3}=\tau_{1,2}:\tau_{2,3} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{2,3}}=\frac{\tau_{1,2}}{\tau_{2,3}}$$

ist, so muss nach dem Obigen

$$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2y_3-x_3y_2}=\frac{\tau_{1,2}}{\tau_{2,3}}$$

sein, welches die Gleichung

$$\tau_{1,2}(x_2y_3-x_3y_2)-\tau_{2,3}(x_1y_2-x_2y_1)=0,$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$x_1=a_1-u_1\cos\alpha_1,\quad x_2=a_2-u_2\cos\alpha_2,\quad x_3=a_3-u_3\cos\alpha_3;$$

$$y_1=b_1-u_1\cos\beta_1,\quad y_2=b_2-u_2\cos\beta_2,\quad y_3=b_3-u_3\cos\beta_3$$

ist, nach gehöriger Entwickelung die Gleichung

$$\begin{aligned}
0= &\ \tau_{1,2}(a_2b_3-a_3b_2)-\tau_{2,3}(a_1b_2-a_2b_1)\\
&-\tau_{2,3}(a_2\cos\beta_1-b_2\cos\alpha_1)u_1\\
&+\{\tau_{1,2}(a_3\cos\beta_2-b_3\cos\alpha_2)+\tau_{2,3}(a_1\cos\beta_2-b_1\cos\alpha_2)\}u_2\\
&-\tau_{1,2}(a_2\cos\beta_3-b_2\cos\alpha_3)u_3\\
&-\tau_{2,3}(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)u_1u_2\\
&+\tau_{1,2}(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)u_2u_3
\end{aligned}$$

giebt.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}&=\tau_{1,2}(a_2b_3-a_3b_2)-\tau_{2,3}(a_1b_2-a_2b_1),\\
\mathfrak{B}&=-\tau_{2,3}(a_2\cos\beta_1-b_2\cos\alpha_1),\\
\mathfrak{C}&=\tau_{1,2}(a_3\cos\beta_2-b_3\cos\alpha_2)+\tau_{2,3}(a_1\cos\beta_2-b_1\cos\alpha_2),\\
\mathfrak{D}&=-\tau_{1,2}(a_2\cos\beta_3-b_2\cos\alpha_3),
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{E} = -\tau_{2,3}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1),$$

$$\mathfrak{F} = \quad \tau_{1,2}(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2)$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\cos\gamma_1,$$

$$\mathfrak{B}_1 = (a_3 b_1 - a_1 b_3)\cos\gamma_2,$$

$$\mathfrak{C}_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\cos\gamma_3;$$

$$\mathfrak{D}_1 = -\left\{\begin{matrix} a_3(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ -b_3(\cos\alpha_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_1) \end{matrix}\right\},$$

$$\mathfrak{E}_1 = -\left\{\begin{matrix} a_1(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2) \\ -b_1(\cos\alpha_2\cos\gamma_3 - \cos\alpha_3\cos\gamma_2) \end{matrix}\right\},$$

$$\mathfrak{F}_1 = -\left\{\begin{matrix} a_2(\cos\beta_3\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_3) \\ -b_2(\cos\alpha_3\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma_3) \end{matrix}\right\};$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1 = \; & (\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2)\cos\gamma_1 \\ & + (\cos\alpha_3\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_3)\cos\gamma_2 \\ & + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)\cos\gamma_3; \end{aligned}$$

so haben wir zwischen den drei Grössen u_1, u_2, u_3 die zwe
genden Gleichungen:

$$0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}u_1 + \mathfrak{C}u_2 + \mathfrak{D}u_3 + \mathfrak{E}u_1u_2 + \mathfrak{F}u_2u_3,$$

$$0 = \mathfrak{A}_1u_1 + \mathfrak{B}_1u_2 + \mathfrak{C}_1u_3 + \mathfrak{D}_1u_1u_2 + \mathfrak{E}_1u_2u_3 + \mathfrak{F}_1u_3u_1 + \mathfrak{G}_1u_1$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt

$$u_2 = -\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}u_1 + \mathfrak{D}u_3}{\mathfrak{C} + \mathfrak{E}u_1 + \mathfrak{F}u_3},$$

$$u_3 = -\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}u_1 + \mathfrak{C}u_2 + \mathfrak{E}u_1u_2}{\mathfrak{D} + \mathfrak{F}u_2};$$

und wenn man nun den vorstehenden Ausdruck von u_2 i
zweite der beiden obigen Gleichungen zwischen u_1, u_2, u_3
führt, so wird dieselbe:

$$\begin{aligned}0=&-\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1+(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1-\mathfrak{A}\mathfrak{D}_1)u_1\\&-(\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1-\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1+\mathfrak{A}\mathfrak{E}_1)u_3\\&+(\mathfrak{E}\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}\mathfrak{D}_1)u_1u_1\\&+(\mathfrak{F}\mathfrak{C}_1-\mathfrak{D}\mathfrak{E}_1)u_3u_3\\&+(\mathfrak{F}\mathfrak{A}_1+\mathfrak{E}\mathfrak{C}_1-\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1-\mathfrak{B}\mathfrak{E}_1+\mathfrak{C}\mathfrak{F}_1-\mathfrak{A}\mathfrak{G}_1)u_1u_3\\&+(\mathfrak{E}\mathfrak{F}_1-\mathfrak{B}\mathfrak{G}_1)u_1u_1u_3\\&+(\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1-\mathfrak{D}\mathfrak{G}_1)u_1u_3u_3.\end{aligned}$$

Führt man aber in diese Gleichung für die Grössen

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F};$$

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{G}_1$$

ihre aus dem Obigen bekannten Ausdrücke ein, und setzt der Kürze wegen:

$$F=a_1b_3-a_3b_1,$$

$$G=\{\tau_{1,2}(a_2b_3-a_3b_2)-\tau_{2,3}(a_1b_2-a_2b_1)\}\cos\gamma_2;$$

$$H=a_1\cos\beta_3-b_1\cos\alpha_3,$$

$$H_1=a_3\cos\beta_1-b_3\cos\alpha_1;$$

$$J=\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_1;$$

$$K_1=a_2(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)-b_2(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\alpha_2\cos\gamma_1),$$

$$K=a_2(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2)-b_2(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\alpha_3\cos\gamma_2);$$

so erhält man nach einer zwar weitläufigen, sonst aber durchaus keiner besonderen Schwierigkeit unterliegenden Rechnung für die obige Gleichung zwischen u_1, u_3 den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}0=&\ FG\\&+(GH_1-\tau_{2,3}FK)u_1\\&-(GH-\tau_{1,2}FK_1)u_3\\&-\tau_{2,3}H_1Ku_1u_1\\&-\tau_{1,2}HK_1u_3u_3\\&+(GJ+\tau_{1,2}H_1K_1+\tau_{2,3}HK)u_1u_3\\&-\tau_{2,3}JKu_1u_1u_3\\&+\tau_{1,2}JK_1u_1u_3u_3,\end{aligned}$$

d. i. den Ausdruck:

$$0 = G(F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3) \\ - \tau_{2,3} K u_1 (F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3) \\ + \tau_{1,2} K_1 u_3 (F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3),$$

also den Ausdruck:

$$0 = (G - \tau_{2,3} K u_1 + \tau_{1,2} K_1 u_3)(F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3),$$

was die beiden Gleichungen

$$G - \tau_{2,3} K u_1 + \tau_{1,2} K_1 u_3 = 0$$

und

$$F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3 = 0$$

giebt, die wir nun in den zwei folgenden Paragraphen einer genaueren Discussion unterwerfen wollen.

§. 3.

Aus der Gleichung

$$F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3 = 0,$$

welche wir zuerst betrachten wollen, folgt

$$u_3 = \frac{F + H_1 u_1}{H - J u_1},$$

also, wenn man für F, H, H_1, J ihre aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Werthe einführt:

$$u_3 = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1 + (a_3 \cos\beta_1 - b_3 \cos\alpha_1) u_1}{a_1 \cos\beta_3 - b_1 \cos\alpha_3 - (\cos\alpha_1 \cos\beta_3 - \cos\alpha_3 \cos\beta_1) u_1}$$

oder

$$u_3 = \frac{b_3(a_1 - u_1 \cos\alpha_1) - a_3(b_1 - u_1 \cos\beta_1)}{\cos\beta_3(a_1 - u_1 \cos\alpha_1) - \cos\alpha_3(b_1 - u_1 \cos\beta_1)},$$

d. i.

$$u_3 = \frac{b_3 x_1 - a_3 y_1}{x_1 \cos\beta_3 - y_1 \cos\alpha_3};$$

folglich

$$x_3 = a_3 - u_3 \cos\alpha_3 = \frac{(a_3 \cos\beta_3 - b_3 \cos\alpha_3) x_1}{x_1 \cos\beta_3 - y_1 \cos\alpha_3},$$

$$y_3 = b_3 - u_3 \cos\beta_3 = \frac{(a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)y_1}{x_1\cos\beta_3 - y_1\cos\alpha_3}.$$

Also ist

$$x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0,$$

woraus sich ergiebt, dass die Projection des zwischen den Punkten

$$(000), \quad (x_1 y_1 z_1), \quad (x_3 y_3 z_3)$$

liegenden Dreiecks auf der Ebene der xy verschwindet, und dass also, wenn die Gleichung

$$F + H_1 u_1 - H u_3 + J u_1 u_3 = 0$$

erfüllt ist, die Ebene, welche die drei gegebenen geraden Linien im Raume unter den aus dem Vorhergehenden bekannten Bedingungen schneidet, im Allgemeinen auf der Ebene der xy senkrecht stehen muss. Dass aber die Behandlung dieses speciellen Falls nicht unter der obigen allgemeinen Betrachtung enthalten sein kann, und daher dieser specielle Fall gewissermassen als ein Ausnahmefall zu betrachten ist, fällt leicht in die Augen, wenn man nur überlegt, dass wir bei unseren obigen allgemeinen Betrachtungen das Verhältniss der Dreiecke $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{2,3}$ dem Verhältnisse ihrer Projectionen auf der Ebene der xy gleich gesetzt haben, welches Verhältniss aber in dem Falle, wenn die durch den Anfang der Coordinaten gelegte Ebene, von der die drei gegebenen geraden Linien im Raume auf die angegebene Weise geschnitten werden, auf der Ebene der xy senkrecht steht, weil in diesem Falle die Projectionen der Dreiecke $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{2,3}$ verschwinden, ein ganz unbestimmtes ist. Es stellt sich also von selbst die Nothwendigkeit heraus, den Fall, wenn die drei gegebenen geraden Linien im Raume von einer durch den Anfang der Coordinaten gelegten, auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene so geschnitten werden sollen, dass

$$\frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{2,3}} = \frac{r_{1,2}}{r_{2,3}}$$

ist, einer besonderen Betrachtung zu unterwerfen, was wir daher jetzt zunächst thun wollen.

Die Gleichung der durch den Anfang der Coordinaten gelegenen, auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene ist, wenn φ den 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnet, den der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der Durchschnittslinie dieser Ebene mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, im Allgemeinen

$$y = x \tan\!g\varphi,$$

so dass wir also, wenn wir alle früheren Bezeichnungen auch

jetzt beibehalten, nach den Bedingungen der Aufgabe zuvörd die drei folgenden Gleichungen haben:

$$b_1-u_1\cos\beta_1=(a_1-u_1\cos\alpha_1)\tang\varphi,$$

$$b_2-u_2\cos\beta_2=(a_2-u_2\cos\alpha_2)\tang\varphi,$$

$$b_3-u_3\cos\beta_3=(a_3-u_3\cos\alpha_3)\tang\varphi.$$

Ferner ist aber nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_{2,3}}=\frac{x_1z_2-x_2z_1}{x_2z_3-x_3z_2}=\frac{\tau_{1,2}}{\tau_{2,3}},$$

also

$$\frac{(a_1-u_1\cos\alpha_1)u_2\cos\gamma_2-(a_2-u_2\cos\alpha_2)u_1\cos\gamma_1}{(a_2-u_2\cos\alpha_2)u_3\cos\gamma_3-(a_3-u_3\cos\alpha_3)u_2\cos\gamma_2}=\frac{\tau_{1,2}}{\tau_{2,3}},$$

und wir haben daher zwischen den vier Grössen u_1, u_2, u_3 die vier folgenden Gleichungen:

$$b_1-u_1\cos\beta_1=(a_1-u_1\cos\alpha_1)\tang\varphi,$$
$$b_2-u_2\cos\beta_2=(a_2-u_2\cos\alpha_2)\tang\varphi,$$

$$b_3-u_3\cos\beta_3=(a_3-u_3\cos\alpha_3)\tang\varphi;$$

$$\tau_{1,2}\{(a_2-u_2\cos\alpha_2)u_3\cos\gamma_3-(a_3-u_3\cos\alpha_3)u_2\cos\gamma_2\}$$
$$=\tau_{2,3}\{(a_1-u_1\cos\alpha_1)u_2\cos\gamma_2-(a_2-u_2\cos\alpha_2)u_1\cos\gamma_1\};$$

welche zu der Bestimmung der vier in Rede stehenden unbeka ten Grössen gerade hinreichen.

Durch Elimination von $\tang\varphi$ folgt aus den drei ersten G chungen auf der Stelle:

$$\frac{a_1-u_1\cos\alpha_1}{b_1-u_1\cos\beta_1}=\frac{a_2-u_2\cos\alpha_2}{b_2-u_2\cos\beta_2}=\frac{a_3-u_3\cos\alpha_3}{b_3-u_3\cos\beta_3},$$

also

$$u_2=\frac{a_1b_2-a_2b_1+(a_2\cos\beta_1-b_2\cos\alpha_1)u_1}{a_1\cos\beta_2-b_1\cos\alpha_2-(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)u_1}$$
$$=\frac{b_2(a_1-u_1\cos\alpha_1)-a_2(b_1-u_1\cos\beta_1)}{\cos\beta_2(a_1-u_1\cos\alpha_1)-\cos\alpha_2(b_1-u_1\cos\beta_1)},$$

$$u_3=\frac{a_1b_3-a_3b_1+(a_3\cos\beta_1-b_3\cos\alpha_1)u_1}{a_1\cos\beta_3-b_1\cos\alpha_3-(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_1)u_1}$$

$$=\frac{b_3(a_1-u_1\cos\alpha_1)-a_3(b_1-u_1\cos\beta_1)}{\cos\beta_3(a_1-u_1\cos\alpha_1)-\cos\alpha_3(b_1-u_1\cos\beta_1)};$$

und hieraus, wie man leicht findet:

$$a_2-u_2\cos\alpha_2=\frac{(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)(a_1-u_1\cos\alpha_1)}{a_1\cos\beta_2-b_1\cos\alpha_2-(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)u_1}$$

$$=\frac{(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)(a_1-u_1\cos\alpha_1)}{\cos\beta_2(a_1-u_1\cos\alpha_1)-\cos\alpha_2(b_1-u_1\cos\beta_1)},$$

$$a_3-u_3\cos\alpha_3=\frac{(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)(a_1-u_1\cos\alpha_1)}{a_1\cos\beta_3-b_1\cos\alpha_3-(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_1)u_1}$$

$$=\frac{(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)(a_1-u_1\cos\alpha_1)}{\cos\beta_3(a_1-u_1\cos\alpha_1)-\cos\alpha_3(b_1-u_1\cos\beta_1)}.$$

Nach gehöriger Substitution in die letzte der vier obigen Gleichungen ergiebt sich mittelst einiger leichten Reductionen die Gleichung

$$\tau_{1,2}.\frac{(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_3\{b_3(a_1-u_1\cos\alpha_1)-a_3(b_1-u_1\cos\beta_1)\}-(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)\cos\gamma_2\{b_2(a_1-u_1\cos\alpha_1)-a_2(b_1-u_1\cos\beta_1)\}}{\cos\beta_3(a_1-u_1\cos\alpha_1)-\cos\alpha_3(b_1-u_1\cos\beta_1)}$$

$$=\tau_{2,3}\{(b_2(a_1-u_1\cos\alpha_1)-a_2(b_1-u_1\cos\beta_1))\cos\gamma_2-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)u_1\cos\gamma_1\}.$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$u=\operatorname{tang}\varphi=\frac{b_1-u_1\cos\beta_1}{a_1-u_1\cos\alpha_1}=\frac{b_2-u_2\cos\beta_2}{a_2-u_2\cos\alpha_2}=\frac{b_3-u_3\cos\beta_3}{a_3-u_3\cos\alpha_3},$$

also

$$u_1=\frac{b_1-a_1u}{\cos\beta_1-\cos\alpha_1.u},\quad u_2=\frac{b_2-a_2u}{\cos\beta_2-\cos\alpha_2.u},\quad u_3=\frac{b_3-a_3u}{\cos\beta_3-\cos\alpha_3.u};$$

so ist

$$a_1-u_1\cos\alpha_1=\frac{a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1}{\cos\beta_1-\cos\alpha_1.u},\quad b_1-u_1\cos\beta_1=\frac{a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1}{\cos\beta_1-\cos\alpha_1.u}u;$$

und die obige Gleichung wird folglich:

$$\tau_{1,2}\cdot\frac{(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_3(b_3-a_3u)-(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)\cos\gamma_2(b_2-a_2u)}{\cos\beta_3-\cos\alpha_3.u}$$
$$=\tau_{2,3}\cdot\frac{(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)\cos\gamma_2(b_2-a_2u)-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_1(b_1-a_1u)}{\cos\beta_1-\cos\alpha_1.u},$$

oder

$$\tau_{1,2}(\cos\beta_1-\cos\alpha_1.u)\{(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_3(b_3-a_3u)-(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)\cos\gamma_2(b_2-a_2u)\}$$
$$=\tau_{2,3}(\cos\beta_3-\cos\alpha_3.u)\{(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)\cos\gamma_2(b_2-a_2u)-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_1(b_1-a_1u)\},$$

oder

$$\tau_{1,2}(\cos\beta_1-\cos\alpha_1.u)\{(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)b_3\cos\gamma_3-(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)b_2\cos\gamma_2-((a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)a_3\cos\gamma_3-(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)a_2\cos$$
$$=\tau_{2,3}(\cos\beta_3-\cos\alpha_3.u)\{(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)b_2\cos\gamma_2-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)b_1\cos\gamma_1-((a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)a_2\cos\gamma_2-(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)a_1\cos$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$
\begin{aligned}
L = {} & \tau_{1,2}\cos\beta_1 \{(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) b_3\cos\gamma_3 - (a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3) b_2\cos\gamma_2\} \\
& - \tau_{2,3}\cos\beta_3 \{(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1) b_2\cos\gamma_2 - (a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) b_1\cos\gamma_1\} \\
= {} & \tau_{2,3}(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) b_1\cos\beta_3\cos\gamma_1 \\
& - \{\tau_{1,2}(a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)\cos\beta_1 + \tau_{2,3}(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1)\cos\beta_3\} b_2\cos\gamma_2 \\
& + \tau_{1,2}(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) b_3\cos\beta_1\cos\gamma_3 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M = {} & -\tau_{1,2} \left\{ \begin{array}{l} (a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)(a_3\cos\beta_1 + b_3\cos\alpha_1)\cos\gamma_3 \\ -(a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)(a_2\cos\beta_1 + b_2\cos\alpha_1)\cos\gamma_2 \end{array} \right\} \\
& + \tau_{2,3} \left\{ \begin{array}{l} (a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1)(a_2\cos\beta_3 + b_2\cos\alpha_3)\cos\gamma_2 \\ -(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)(a_1\cos\beta_3 + b_1\cos\alpha_3)\cos\gamma_1 \end{array} \right\} \\
= {} & -\tau_{2,3}(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)(a_1\cos\beta_3 + b_1\cos\alpha_3)\cos\gamma_1 \\
& + \left\{ \begin{array}{l} \tau_{1,2}(a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)(a_2\cos\beta_1 + b_2\cos\alpha_1) \\ + \tau_{2,3}(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1)(a_2\cos\beta_3 + b_2\cos\alpha_3) \end{array} \right\} \cos\gamma_2 \\
& - \tau_{1,2}(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)(a_3\cos\beta_1 + b_3\cos\alpha_1)\cos\gamma_3 ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N = {} & \tau_{1,2}\cos\alpha_1 \{(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) a_3\cos\gamma_3 - (a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3) a_2\cos\gamma_2\} \\
& - \tau_{2,3}\cos\alpha_3 \{(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1) a_2\cos\gamma_2 - (a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) a_1\cos\gamma_1\} \\
= {} & \tau_{2,3}(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) a_1\cos\alpha_3\cos\gamma_1 \\
& - \{\tau_{1,2}(a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)\cos\alpha_1 + \tau_{2,3}(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1)\cos\alpha_3\} a_2\cos\gamma_2 \\
& + \tau_{1,2}(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) a_3\cos\alpha_1\cos\gamma_3 ;
\end{aligned}
$$

so wird die obige Gleichung zur Bestimmung von u:

$$L + Mu + Nuu = 0,$$

woraus

$$u = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2N}$$

folgt.

Mittelst einer zwar weitläufigen, sonst aber einer besonderen Schwierigkeit nicht unterliegenden Rechnung erhält man auch:

$$M^2 - 4LN$$

$$= \begin{Bmatrix} \tau_{1,2}\left[(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)(a_3\cos\beta_1 - b_3\cos\alpha_1)\cos\gamma_3 - (a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)(a_2\cos\beta_1 - b_2\cos\alpha_1)\cos\gamma_2\right] \\ - \tau_{2,3}\left[(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1)(a_2\cos\beta_3 - b_2\cos\alpha_3)\cos\gamma_2 - (a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)(a_1\cos\beta_3 - b_1\cos\alpha_3)\cos\gamma_1\right] \end{Bmatrix}^2$$

$$-4\tau_{1,2}\,.\,\tau_{2,3}(\cos\alpha_1\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_1)(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2) \begin{Bmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3\cos\beta_3 - b_3\cos\alpha_3)\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ + (a_2b_3 - a_3b_2)(a_1\cos\beta_1 - b_1\cos\alpha_1)\cos\gamma_2\cos\gamma_3 \\ + (a_3b_1 - a_1b_3)(a_2\cos\beta_2 - b_2\cos\alpha_2)\cos\gamma_3\cos\gamma_1 \end{Bmatrix}.$$

Durch

$$u = \tang\varphi$$

ist die Lage der durch den Anfang der Coordinaten gehende auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene, welche di drei gegebenen geraden Linien im Raume in der angegebene Weise schneidet, bestimmt. Aus u ergeben sich aber auch fe ner leicht:

$$u_1 = \frac{b_1 - a_1 u}{\cos\beta_1 - \cos\alpha_1 . u},$$

$$u_2 = \frac{b_2 - a_2 u}{\cos\beta_2 - \cos\alpha_2 . u},$$

$$u_3 = \frac{b_3 - a_3 u}{\cos\beta_3 - \cos\alpha_3 . u};$$

und hieraus erhält man:

$$x_1 = a_1 - u_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = b_1 - u_1 \cos\beta_1, \quad z_1 = -u_1 \cos\gamma_1;$$

$$x_2 = a_2 - u_2 \cos\alpha_2, \quad y_2 = b_2 - u_2 \cos\beta_2, \quad z_2 = -u_2 \cos\gamma_2;$$

$$x_3 = a_3 - u_3 \cos\alpha_3, \quad y_3 = b_3 - u_3 \cos\beta_3, \quad z_3 = -u_3 \cos\gamma_3.$$

Weil endlich

$$u_1 = A_1 - (-1)^{\mu_1} \sqrt{r_1^2 - B_1^2},$$

$$u_2 = A_2 - (-1)^{\mu_2} \sqrt{r_2^2 - B_2^2},$$

$$u_3 = A_3 - (-1)^{\mu_3} \sqrt{r_3^2 - B_3^2}$$

oder

$$(-1)^{\mu_1} \sqrt{r_1^2 - B_1^2} = A_1 - u_1,$$

$$(-1)^{\mu_2} \sqrt{r_2^2 - B_2^2} = A_2 - u_2,$$

$$(-1)^{\mu_3} \sqrt{r_3^2 - B_3^2} = A_3 - u_3$$

ist; so ist

$$r_1^2 = (A_1 - u_1)^2 + B_1^2,$$

$$r_2^2 = (A_2 - u_2)^2 + B_2^2,$$

$$r_3^2 = (A_3 - u_3)^2 + B_3^2;$$

also

$$r_1 = \sqrt{(A_1 - u_1)^2 + B_1^2},$$
$$r_2 = \sqrt{(A_2 - u_2)^2 + B_2^2},$$
$$r_3 = \sqrt{(A_3 - u_3)^2 + B_3^2}.$$

§. 4.

Aus der ersten der beiden letzten Gleichungen in §. 2., nämlich aus der Gleichung

$$G - \tau_{2,3} K u_1 + \tau_{1,2} K_1 u_3 = 0,$$

folgt:

$$u_3 = -\frac{G - \tau_{2,3} K u_1}{\tau_{1,2} K_1},$$

und weil nun nach §. 2. bekanntlich

$$u_2 = -\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} u_1 + \mathfrak{D} u_3}{\mathfrak{C} + \mathfrak{E} u_1 + \mathfrak{F} u_3}$$

ist, so erhält man nach gehöriger Substitution des obigen Werths von u_3 leicht:

$$u_2 = -\frac{\mathfrak{D} G - \tau_{1,2} \mathfrak{A} K_1 - (\tau_{1,2} \mathfrak{B} K_1 + \tau_{2,3} \mathfrak{D} K) u_1}{\mathfrak{F} G - \tau_{1,2} \mathfrak{C} K_1 - (\tau_{1,2} \mathfrak{E} K_1 + \tau_{2,3} \mathfrak{F} K) u_1}.$$

Es ist aber, wie man mittelst einer keine Schwierigkeit darbietenden Rechnung findet:

$$\mathfrak{D} G - \tau_{1,2} \mathfrak{A} K_1$$
$$= -\tau_{1,2}(a_2 \cos\beta_2 - b_2 \cos\alpha_2) \{ \tau_{1,2}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \tau_{2,3}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \} \cos\gamma_3,$$

ferner

$$\mathfrak{F} G - \tau_{1,2} \mathfrak{C} K_1$$
$$= -\tau_{1,2}(a_2 \cos\beta_2 - b_2 \cos\alpha_2) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{1,2} \left[\begin{array}{l} a_3(\cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_2) \\ - b_3(\cos\alpha_2 \cos\gamma_3 - \cos\alpha_3 \cos\gamma_2) \end{array} \right] \\ + \tau_{2,3} \left[\begin{array}{l} a_1(\cos\beta_2 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_2) \\ - b_1(\cos\alpha_2 \cos\gamma_3 - \cos\alpha_3 \cos\gamma_2) \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

ferner

$$\tau_{1,2} \mathfrak{B} K_1 + \tau_{2,3} \mathfrak{D} K$$
$$= -\tau_{1,2} \tau_{2,3}(a_2 \cos\beta_2 - b_2 \cos\alpha_2) \left\{ \begin{array}{l} a_2(\cos\beta_1 \cos\gamma_3 - \cos\beta_3 \cos\gamma_1) \\ - b_2(\cos\alpha_1 \cos\gamma_3 - \cos\alpha_3 \cos\gamma_1) \end{array} \right\},$$

endlich

$$\tau_{1,2}\mathfrak{E}K_1+\tau_{2,3}\mathfrak{F}K$$

$$=-\tau_{1,2}\tau_{2,3}(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_2\cos\beta-\cos\alpha_3\cos\beta_2)\cos\gamma_1\\+(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)\cos\gamma_2\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\cos\gamma_3\end{array}\right\};$$

und wenn man nun der Kürze wegen:

$$\Theta=\tau_{1,2}(a_2b_3-a_3b_2)-\tau_{2,3}(a_1b_2-a_2b_1);$$

$$K=a_2(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)-b_2(\cos\alpha_1\cos\gamma_2-\cos\alpha_2\cos\gamma_1),$$

$$K_1=a_2(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2)-b_2(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\alpha_3\cos\gamma_2),$$

$$K_2=a_2(\cos\beta_3\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_3)-b_2(\cos\alpha_3\cos\gamma_1-\cos\alpha_1\cos\gamma_3);$$

$$\mathfrak{K}=a_1(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2)-b_1(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\alpha_3\cos\gamma_2),$$

$$\mathfrak{K}_1=a_3(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2)-b_3(\cos\alpha_2\cos\gamma_3-\cos\alpha_3\cos\gamma_2);$$

$$\begin{aligned}\Omega= &\cos\alpha_1(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2)\\&+\cos\alpha_2(\cos\beta_3\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_3)\\&+\cos\alpha_3(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)\\=&\cos\beta_1(\cos\gamma_2\cos\alpha_3-\cos\gamma_3\cos\alpha_2)\\&+\cos\beta_2(\cos\gamma_3\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_3)\\&+\cos\beta_3(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)\\=&\cos\gamma_1(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)\\&+\cos\gamma_2(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)\\&+\cos\gamma_3(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{aligned}$$

setzt; so ist

$$\mathfrak{D}G-\tau_{1,2}\mathfrak{A}K_1=-\tau_{1,2}(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\Theta\cos\gamma_3,$$

$$\mathfrak{F}G-\tau_{1,2}\mathfrak{C}K_1=-\tau_{1,2}(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)(\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1+\tau_{2,3}\mathfrak{K}),$$

$$\tau_{1,2}\mathfrak{B}K_1+\tau_{2,3}\mathfrak{D}K=\tau_{1,2}\tau_{2,3}(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)K_2,$$

$$\tau_{1,2}\mathfrak{E}K_1+\tau_{2,3}\mathfrak{F}K=-\tau_{1,2}\tau_{2,3}(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)\Omega;$$

also nach dem Obigen:

$$u_2=-\frac{\Theta\cos\gamma_3+\tau_{2,3}K_2u_1}{\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1+\tau_{2,3}\mathfrak{K}-\tau_{2,3}\Omega u_1},$$

$$u_3 = -\frac{\Theta\cos\gamma_2 - \tau_{2,3}Ku_1}{\tau_{1,2}K_1}.$$

Bestimmt man mittelst dieser Gleichungen u_1 und u_3 durch u_2, so ergiebt sich:

$$u_1 = -\frac{\Theta\cos\gamma_3 + (\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{K})u_2}{\tau_{2,3}(K_2 - \Omega u_2)},$$

$$u_3 = -\frac{\Theta(K\cos\gamma_3 + K_2\cos\gamma_2) - \{\Theta\Omega\cos\gamma_2 - K(\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{K})\}u_2}{\tau_{1,2}K_1(K_2 - \Omega u_2)}.$$

Mittelst leichter Rechnung erhält man aber

$$K\cos\gamma_3 + K_2\cos\gamma_2 = -K_1\cos\gamma_1$$

und

$$\Theta\Omega\cos\gamma_2 - K(\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{K})$$
$$= -K_1\left\{\begin{array}{l}\tau_{1,2}[a_3(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) - b_3(\cos\alpha_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_1)] \\ + \tau_{2,3}[a_1(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) - b_1(\cos\alpha_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_1)]\end{array}\right\}$$

und es ist also, wenn

$$\Theta = \tau_{1,2}(a_2b_3 - a_3b_2) - \tau_{2,3}(a_1b_2 - a_2b_1);$$

$$\mathfrak{K} = a_1(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2) - b_1(\cos\alpha_2\cos\gamma_3 - \cos\alpha_3\cos\gamma_2),$$

$$\mathfrak{K}_1 = a_3(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2) - b_3(\cos\alpha_2\cos\gamma_3 - \cos\alpha_3\cos\gamma_2);$$

$$\mathfrak{K}' = a_1(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) - b_1(\cos\alpha_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_1),$$

$$\mathfrak{K}_1' = a_3(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) - b_3(\cos\alpha_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_1);$$

$$\mathfrak{L} = a_2(\cos\beta_3\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_3) - b_2(\cos\alpha_3\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma_3);$$

$$\begin{aligned}\Omega = &\cos\alpha_1(\cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2) \\ &+ \cos\alpha_2(\cos\beta_3\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_3) \\ &+ \cos\alpha_3(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ = &\cos\beta_1(\cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\gamma_3\cos\alpha_2) \\ &+ \cos\beta_2(\cos\gamma_3\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_3) \\ &+ \cos\beta_3(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1) \\ = &\cos\gamma_1(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2) \\ &+ \cos\gamma_2(\cos\alpha_3\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_3) \\ &+ \cos\gamma_3(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$u_1 = -\frac{\Theta\cos\gamma_3 + (\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{K})u_2}{\tau_{2,3}(\mathfrak{L} - \Omega u_2)},$$

$$u_3 = \frac{\Theta\cos\gamma_1 - (\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1' + \tau_{2,3}\mathfrak{K}')u_2}{\tau_{1,2}(\mathfrak{L} - \Omega u_2)}.$$

Setzt man:

$$A_1 = \cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2,$$

$$A_2 = \cos\beta_3\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_3,$$

$$A_3 = \cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1;$$

$$B_1 = \cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\gamma_3\cos\alpha_2,$$

$$B_2 = \cos\gamma_3\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_3,$$

$$B_3 = \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1;$$

$$C_1 = \cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2,$$

$$C_2 = \cos\alpha_3\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_3,$$

$$C_3 = \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1;$$

so ist

$$\Theta = \tau_{1,2}(a_2b_3 - a_3b_2) - \tau_{2,3}(a_1b_2 - a_2b_1);$$

$$\mathfrak{K} = a_1A_1 + b_1B_1,$$

$$\mathfrak{K}_1 = a_3A_1 + b_3B_1;$$

$$\mathfrak{K}' = a_1A_3 + b_1B_3,$$

$$\mathfrak{K}_1' = a_3A_3 + b_3B_3;$$

$$\mathfrak{L} = a_2A_2 + b_2B_3;$$

$$\begin{aligned}\Omega &= A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 + A_3\cos\alpha_3\\ &= B_1\cos\beta_1 + B_2\cos\beta_2 + B_3\cos\beta_3\\ &= C_1\cos\gamma_1 + C_2\cos\gamma_2 + C_3\cos\gamma_3.\end{aligned}$$

Mittelst dieser Formeln kann man die vorstehenden Grössen leicht berechnen.

Zur Berechnung der Grössen u_2, u_3 aus u_1 mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln

$$u_2 = -\frac{\Theta\cos\gamma_3 + \tau_{2,3}K_2 u_1}{\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{K} - \tau_{2,3}\Omega u_1},$$

$$u_3 = -\frac{\Theta\cos\gamma_2 - \tau_{2,3}K u_1}{\tau_{1,2}K_1}$$

en wir die folgenden Ausdrücke:

$$\Theta = \tau_{1,2}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \tau_{2,3}(a_1 b_2 - a_2 b_1);$$

$$K = a_2 \mathrm{A}_3 + b_2 \mathrm{B}_3,$$

$$K_1 = a_2 \mathrm{A}_1 + b_2 \mathrm{B}_1,$$

$$K_2 = a_2 \mathrm{A}_2 + b_2 \mathrm{B}_2;$$

$$\mathfrak{K} = a_1 \mathrm{A}_1 + b_1 B_1;$$

$$\mathfrak{K}_1 = a_3 \mathrm{A}_1 + b_3 B_1;$$

$$\Omega = \mathrm{A}_1\cos\alpha_1 + \mathrm{A}_2\cos\alpha_2 + \mathrm{A}_3\cos\alpha_3$$
$$= \mathrm{B}_1\cos\beta_1 + \mathrm{B}_2\cos\beta_2 + \mathrm{B}_3\cos\beta_3$$
$$= \mathrm{C}_1\cos\gamma_1 + \mathrm{C}_2\cos\gamma_2 + \mathrm{C}_3\cos\gamma_3.$$

§. 5.

Wenn wir vier gerade Linien im Raume haben, deren Glei-
ngen

$$\frac{x-a_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\cos\beta_1} = \frac{z}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-a_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y-b_2}{\cos\beta_2} = \frac{z}{\cos\gamma_2},$$

$$\frac{x-a_3}{\cos\alpha_3} = \frac{y-b_3}{\cos\beta_3} = \frac{z}{\cos\gamma_3},$$

$$\frac{x-a_4}{\cos\alpha_4} = \frac{y-b_4}{\cos\beta_4} = \frac{z}{\cos\gamma_4}$$

d, und diese vier geraden Linien von einer durch den Anfang
r Coordinaten gelegten Ebene in den Punkten

$$(x_1 y_1 z_1),\quad (x_2 y_2 z_2),\quad (x_3 y_3 z_3),\quad (x_4 y_4 z_4),$$

ren Entfernungen von dem Anfange der Coordinaten respective

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$$

sind, so geschnitten werden sollen, dass, wenn wir die Fläcl räume der zwischen den Punkten

$$(000),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2);$$
$$(000),\quad (x_2y_2z_2),\quad (x_3y_3z_3);$$
$$(000),\quad (x_3y_3z_3),\quad (x_4y_4z_4)$$

liegenden Dreiecke respective durch

$$\varDelta_{1,2},\quad \varDelta_{2,3},\quad \varDelta_{3,4}$$

bezeichnen,

$$\varDelta_{1,2}:\varDelta_{2,3}:\varDelta_{3,4}=\tau_{1,2}.\tau_{2,3}:\tau_{3,4}$$

ist; so wollen wir auf ganz ähnliche Art wie früher

$$A_1=a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1,$$
$$A_2=a_2\cos\alpha_2+b_2\cos\beta_2,$$
$$A_3=a_3\cos\alpha_3+b_3\cos\beta_3,$$
$$A_4=a_4\cos\alpha_4+b_4\cos\beta_4;$$

$$\begin{aligned}B_1{}^2&=a_1{}^2+b_1{}^2-(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1)^2\\&=a_1{}^2\sin\alpha_1{}^2+b_1{}^2\sin\beta_1{}^2-2a_1b_1\cos\alpha_1\cos\beta_1\\&=(a_1{}^2+b_1{}^2)\cos\gamma_1{}^2+(a_1\cos\beta_1-b_1\cos\alpha_1)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2{}^2&=a_2{}^2+b_2{}^2-(a_2\cos\alpha_2+b_2\cos\beta_2)^2\\&=a_2{}^2\sin\alpha_2{}^2+b_2{}^2\sin\beta_2{}^2-2a_2b_2\cos\alpha_2\cos\beta_2\\&=(a_2{}^2+b_2{}^2)\cos\gamma_2{}^2+(a_2\cos\beta_2-b_2\cos\alpha_2)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_3{}^2&=a_3{}^2+b_3{}^2-(a_3\cos\alpha_3+b_3\cos\beta_3)^2\\&=a_3{}^2\sin\alpha_3{}^2+b_3{}^2\sin\beta_3{}^2-2a_3b_3\cos\alpha_3\cos\beta_3\\&=(a_3{}^2+b_3{}^2)\cos\gamma_3{}^2+(a_3\cos\beta_3-b_3\cos\alpha_3)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_4{}^2&=a_4{}^2+b_4{}^2-(a_4\cos\alpha_4+b_4\cos\beta_4)^2\\&=a_4{}^2\sin\alpha_4{}^2+b_4{}^2\sin\beta_4{}^2-2a_4b_4\cos\alpha_4\cos\beta_4\\&=(a_4{}^2+b_4{}^2)\cos\gamma_4{}^2+(a_4\cos\beta_4-b_4\cos\alpha_4)^2;\end{aligned}$$

$$u_1=A_1-(-1)^{\mu_1}\sqrt{r_1{}^2-B_1{}^2},$$
$$u_2=A_2-(-1)^{\mu_2}\sqrt{r_2{}^2-B_2{}^2},$$
$$u_3=A_3-(-1)^{\mu_3}\sqrt{r_3{}^2-B_3{}^2},$$
$$u_4=A_4-(-1)^{\mu_4}\sqrt{r_4{}^2-B_4{}^2};$$

$$x_1=a_1-u_1\cos\alpha_1,\quad y_1=b_1-u_1\cos\beta_1,\quad z_1=-u_1\cos\gamma_1;$$
$$x_2=a_2-u_2\cos\alpha_2,\quad y_2=b_2-u_2\cos\beta_2,\quad z_2=-u_2\cos\gamma_2;$$
$$x_3=a_3-u_3\cos\alpha_3,\quad y_3=b_3-u_3\cos\beta_3,\quad z_3=-u_3\cos\gamma_3;$$
$$x_4=a_4-u_4\cos\alpha_4,\quad y_4=b_4-u_4\cos\beta_4,\quad z_4=-u_4\cos\gamma_4;$$

$$A_1=\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2,$$
$$A_2=\cos\beta_3\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_3,$$
$$A_3=\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1;$$

$$B_1=\cos\gamma_2\cos\alpha_3-\cos\gamma_3\cos\alpha_2,$$
$$B_2=\cos\gamma_3\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_3,$$
$$B_3=\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1;$$

$$C_1=\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2,$$
$$C_2=\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3,$$
$$C_3=\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1;$$

$$\Theta=\tau_{1,2}(a_2b_3-a_3b_2)-\tau_{2,3}(a_1b_2-a_2b_1);$$
$$\mathfrak{K}=a_1A_1+b_1B_1,$$
$$\mathfrak{K}_1=a_3A_1+b_3B_1;$$

$$\mathfrak{K}'=a_1A_3+b_1B_3,$$
$$\mathfrak{K}'_1=a_3A_3+b_3B_3;$$

$$\mathfrak{L}=a_2A_2+b_2B_2;$$

$$\begin{aligned}\Omega&=A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2+A_3\cos\alpha_3\\&=B_1\cos\beta_1+B_2\cos\beta_2+B_3\cos\beta_3\\&=C_1\cos\gamma_1+C_2\cos\gamma_2+C_3\cos\gamma_3;\end{aligned}$$

$$\overset{1}{A}_2=\cos\beta_3\cos\gamma_4-\cos\beta_4\cos\gamma_3,$$
$$\overset{1}{A}_3=\cos\beta_4\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_4,$$
$$\overset{1}{A}_4=\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\beta_3\cos\gamma_2=A_1;$$

$$\overset{1}{B}_2 = \cos\gamma_3\cos\alpha_4 - \cos\gamma_4\cos\alpha_3\,,$$

$$\overset{1}{B}_3 = \cos\gamma_4\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_4\,,$$

$$\overset{1}{B}_4 = \cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\gamma_3\cos\alpha_2 = B_1\,;$$

$$\overset{1}{C}_2 = \cos\alpha_3\cos\beta_4 - \cos\alpha_4\cos\beta_3\,,$$

$$\overset{1}{C}_3 = \cos\alpha_4\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_4\,,$$

$$\overset{1}{C}_4 = \cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2 = C_1\,;$$

$$\overset{1}{\Theta} = \tau_{2,3}\,(a_3 b_4 - a_4 b_3) - \tau_{3,4}(a_2 b_3 - a_3 b_2)\,;$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}} = a_2\overset{1}{A}_2 + b_2\overset{1}{B}_2\,,$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}}_1 = a_4\overset{1}{A}_2 + b_4\overset{1}{B}_2\,;$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}}' = a_2\overset{1}{A}_4 + b_2\overset{1}{B}_4\,,$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}}'_1 = a_4\overset{1}{A}_4 + b_4\overset{1}{B}_4\,;$$

$$\overset{1}{\mathfrak{L}} = a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3\,;$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\Omega} &= \overset{1}{A}_2\cos\alpha_2 + \overset{1}{A}_3\cos\alpha_3 + \overset{1}{A}_4\cos\alpha_4\\ &= \overset{1}{B}_2\cos\beta_2 + \overset{1}{B}_3\cos\beta_3 + B_4\cos\beta_4\\ &= \overset{1}{C}_2\cos\gamma_2 + \overset{1}{C}_3\cos\gamma_3 + \overset{1}{C}_4\cos\gamma_4\end{aligned}$$

setzen.

Dann ist nach dem Obigen

$$u_1 = -\frac{\Theta\cos\gamma_3 + (\tau_{1,2}\mathfrak{B}_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{B})u_2}{\tau_{2,3}(\mathfrak{L} - \Omega u_2)}\,,$$

$$u_3 = \frac{\Theta\cos\gamma_1 - (\tau_{1,2}\mathfrak{B}'_1 + \tau_{2,3}\mathfrak{B}')u_2}{\tau_{1,2}(\mathfrak{L} - \Omega u_2)}$$

und

$$u_2 = -\frac{\overset{1}{\Theta}\cos\gamma_4 + (\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{K}}_1 + \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{K}})u_3}{\tau_{3,4}(\overset{1}{\mathfrak{L}} - \overset{1}{\Omega}u_3)},$$

$$u_4 = \frac{\overset{1}{\Theta}\cos\gamma_2 - (\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{K}}'_1 + \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{K}}')u_3}{\tau_{2,3}(\overset{1}{\mathfrak{L}} - \overset{1}{\Omega}u_3)};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$P_1 = -\Theta\cos\gamma_3$,

$Q_1 = -\tau_{1,2}\mathfrak{K}_1 - \tau_{2,3}\mathfrak{K}$,

$S_1 = \tau_{2,3}\mathfrak{L}$,

$T_1 = -\tau_{2,3}\Omega$;

$P_2 = -\overset{1}{\Theta}\cos\gamma_4$,

$Q_2 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{K}}_1 - \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{K}}$,

$S_2 = \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{L}}$,

$T_2 = -\tau_{3,4}\overset{1}{\Omega}$;

$P_3 = \Theta\cos\gamma_1$,

$Q_3 = -\tau_{1,2}\mathfrak{K}'_1 - \tau_{2,3}\mathfrak{K}'$,

$S_3 = \tau_{1,2}\mathfrak{L}$,

$T_3 = -\tau_{1,2}\Omega$;

$P_4 = \overset{1}{\Theta}\cos\gamma_2$,

$Q_4 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{K}}'_1 - \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{K}}'$,

$S_4 = \tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{L}}$,

$T_4 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\Omega}$

setzen:

$$u_1 = \frac{P_1 + Q_1u_2}{S_1 + T_1u_2},$$

$$u_2=\frac{P_2+Q_2u_3}{S_2+T_2u_3},$$

$$u_3=\frac{P_3+Q_3u_2}{S_3+T_3u_2},$$

$$u_4=\frac{P_4+Q_4u_3}{S_4+T_4u_3}.$$

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$u_2=\frac{P_2+Q_2u_3}{S_2+T_2u_3},\qquad u_3=\frac{P_3+Q_3u_2}{S_3+T_3u_2}$$

entweder u_3 oder u_2 eliminirt, so erhält man zur Bestimmung v
u_2 die Gleichung

$$\begin{aligned}0= &(S_2T_3+T_2Q_3)u_2u_2\\ &+(S_2S_3-Q_2Q_3+T_2P_3-P_2T_3)u_2\\ &-(P_2S_3+Q_2P_3),\end{aligned}$$

und zur Bestimmung von u_3 die Gleichung

$$\begin{aligned}0= &(T_2S_3+Q_2T_3)u_3u_3\\ &+(S_2S_3-Q_2Q_3+P_2T_3-T_2P_3)u_3\\ &-(S_2P_3+P_2Q_3).\end{aligned}$$

Hat man u_2 mittelst der ersten Gleichung bestimmt, so ergeb
sich u_1, u_3, u_4 mittelst der Formeln:

$$u_1=\frac{P_1+Q_1u_2}{S_1+T_1u_2},\quad u_3=\frac{P_3+Q_3u_2}{S_3+T_3u_2},\quad u_4=\frac{P_4+Q_4u_3}{S_4+T_4u_3};$$

und hat man u_3 mittelst der zweiten Gleichung bestimmt, so e
geben sich u_2, u_1, u_4 mittelst der Formeln:

$$u_2=\frac{P_2+Q_2u_3}{S_2+T_2u_3},\quad u_1=\frac{P_1+Q_1u_2}{S_1+T_1u_2},\quad u_4=\frac{P_4+Q_4u_3}{S_4+T_4u_3}.$$

§. 6.

Wenn

$$\Theta=\tau_{1,2}(a_2b_3-a_3b_2)-\tau_{2,3}(a_1b_2-a_2b_1)=0,$$

$$\overset{1}{\Theta}=\tau_{2,3}(a_3b_4-a_4b_3)-\tau_{3,4}(a_2b_3-a_3b_2)=0;$$

also

$$\frac{r_{1,2}}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{r_{2,3}}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = \frac{r_{3,4}}{a_3 b_4 - a_4 b_3}$$

oder

$$r_{1,2} : r_{2,3} : r_{3,4} = a_1 b_2 - a_2 b_1 : a_2 b_3 - a_3 b_2 : a_3 b_4 - a_4 b_3$$

ist, d. h. wenn die durch den Anfang der Coordinaten gelegte Ebene die vier gegebenen geraden Linien im Raume so schneidet, dass die zwischen den Punkten

$$(000), \quad (x_1 y_1 z_1), \quad (x_2 y_2 z_2);$$

$$(000), \quad (x_2 y_2 z_2), \quad (x_3 y_3 z_3);$$

$$(000), \quad (x_3 y_3 z_3), \quad (x_4 y_4 z_4)$$

liegenden Dreiecke

$$\Delta_{1,2}, \quad \Delta_{2,3}, \quad \Delta_{3,4}$$

den zwischen dem Anfange der Coordinaten und den Durchschnittspunkten der vier gegebenen geraden Linien mit der Ebene der xy, nämlich den zwischen den Punkten

$$(00), \quad (a_1 b_1), \quad (a_2 b_2);$$

$$(00), \quad (a_2 b_2), \quad (a_3 b_3);$$

$$(00), \quad (a_3 b_3), \quad (a_4 b_4)$$

in der Ebene der xy liegenden Dreiecken proportional sind; so kann man

$$r_{1,2} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$r_{2,3} = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$r_{3,4} = a_3 b_4 - a_4 b_3$$

setzen, und da nun auch

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$$

ist, so hat man nach dem vorhergehenden Paragraphen zur Bestimmung von u_2 die Gleichung

$$u_2 \{ (S_2 T_3 + T_2 Q_3) u_2 + S_2 S_3 - Q_2 Q_3 \} = 0,$$

welche in die beiden Gleichungen

$$u_2 = 0$$

und

$$(S_2T_3 + T_2Q_3)u_2 + S_2S_3 - Q_2Q_3 = 0$$

zerfällt. Aus $u_2 = 0$ folgt aber aus dem vorhergehenden Paragraphen unter der gemachten Voraussetzung

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0,$$

also

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0,$$

und die durch den Anfang der Coordinaten gelegte Ebene fällt daher mit der Ebene der xy zusammen, wobei sich von selbst versteht, dass die Ebene der xy die vier gegebenen geraden Linien in der angegebenen Weise schneiden muss, und daher natürlich selbst als eine Auflösung unserer Aufgabe zu betrachten ist. Setzen wir aber diesen Fall bei Seite, so haben wir, da eine ganz ähnliche Betrachtung sich auf die obige Gleichung des zweiten Grades, aus welcher u_3 bestimmt werden muss, anwenden lässt, zur Bestimmung von u_2, u_3 die Gleichungen:

$$(S_2T_3 + T_2Q_3)u_2 + S_2S_3 - Q_2Q_3 = 0,$$

$$(T_2S_3 + Q_2T_3)u_3 + S_2S_3 - Q_2Q_3 = 0;$$

aus denen

$$u_2 = -\frac{S_2S_3 - Q_2Q_3}{S_2T_3 + T_2Q_3}, \quad u_3 = -\frac{S_2S_3 - Q_2Q_3}{T_2S_3 + Q_2T_3}$$

folgt; und u_1, u_4 ergeben sich dann mittelst der Formeln:

$$u_1 = \frac{Q_1u_2}{S_1 + T_1u_2}, \quad u_4 = \frac{Q_4u_3}{S_4 + T_4u_3}.$$

Setzt man aber

$$K = a_2\mathrm{A}_3 + b_2\mathrm{B}_3, \quad K_1 = a_2\mathrm{A}_1 + b_2\mathrm{B}_1;$$

$$\overset{1}{K} = a_3\overset{1}{\mathrm{A}}_4 + b_3\overset{1}{\mathrm{B}}_4, \quad \overset{1}{K}_1 = a_3\overset{1}{\mathrm{A}}_2 + b_3\overset{1}{\mathrm{B}}_2;$$

so ist nach §. 4. auch

$$u_3 = \frac{\tau_{2,3}}{\tau_{1,2}} \cdot \frac{K}{K_1} u_1, \quad u_4 = \frac{\tau_{3,4}}{\tau_{2,3}} \cdot \frac{\overset{1}{K}}{\overset{1}{K}_1} u_2;$$

d. i.

$$u_3 = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot \frac{a_2\mathrm{A}_3 + b_2\mathrm{B}_3}{a_2\mathrm{A}_1 + b_2\mathrm{B}_1} u_1,$$

$$u_4 = \frac{a_3b_4 - a_4b_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \frac{a_3\overset{1}{A}_4 + b_3\overset{1}{B}_4}{a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2}\, u_2;$$

oder

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \frac{a_2A_1 + b_2B_1}{a_2A_3 + b_2B_3},$$

$$\frac{u_2}{u_4} = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_3b_4 - a_4b_3} \cdot \frac{a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2}{a_3\overset{1}{A}_4 + b_3\overset{1}{B}_4};$$

oder

$$\frac{u_3}{u_1} = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot \frac{a_2A_3 + b_2B_3}{a_2A_1 + b_2B_1},$$

$$\frac{u_4}{u_2} = \frac{a_3b_4 - a_4b_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \frac{a_3\overset{1}{A}_4 + b_3\overset{1}{B}_4}{a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2}.$$

Nun findet man aber leicht:

$$Q_2 = -(a_2b_4 - a_4b_2)(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2),$$

$$Q_3 = -(a_1b_3 - a_3b_1)(a_2A_3 + b_2B_3);$$

und

$$S_2S_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3)(a_2A_2 + b_2B_2)(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3),$$

$$Q_2Q_3 = (a_1b_3 - a_3b_1)(a_2b_4 - a_4b_2)(a_2A_3 + b_2B_3)(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2);$$

$$S_2T_3 = -(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3)(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3)\Omega,$$

$$T_2Q_3 = (a_1b_3 - a_3b_1)(a_3b_4 - a_4b_3)(a_2A_3 + b_2B_3)\overset{1}{\Omega};$$

$$T_2S_3 = -(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3)(a_2A_2 + b_2B_2)\overset{1}{\Omega},$$

$$Q_2T_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_2b_4 - a_4b_2)(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2)\Omega.$$

Setzen wir also der Kürze wegen

$$\mathfrak{Z} = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3)(a_2A_2 + b_2B_2)(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3)$$

$$- (a_1b_3 - a_3b_1)(a_2b_4 - a_4b_2)(a_2A_3 + b_2B_3)(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2)$$

und

$$\mathfrak{N}_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 \overset{1}{A}_3 + b_3 \overset{1}{B}_3)\Omega - (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_2 A_3 + b_2 B_3)\overset{1}{\Omega},$$

$$\mathfrak{N}_3 = (a_2 b_4 - a_4 b_2)(a_3 \overset{1}{A}_2 + b_3 \overset{1}{B}_2)\Omega - (a_3 b_4 - a_4 b_3)(a_2 A_2 + b_2 B_2)\overset{1}{\Omega};$$

so ist

$$u_1 = -\frac{1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \cdot \frac{a_2 A_1 + b_2 B_1}{a_2 A_3 + b_2 B_3} \cdot \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_3},$$

$$u_2 = \frac{1}{a_3 b_4 - a_4 b_3} \cdot \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_2},$$

$$u_3 = -\frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_3},$$

$$u_4 = \frac{1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \cdot \frac{a_3 \overset{1}{A}_4 + b_3 \overset{1}{B}_4}{a_3 \overset{1}{A}_2 + b_3 \overset{1}{B}_2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_2}.$$

Man kann aber diesen Formeln zur Berechnung der Grössen

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4$$

auch die folgende Gestalt geben:

$$u_2 = \frac{1}{a_3b_4 - a_4b_3} \cdot \frac{\dfrac{a_3b_4 - a_4b_3}{a_1b_3 - a_3b_1} \cdot \dfrac{a_2A_2 + b_2B_2}{a_2A_3 + b_2B_3} - \dfrac{a_2b_4 - a_4b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \, \dfrac{a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2}{a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3}}{\dfrac{\Omega}{(a_1b_3 - a_3b_1)(a_2A_3 + b_2B_3)} - \dfrac{\overset{1}{\Omega}}{(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3)}},$$

$$u_3 = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot \frac{\dfrac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_3b_4 - a_4b_3} \cdot \dfrac{a_2A_3 + b_2B_3}{a_2A_2 + b_2B_2} - \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_4 - a_4b_2} \cdot \dfrac{a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3}{a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2}}{\dfrac{\Omega}{(a_3b_4 - a_4b_3)(a_2A_2 + b_2B_2)} - \dfrac{\overset{1}{\Omega}}{(a_2b_4 - a_4b_2)(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2)}},$$

$$u_1 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \frac{a_2A_1 + b_2B_1}{a_2A_3 + b_2B_3} u_3,$$

$$u_4 = \frac{a_3b_4 - a_4b_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \cdot \frac{a_3\overset{1}{A}_4 + b_3\overset{1}{B}_4}{a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2} u_2.$$

Auch merke man noch die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{Z} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3) \left\{ \begin{array}{l} \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 (a_2 \cos\beta_3 - b_2 \cos\alpha_3)(a_3 \cos\beta_4 - b_3 \cos\alpha_4) \\ - \cos\gamma_1 \cos\gamma_4 (a_2 \cos\beta_3 - b_2 \cos\alpha_3)(a_3 \cos\beta_2 - b_3 \cos\alpha_2) \\ + \cos\gamma_3 \cos\gamma_4 (a_2 \cos\beta_1 - b_2 \cos\alpha_1)(a_3 \cos\beta_2 - b_3 \cos\alpha_2) \end{array} \right\}$$

$$+ (a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2) \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 (a_2 \cos\beta_1 - b_2 \cos\alpha_1)(a_3 \cos\beta_4 - b_3 \cos\alpha_4)$$

$$- (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_2 b_4 - a_4 b_2) \left\{ \begin{array}{l} \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 (a_2 \cos\beta_2 - b_2 \cos\alpha_2)(a_3 \cos\beta_4 - b_3 \cos\alpha_4) \\ - \cos\gamma_1 \cos\gamma_4 (a_2 \cos\beta_2 - b_2 \cos\alpha_2)(a_3 \cos\beta_3 - b_3 \cos\alpha_3) \\ + \cos\gamma_2 \cos\gamma_4 (a_2 \cos\beta_1 - b_2 \cos\alpha_1)(a_3 \cos\beta_3 - b_3 \cos\alpha_3) \end{array} \right\}$$

und

$$\mathfrak{M}_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)A_1(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3)\cos\alpha_1$$
$$+ \{(a_1b_2 - a_2b_1)A_2(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3) - (a_1b_3 - a_3b_1)\overset{1}{A}_2(a_3A_3 + b_2B_3)\}\cos\alpha_2$$
$$+ \{(a_1b_2 - a_2b_1)A_3(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3) - (a_1b_3 - a_3b_1)\overset{1}{A}_3(a_2A_3 + b_2B_3)\}\cos\alpha_3$$
$$- (a_1b_3 - a_3b_1)A_1(a_2A_3 + b_2B_3)\cos\alpha_4$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)B_1(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3)\cos\beta_1$$
$$+ \{(a_1b_2 - a_2b_1)B_2(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3) - (a_1b_3 - a_3b_1)\overset{1}{B}_2(a_2A_3 + b_2B_3)\}\cos\beta_2$$
$$+ \{(a_1b_2 - a_2b_1)B_3(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3) - (a_1b_3 - a_3b_1)\overset{1}{B}_3(a_2A_3 + b_2B_3)\}\cos\beta_3$$
$$- (a_1b_3 - a_3b_1)B_1(a_2A_3 + b_2B_3)\cos\beta_4$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)C_1(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3)\cos\gamma_1$$
$$+ \{(a_1b_2 - a_2b_1)C_2(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3) - (a_1b_3 - a_3b_1)\overset{1}{C}_2(a_2A_3 + b_2B_3)\cos\gamma_2$$
$$+ \{(a_1b_2 - a_2b_1)C_3(a_3\overset{1}{A}_3 + b_3\overset{1}{B}_3) - (a_1b_3 - a_3b_1)\overset{1}{C}_3(a_2A_3 + b_2B_3)\}\cos\gamma_3$$
$$- (a_1b_3 - a_3b_1)C_1(a_2A_3 + b_2B_3)\cos\gamma_4,$$

so wie

$$\tau\tau_3 = (a_2b_4 - a_4b_2)A_1(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2)\cos\alpha_1$$
$$+\{(a_2b_4 - a_4b_2)A_2(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2) - (a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{A}_2(a_2A_2 + b_2B_2)\}\cos\alpha_2$$
$$+\{(a_2b_4 - a_4b_2)A_3(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2) - (a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{A}_3(a_2A_2 + b_2B_2)\}\cos\alpha_3$$
$$-(a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{A}_1(a_2A_2 + b_2B_2)\cos\alpha_4$$

$$= (a_2b_4 - a_4b_2)B_1(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2)\cos\beta_1$$
$$+\{(a_2b_4 - a_4b_2)B_2(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2) - (a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{B}_2(a_2A_2 + b_2B_2)\}\cos\beta_2$$
$$+\{(a_2b_4 - a_4b_2)B_3(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2) - (a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{B}_3(a_2A_2 + b_2B_2)\}\cos\beta_3$$
$$-(a_3b_4 - a_4b_3)B_1(a_2A_2 + b_2B_2)\cos\beta_4$$

$$= (a_2b_4 - a_4b_2)C_1(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2)\cos\gamma_1$$
$$+\{(a_2b_4 - a_4b_2)C_2(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2) - (a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{C}_2(a_2A_2 + b_2B_2)\}\cos\gamma_2$$
$$+\{(a_2b_4 - a_4b_2)C_3(a_3\overset{1}{A}_2 + b_3\overset{1}{B}_2) - (a_3b_4 - a_4b_3)\overset{1}{C}_3(a_2A_2 + b_2B_2)\}\cos\gamma_3$$
$$-(a_3b_4 - a_4b_3)C_1(a_2A_2 + b_2B_2)\cos\gamma_4.$$

Hat man

$$u_1, u_2, u_3, u_4$$

gefunden, so ergeben sich

$$x_1, y_1, z_1; \ x_2, y_2, z_2; \ x_3, y_3, z_3; \ x_4, y_4, z_4$$

mittelst der Formeln:

$$x_1 = a_1 - u_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = b_1 - u_1 \cos\beta_1, \quad z_1 = -u_1 \cos\gamma_1;$$

$$x_2 = a_2 - u_2 \cos\alpha_2, \quad y_2 = b_2 - u_2 \cos\beta_2, \quad z_2 = -u_2 \cos\gamma_2;$$

$$x_3 = a_3 - u_3 \cos\alpha_3, \quad y_3 = b_3 - u_3 \cos\beta_3, \quad z_3 = -u_3 \cos\gamma_3;$$

$$x_4 = a_4 - u_4 \cos\alpha_4, \quad y_4 = b_4 - u_4 \cos\beta_4, \quad z_4 = -u_4 \cos\gamma_4$$

und

$$r_1, r_2, r_3, r_4$$

mittelst der Formeln:

$$r_1 = \sqrt{(A_1 - u_1)^2 + B_1^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(A_2 - u_2)^2 + B_2^2},$$

$$r_3 = \sqrt{(A_3 - u_3)^2 + B_3^2},$$

$$r_4 = \sqrt{(A_4 - u_4)^2 + B_4^2}.$$

Es ist aus dem Obigen klar, dass man in dem in diesem Paragraphen betrachteten Falle die Grössen $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$, $\tau_{3,4}$ selbst gar nicht mehr zu kennen braucht, und dass man hier eigentlich die folgende geometrische Aufgabe aufgelöst hat:

Wenn vier eine gegebene Ebene in den Punkten A, A_1, A_2, A_3 schneidende gerade Linien im Raume, und in der gegebenen Ebene ein Punkt O gegeben sind: durch diesen Punkt eine Ebene zu legen, welche die vier gegebenen geraden Linien in den Punkten B, B_1, B_2, B_3 so schneidet, dass die Flächenräume der drei Dreiecke

$$BOB_1, \quad B_1OB_2, \quad B_2OB_3$$

sich eben so zu einander verhalten, wie respective die Flächenräume der drei in der gegebenen Ebene liegenden Dreiecke

$$AOA_1, \quad A_1OA_2, \quad A_2OA_3.$$

Dass die gegebene Ebene immer selbst eine Auflösung dieser Aufgabe liefert, versteht sich von selbst; dass es aber ausser derselben im Allgemeinen immer noch eine zweite den Bedingungen der Aufgabe genügende Ebene giebt, erhellet aus dem Vorhergehenden von selbst, und eben diese zweite Ebene zu finden, konnte im Obigen nur der Zweck sein. Man vergleiche hierbei was in der Einleitung, gegen das Ende, in Bezug auf den vorliegenden Fall bemerkt worden ist.

§. 7.

Den Anfang der xyz wollen wir jetzt in den Mittelpunkt der Sonne legen, und wollen die Ebene der Ekliptik als Ebene der xy annehmen. Durch den Mittelpunkt der Erde legen wir ein zweites rechtwinkliges dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x'y'z'$, wo also die Ebene der $x'y'$ ebenfalls mit der Ebene der Ekliptik zusammenfällt. Der positive Theil der Axe der x' sei von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Frühlingspunkte hin gerichtet, und der positive Theil der Axe der y' werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x' durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der x' an die geocentrischen Längen genommen werden; der positive Theil der Axe der z' werde von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Nordpole der Ekliptik hin genommen. Wie in dem Systeme der xyz, welches dem Systeme der $x'y'z'$ parallel ist, die positiven Theile der drei Axen zu nehmen sind, ist hierdurch von selbst bestimmt.

Die durch die Gleichungen

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

charakterisirte gerade Linie sei eine von dem Mittelpunkte der Erde in dem Punkte (ab) ihrer Bahn zur Zeit t nach einem Cometen gezogene Gesichtslinie. Die beobachtete, oder wenigstens aus Beobachtungen abgeleitete geocentrische Länge und Breite des Cometen zur Zeit t seien α', β'*), und zu derselben Zeit sei L die geocentrische Länge der Sonne, und R sei der Radius vector derselben. Ist dann noch ϱ' die sogenannte curtirte Entfernung des Cometen von dem Mittelpunkte der Erde, so sind

*) Freilich muss, um aus der aus den Beobachtungen für irgend einen Beobachtungsort abgeleiteten Länge und Breite eines Cometen die entsprechenden geocentrischen Elemente desselben finden zu können, die Entfernung desselben von der Erde schon bekannt sein. Wie man sich hiebei durch successive Näherungen hilft, bedarf an diesem Orte für der Astronomie kundige Leser keiner besonderen Erläuterung.

$$\varrho'\cos\alpha', \quad \varrho'\sin\alpha', \quad \varrho'\tan\beta'$$

die Coordinaten desselben im Systeme der $x'y'z'$ zur Zeit t. Die Gleichungen der vom Mittelpunkte der Erde nach dem Cometen zur Zeit t gezogenen Gesichtslinie im Systeme der $x'y'z'$ haben die Form:

$$x' = M'z', \quad y' = N'z';$$

und es ist daher nach dem Vorhergehenden:

$$\varrho'\cos\alpha' = M'\varrho'\tan\beta', \quad \varrho'\sin\alpha' = N'\varrho'\tan\beta';$$

also

$$M' = \cos\alpha'\cot\beta', \quad N' = \sin\alpha'\cot\beta';$$

woraus sich ergiebt, dass

$$x' = z'\cos\alpha'\cot\beta', \quad y' = z'\sin\alpha'\cot\beta'$$

die Gleichungen der zur Zeit t nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinie im Systeme der $x'y'z'$ sind.

Die Coordinaten der Sonne im Systeme der $x'y'z'$ zur Zeit t sind

$$R\cos L, \quad R\sin L, \quad 0;$$

und zwischen den Coordinaten eines und desselben Punktes in den Systemen der xyz und $x'y'z'$ hat man daher nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$x' = R\cos L + x, \quad y' = R\sin L + y, \quad z' = z;$$

oder

$$x = x' - R\cos L, \quad y = y' - R\sin L, \quad z = z';$$

also sind nach dem Obigen

$$R\cos L + x = z\cos\alpha'\cot\beta',$$

$$R\sin L + y = z\sin\alpha'\cot\beta';$$

oder

$$x = z\cos\alpha'\cot\beta' - R\cos L,$$

$$y = z\sin\alpha'\cot\beta' - R\sin L;$$

die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Erde zur Zeit t nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der xyz.

Bringt man, um diese Gleichungen mit den Gleichungen

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

zu vergleichen, die letzteren auf die Form:

$$x=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z+a,$$

$$y=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z+b;$$

so ergiebt sich auf der Stelle, dass

$$a=-R\cos L,\quad b=-R\sin L$$

und

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\cos\alpha'\cot\beta',\quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\sin\alpha'\cot\beta'$$

ist. Verbindet man aber mit den zwei letzten Gleichungen die bekannte Gleichung

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

so erhält man

$$(1+\cos\alpha'^2\cot\beta'^2+\sin\alpha'^2\cot\beta'^2)\cos\gamma^2=1,$$

d. i.

$$(1+\cot\beta'^2)\cos\gamma^2=\operatorname{cosec}\beta'^2\cos\gamma^2=1,$$

also

$$\cos\gamma^2=\sin\beta'^2,\quad \cos\gamma=\pm\sin\beta';$$

und folglich nach dem Obigen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\alpha=\pm\cos\alpha'\cos\beta',$$

$$\cos\beta=\pm\sin\alpha'\cos\beta',$$

$$\cos\gamma=\pm\sin\beta'.$$

Mittelst einer einfachen Betrachtung überzeugt man sich aber auf der Stelle, dass allgemein

$$\cos\gamma=\sin\beta'$$

ist; also muss man in den drei vorhergehenden Gleichungen die oberen Zeichen nehmen, und daher

$$\cos\alpha = \cos\alpha'\cos\beta',$$

$$\cos\beta = \sin\alpha'\cos\beta',$$

$$\cos\gamma = \sin\beta'$$

setzen.

Bemerken wollen wir noch, dass aus den beiden obigen Gleichungen

$$R\cos L + x = z\cos\alpha'\cot\beta',$$

$$R\sin L + y = z\sin\alpha'\cot\beta'$$

durch Division auch

$$\cot\alpha' = \frac{R\cos L + x}{R\sin L + y},$$

oder, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$x\sin\alpha' - y\cos\alpha' = R\sin(L-\alpha')$$

folgt. Auch ergiebt sich aus denselben Gleichungen leicht die Gleichung

$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' + R\cos(L-\alpha') = z\cot\beta',$$

und man hat daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$x\sin\alpha' - y\cos\alpha' - R\sin(L-\alpha') = 0,$$

$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' + R\cos(L-\alpha') = z\cot\beta';$$

aus denen auch die Gleichung

$$\tan(\alpha' - L) = \frac{x\sin\alpha' - y\cos\alpha'}{x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - z\cot\beta'}$$

folgt.

§. 8.

Um nun die Lage der Ebene der Cometenbahn im Raume zu bestimmen, wollen wir für's Erste annehmen, dass der Comet in vier nahe bei einander liegenden Punkten seiner Bahn zu den Zeiten

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,$$

welche wir als nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet annehmen wollen, beobachtet worden sei. Die diesen Zeiten entsprechenden geocentrischen Längen und Breiten des Cometen seien

$$\alpha_1', \beta_1'; \quad \alpha_2', \beta_2'; \quad \alpha_3', \beta_3'; \quad \alpha_4', \beta_4';$$

die denselben Zeiten entsprechenden geocentrischen Längen und Vectoren der Sonne seien respective

$$L_1, \ L_2, \ L_3, \ L_4$$

und

$$R_1, \ R_2, \ R_3, \ R_4.$$

Dann können wir als eine erste Näherung voraussetzen, dass die vier von der Erde nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien von der Ebene seiner Bahn so geschnitten werden, dass die drei im Obigen durch

$$\Delta_{1,2}, \ \Delta_{2,3}, \ \Delta_{3,4}$$

bezeichneten Dreiecke den drei entsprechenden zwischen der Sonne und den vier Oertern der Erde in ihrer Bahn liegenden Dreiecken proportional sind; und um, dies vorausgesetzt, die Lage der Ebene der Cometenbahn im Raume zu bestimmen, werden wir daher die in §. 6. entwickelten Formeln in Anwendung zu bringen haben.

Diese Formeln wollen wir nun aber durch die geocentrischen Längen und Breiten des Cometen, durch die geocentrischen Längen und die Vectoren der Sonne, welche Grössen wir hier sämmtlich theils aus den Beobachtungen, theils aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden als bekannt voraussetzen und vorauszusetzen berechtigt sind, ausdrücken.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen haben wir zuerst die folgenden Ausdrücke:

$$a_1 = -R_1 \cos L_1, \quad b_1 = -R_1 \sin L_1;$$

$$a_2 = -R_2 \cos L_2, \quad b_2 = -R_2 \sin L_2;$$

$$a_3 = -R_3 \cos L_3, \quad b_3 = -R_3 \sin L_3;$$

$$a_4 = -R_4 \cos L_4, \quad b_4 = -R_4 \sin L_4;$$

also ist

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = -R_1 R_2 \sin(L_1 - L_2),$$

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = -R_1 R_3 \sin(L_1 - L_3),$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = -R_2 R_3 \sin(L_2 - L_3),$$

$$a_2 b_4 - a_4 b_2 = -R_2 R_4 \sin(L_2 - L_4),$$

$$a_3 b_4 - a_4 b_3 = -R_3 R_4 \sin(L_3 - L_4).$$

Ferner erhält man mit Rücksicht auf die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Ausdrücke leicht:

$$a_2 A_1 + b_2 B_1$$
$$= - R_2 \{ \cos\beta'_2 \sin\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_2) - \sin\beta'_2 \cos\beta'_3 \sin(\alpha'_3 - L_2) \},$$

$$a_2 A_2 + b_2 B_2$$
$$= - R_2 \{ \cos\beta'_3 \sin\beta'_1 \sin(\alpha'_3 - L_2) - \sin\beta'_3 \cos\beta'_1 \sin(\alpha'_1 - L_2) \},$$

$$a_2 A_3 + b_2 B_3$$
$$= - R_2 \{ \cos\beta'_1 \sin\beta'_2 \sin(\alpha'_1 - L_2) - \sin\beta'_1 \cos\beta'_2 \sin(\alpha'_2 - L_2) \};$$

und

$$a_3 \overset{1}{A}_2 + b_3 \overset{1}{B}_2$$
$$= - R_3 \{ \cos\beta'_3 \sin\beta'_4 \sin(\alpha'_3 - L_3) - \sin\beta'_3 \cos\beta'_4 \sin(\alpha'_4 - L_3) \}.$$

$$a_3 \overset{1}{A}_3 + b_3 \overset{1}{B}_3$$
$$= - R_3 \{ \cos\beta'_4 \sin\beta'_2 \sin(\alpha'_4 - L_3) - \sin\beta'_4 \cos\beta'_2 \sin(\alpha'_2 - L_3) \}$$

$$a_3 \overset{1}{A}_4 + b_3 \overset{1}{B}_4$$
$$= - R_3 \{ \cos\beta'_2 \sin\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_3) - \sin\beta'_2 \cos\beta'_3 \sin(\alpha'_3 - L_3) \}.$$

Endlich findet man leicht:

$$\begin{aligned} \Omega = & - \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3) \sin\beta'_1 \cos\beta'_2 \cos\beta'_3 \\ & - \sin(\alpha'_3 - \alpha'_1) \cos\beta'_1 \sin\beta'_2 \cos\beta'_3 \\ & - \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2) \cos\beta'_1 \cos\beta'_2 \sin\beta'_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Omega' = & - \sin(\alpha'_3 - \alpha'_4) \sin\beta'_2 \cos\beta'_3 \cos\beta'_4 \\ & - \sin(\alpha'_4 - \alpha'_2) \cos\beta'_2 \sin\beta'_3 \cos\beta'_4 \\ & - \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3) \cos\beta'_2 \cos\beta'_3 \sin\beta'_4 . \end{aligned}$$

Mittelst der in §. 6. entwickelten Formeln erhält man hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\frac{R_2}{(L_3-L_4)\cos\beta'_2}\cdot\frac{\dfrac{\sin(L_3-L_4)}{\sin(L_1-L_3)}\cdot\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_3-L_2)-\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_1-L_2)}{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_2)-\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_2)}-\dfrac{\sin(L_2-L_4)}{\sin(L_1-L_2)}\cdot\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_3)-\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4-L_3)}{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_4-L_3)-\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2-L_3)}}{\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)+\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_1)+\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_1-\alpha'_2)}{\sin(L_1-L_3)\{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_2)-\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_2)\}}-\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_4)+\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4-\alpha'_2)+\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)}{\sin(L_1-L_2)\{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_4-L_3)-\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2-L_3)\}}},$$

$$\frac{R_3}{(L_1-L_2)\cos\beta'_3}\cdot\frac{\dfrac{\sin(L_1-L_3)}{\sin(L_3-L_4)}\cdot\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_2)-\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_2)}{\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_3-L_2)-\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_1-L_2)}-\dfrac{\sin(L_1-L_2)}{\sin(L_2-L_4)}\cdot\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_4-L_3)-\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2-L_3)}{\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_3)-\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4-L_3)}}{\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)+\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_1)+\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_1-\alpha'_2)}{\sin(L_3-L_4)\{\operatorname{tang}\beta'_1\sin(\alpha'_3-L_2)-\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_1-L_2)\}}-\dfrac{\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_4)+\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4-\alpha'_2)+\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)}{\sin(L_2-L_4)\{\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_3)-\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4-L_3)\}}},$$

$$u_1 = \frac{R_1 \sin(L_1 - L_2)}{R_3 \sin(L_2 - L_3)} \cdot \frac{\cos\beta'_3}{\cos\beta'_1} \; \frac{\mathrm{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_2) - \mathrm{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - L_2)}{\mathrm{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_1 - L_2) - \mathrm{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - L_2)} u_3,$$

$$u_4 = \frac{R_4 \sin(L_3 - L_4)}{R_2 \sin(L_2 - L_3)} \cdot \frac{\cos\beta'_2}{\cos\beta'_4} \; \frac{\mathrm{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_3) - \mathrm{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_3 - L_3)}{\mathrm{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_3 - L_3) - \mathrm{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - L_3)} u_2.$$

Setzt man aber

$$\mathfrak{Z} = \sin(L_1 - L_2)\sin(L_3 - L_4)\{\mathrm{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_3 - L_2) - \mathrm{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - L_2)\}\{\mathrm{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_4 - L_3) - \mathrm{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - L_3)\}$$
$$- \sin(L_1 - L_3)\sin(L_2 - L_4)\{\mathrm{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_1 - L_2) - \mathrm{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - L_2)\}\{\mathrm{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_3 - L_3) - \mathrm{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - L_3)\}$$

oder

$$\mathfrak{Z} = \sin(L_1 - L_2)\sin(L_3 - L_4)\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\beta'_1 \operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - L_2)\sin(\alpha'_4 - L_3) \\ -\operatorname{tang}\beta'_1 \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_3 - L_2)\sin(\alpha'_2 - L_3) \\ +\operatorname{tang}\beta'_3 \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_1 - L_2)\sin(\alpha'_2 - L_3) \end{array}\right\}$$

$$+ \sin(L_1 - L_4)\sin(L_2 - L_3)\operatorname{tang}\beta'_2 \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - L_2)\sin(\alpha'_4 - L_3)$$

$$- \sin(L_1 - L_3)\sin(L_2 - L_4)\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\beta'_2 \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_1 - L_2)\sin(\alpha'_3 - L_3) \\ -\operatorname{tang}\beta'_1 \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - L_2)\sin(\alpha'_3 - L_3) \\ +\operatorname{tang}\beta'_1 \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_2)\sin(\alpha'_4 - L_3) \end{array}\right\}$$

und

$$\mathfrak{N}_2 = \sin(L_1 - L_2)\{\operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_4 - L_3) - \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - L_3)\}\{\operatorname{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3) + \operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - \alpha'_1) + \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2)\}$$
$$- \sin(L_1 - L_3)\{\operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_1 - L_2) - \operatorname{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - L_2)\}\{\operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - \alpha'_4) + \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - \alpha'_2) + \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3)\},$$

$$\mathfrak{N}_3 = \sin(L_2 - L_4)\{\operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_3 - L_3) - \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - L_3)\}\{\operatorname{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3) + \operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - \alpha'_1) + \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2)\}$$
$$- \sin(L_3 - L_4)\{\operatorname{tang}\beta'_1 \sin(\alpha'_3 - L_2) - \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - L_2)\}\{\operatorname{tang}\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - \alpha'_4) + \operatorname{tang}\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - \alpha'_2) + \operatorname{tang}\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3)\};$$

so ist:

$$u_1 = -\frac{R_1}{\sin(L_2-L_3)\cos\beta'_1}\cdot\frac{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_2)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_2)}{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_2)-\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_2)}\cdot\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}_3},$$

$$u_2 = \frac{R_2}{\sin(L_3-L_4)\cos\beta'_2}\cdot\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}_2},$$

$$u_3 = -\frac{R_3}{\sin(L_1-L_2)\cos\beta'_3}\cdot\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}_3},$$

$$u_4 = \frac{R_4}{\sin(L_2-L_3)\cos\beta'_4}\cdot\frac{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_3)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_3)}{\tang\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_3)-\tang\beta'_3\sin(\alpha'_4-L_3)}\cdot\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{N}_2}$$

Zur Berechnung von

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3; \quad x_4, y_4, z_4$$

hat man die folgenden Formeln:

$$x_1 = -R_1\cos L_1 - u_1\cos\alpha'_1\cos\beta'_1,$$
$$y_1 = -R_1\sin L_1 - u_1\sin\alpha'_1\cos\beta'_1,$$
$$z_1 = -u_1\sin\beta'_1;$$

$$x_2 = -R_2\cos L_2 - u_2\cos\alpha'_2\cos\beta'_2,$$
$$y_2 = -R_2\sin L_2 - u_2\sin\alpha'_2\cos\beta'_2,$$
$$z_2 = -u_2\sin\beta'_2;$$

$$x_3 = -R_3\cos L_3 - u_3\cos\alpha'_3\cos\beta'_3,$$
$$y_3 = -R_3\sin L_3 - u_3\sin\alpha'_3\cos\beta'_3,$$
$$z_3 = -u_3\sin\beta'_3;$$

$$x_4 = -R_4\cos L_4 - u_4\cos\alpha'_4\cos\beta'_4,$$
$$y_4 = -R_4\sin L_4 - u_4\sin\alpha'_4\cos\beta'_4,$$
$$z_4 = -u_4\sin\beta'_4.$$

Ferner ist:

$$A_1 = -R_1\cos(\alpha'_1 - L_1)\cos\beta'_1,$$
$$A_2 = -R_2\cos(\alpha'_2 - L_2)\cos\beta'_2,$$
$$A_3 = -R_3\cos(\alpha'_3 - L_3)\cos\beta'_3,$$
$$A_4 = -R_4\cos(\alpha'_4 - L_4)\cos\beta'_4;$$

und

$$B_1^2 = R_1^2\{1 - \cos(\alpha'_1 - L_1)^2\cos\beta'^2_1\},$$
$$B_2^2 = R_2^2\{1 - \cos(\alpha'_2 - L_2)^2\cos\beta'^2_2\},$$
$$B_3^2 = R_3^2\{1 - \cos(\alpha'_3 - L_3)^2\cos\beta'^2_3\},$$
$$B_4^2 = R_4^2\{1 - \cos(\alpha'_4 - L_4)^2\cos\beta'^2_4\}.$$

Endlich hat man zur Berechnung von

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4$$

die Formeln:

$$r_1 = \sqrt{(A_1 - u_1)^2 + B_1^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(A_2 - u_2)^2 + B_2^2},$$

$$r_3 = \sqrt{(A_3 - u_3)^2 + B_3^2},$$

$$r_4 = \sqrt{(A_4 - u_4)^2 + B_4^2}.$$

Am einfachsten für die numerische Rechnung stellt man, wie es mir scheint, die zur Berechnung der Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ \ u_4$$

erforderlichen Formeln auf folgende Art dar.

Man setze:

$$\mathrm{I} = \sin(L_1 - L_2)\{\tan\beta'_2 \sin(\alpha'_4 - L_3) - \tan\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - L_3)\},$$

$$\mathrm{I}^* = \sin(L_1 - L_3)\{\tan\beta'_2 \sin(\alpha'_1 - L_2) - \tan\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - L_2)\};$$

$$\mathrm{II} = \sin(L_4 - L_3)\{\tan\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - L_2) - \tan\beta'_1 \sin(\alpha'_3 - L_2)\},$$

$$\mathrm{II}^* = \sin(L_4 - L_2)\{\tan\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - L_3) - \tan\beta'_4 \sin(\alpha'_3 - L_3)\};$$

$$\mathrm{III} = \sin(L_1 - L_2)\{\tan\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_2) - \tan\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - L_2)\},$$

$$\mathrm{III}^* = \sin(L_3 - L_4)\{\tan\beta'_3 \sin(\alpha'_2 - L_3) - \tan\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - L_3)\};$$

$$\mathrm{IV} = \tan\beta'_1 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3) + \tan\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - \alpha'_1) + \tan\beta'_3 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2),$$

$$\mathrm{IV}^* = \tan\beta'_2 \sin(\alpha'_3 - \alpha'_4) + \tan\beta'_3 \sin(\alpha'_4 - \alpha'_2) + \tan\beta'_4 \sin(\alpha'_2 - \alpha'_3);$$

so ist:

$$u_2 = \frac{R_2}{\sin(L_3 - L_4)\cos\beta'_2} \cdot \frac{\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}^*} - \frac{\mathrm{II}^*}{\mathrm{I}}}{\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}^*} - \frac{\mathrm{IV}^*}{\mathrm{I}}},$$

$$u_3 = \frac{R_3}{\sin(L_1 - L_2)\cos\beta'_3} \cdot \frac{\frac{\mathrm{I}^*}{\mathrm{II}} - \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}^*}}{\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{II}} - \frac{\mathrm{IV}^*}{\mathrm{II}^*}},$$

$$u_4 = \frac{R_4 \sin(L_2 - L_4)}{R_2 \sin(L_2 - L_3)} \cdot \frac{\cos\beta'_2}{\cos\beta'_4} \cdot \frac{\mathrm{III}^*}{\mathrm{II}^*}\, u_2,$$

$$u_1 = \frac{R_1 \sin(L_1 - L_3)}{R_3 \sin(L_2 - L_3)} \cdot \frac{\cos\beta'_3}{\cos\beta'_1} \cdot \frac{\text{III}}{\text{I}^*} u_3 .$$

§. 9.

Die vorhergehende Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Lage der Ebene der Cometenbahn im Raume empfiehlt sich vorzüglich dadurch, dass alle gesuchten Grössen bloss durch lineare Gleichungen bestimmt werden, und also eine Zweideutigkeit, wie man diese Grössen zu nehmen hat, nie eintreten kann. Hat man nun aber die unbekannten Grössen auf diese Weise durch eine erste Näherung bestimmt, so wird man als eine **zweite** Näherung die Lage der Ebene der Cometenbahn bloss mittelst der Voraussetzung bestimmen, dass sie die vier nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien so schneidet, dass die drei Dreiecke

$$\Delta_{1,2},\quad \Delta_{2,3},\quad \Delta_{3,4}$$

den Zeitintervallen

$$\tau_{1,2} = t_2 - t_1,\quad \tau_{2,3} = t_3 - t_2,\quad \tau_{3,4} = t_4 - t_3$$

proportional sind, indem man also die bei der ersten Näherung gebrauchte Voraussetzung, dass die drei entsprechenden, zwischen der Sonne und den vier Oertern der Erde in ihrer Bahn liegenden Dreiecke in denselben Verhältnissen zu einander stehen, jetzt fallen lässt. Geht man nun von der in Rede stehenden Voraussetzung aus, so muss man sich der in §. 5. entwickelten Formeln bedienen, wo nun aber u_2 oder statt dessen u_3 durch eine Gleichung des zweiten Grades bestimmt wird, aber, auch wenn sich keine anderen Kriterien darbieten sollten, immer sicher entschieden werden kann, welche Wurzeln dieser quadratischen Gleichungen für u_2 oder u_3 genommen werden müssen, weil man erste Näherungswerthe dieser Grössen nach dem Vorhergehenden schon gefunden hat. Wir wollen nun auch die bei dieser zweiten Näherungsmethode zur Anwendung kommenden Grössen sämmtlich durch die geocentrischen Längen und Breiten

$$\alpha'_1,\ \beta'_1;\quad \alpha'_2,\ \beta'_2;\quad \alpha'_3,\ \beta'_3;\quad \alpha'_4,\ \beta'_4$$

des Cometen, durch die geocentrischen Längen

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$$

der Sonne, und die Vectoren

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4$$

derselben ausdrücken.

Zuvörderst hat man die folgenden Formeln:

$$\Theta = -R_2\{\tau_{1,2}R_3\sin(L_2-L_3)-\tau_{2,3}R_1\sin(L_1-L_2)\},$$

$$\overset{1}{\Theta} = -R_3\{\tau_{2,3}R_4\sin(L_3-L_4)-\tau_{3,4}R_2\sin(L_2-L_3)\};$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &= -R_1\{\cos\beta'_2\sin\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_1)-\sin\beta'_2\cos\beta'_3\sin(\alpha'_3-L_1)\}\\ &= -R_1\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_1)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}' &= -R_1\{\cos\beta'_1\sin\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_1)-\sin\beta'_1\cos\beta'_2\sin(\alpha'_2-L_1)\}\\ &= -R_1\cos\beta'_1\cos\beta'_2\{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_1)-\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{K}} &= -R_2\{\cos\beta'_3\sin\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_2)-\sin\beta'_3\cos\beta'_4\sin(\alpha'_4-L_2)\}\\ &= -R_2\cos\beta'_3\cos\beta'_4\{\tang\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_2)-\tang\beta'_3\sin(\alpha'_4-L_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{K}}{}' &= -R_2\{\cos\beta'_2\sin\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_2)-\sin\beta'_2\cos\beta'_3\sin(\alpha'_3-L_2)\}\\ &= -R_2\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_2)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1 &= -R_3\{\cos\beta'_2\sin\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_3)-\sin\beta'_2\cos\beta'_3\sin(\alpha'_3-L_3)\}\\ &= -R_3\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_3)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_3)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}'_1 &= -R_3\{\cos\beta'_1\sin\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_3)-\sin\beta'_1\cos\beta'_2\sin(\alpha'_2-L_3)\}\\ &= -R_3\cos\beta'_1\cos\beta'_2\{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_1-L_3)-\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-L_3)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{K}}_1 &= -R_4\{\cos\beta'_3\sin\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_4)-\sin\beta'_3\cos\beta'_4\sin(\alpha'_4-L_4)\}\\ &= -R_4\cos\beta'_3\cos\beta'_4\{\tang\beta'_4\sin(\alpha'_3-L_4)-\tang\beta'_3\sin(\alpha'_4-L_4)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{K}}{}'_1 &= -R_4\{\cos\beta'_2\sin\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_4)-\sin\beta'_2\cos\beta'_3\sin(\alpha'_3-L_4)\}\\ &= -R_4\cos\beta'_2\cos\beta'_3\{\tang\beta'_3\sin(\alpha'_2-L_4)-\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-L_4)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= -R_2\{\cos\beta'_3\sin\beta'_1\sin(\alpha'_3-L_2)-\sin\beta'_3\cos\beta'_1\sin(\alpha'_1-L_2)\}\\ &= -R_2\cos\beta'_3\cos\beta'_1\{\tang\beta'_1\sin(\alpha'_3-L_2)-\tang\beta'_3\sin(\alpha'_1-L_2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{L}} &= -R_3\{\cos\beta'_4\sin\beta'_2\sin(\alpha'_4-L_3)-\sin\beta'_4\cos\beta'_2\sin(\alpha'_2-L_3)\}\\ &= -R_3\cos\beta'_4\cos\beta'_2\{\tang\beta'_2\sin(\alpha'_4-L_3)-\tang\beta'_4\sin(\alpha'_2-L_3)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega = &-\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)\sin\beta'_1\cos\beta'_2\cos\beta'_3\\ &-\sin(\alpha'_3-\alpha'_1)\cos\beta'_1\sin\beta'_2\cos\beta'_3\\ &-\sin(\alpha'_1-\alpha'_2)\cos\beta'_1\cos\beta'_2\sin\beta'_3\\ = &-\cos\beta'_1\cos\beta'_2\cos\beta'_3\left\{\begin{array}{l}\tang\beta'_1\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)\\ +\tang\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_1)\\ +\tang\beta'_3\sin(\alpha'_1-\alpha'_2)\end{array}\right\},\end{aligned}$$

$$\overset{1}{\Omega} = -\sin(\alpha'_3-\alpha'_4)\sin\beta'_2\cos\beta'_3\cos\beta'_4$$
$$-\sin(\alpha'_4-\alpha'_2)\cos\beta'_2\sin\beta'_3\cos\beta'_4$$
$$-\sin(\alpha'_2-\alpha'_3)\cos\beta'_2\cos\beta'_3\sin\beta'_4$$
$$= -\cos\beta'_2\cos\beta'_3\cos\beta'_4\left\{\begin{array}{l} \quad\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_3-\alpha'_4) \\ +\operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4-\alpha'_2) \\ +\operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2-\alpha'_3) \end{array}\right\}.$$

Ferner ist:

$$P_1 = -\Theta\sin\beta'_3,$$

$$P_2 = -\overset{1}{\Theta}\sin\beta'_4,$$

$$P_3 = +\Theta\sin\beta'_1,$$

$$P_4 = +\overset{1}{\Theta}\sin\beta'_2;$$

$$Q_1 = -\tau_{1,2}\mathfrak{B}_1 - \tau_{2,3}\mathfrak{B},$$

$$Q_2 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{B}}_1 - \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{B}},$$

$$Q_3 = -\tau_{1,2}\mathfrak{B}'_1 - \tau_{2,3}\mathfrak{B}',$$

$$Q_4 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{B}}'_1 - \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{B}}';$$

$$S_1 = \tau_{2,3}\mathfrak{L},$$

$$S_2 = \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{L}},$$

$$S_3 = \tau_{1,2}\mathfrak{L},$$

$$S_4 = \tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{L}};$$

$$T_1 = -\tau_{2,3}\Omega,$$

$$T_2 = -\tau_{3,4}\overset{1}{\Omega},$$

$$T_3 = -\tau_{1,2}\Omega,$$

$$T_4 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\Omega}.$$

Nun wird u_2 mittelst der quadratischen Gleichung

$$0 = (S_2T_3 + T_2Q_3)u_2u_2$$
$$+(S_2S_3 - Q_2Q_3 + T_2P_3 - P_2T_3)u_2$$
$$-(P_2S_3 + Q_2P_3),$$

oder u_3 mittelst der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned}0= & (T_2S_3+Q_2T_3)u_3u_3\\ & +(S_2S_3-Q_2Q_3+P_2T_3-T_2P_3)u_3\\ & -(S_2P_3+P_2Q_3)\end{aligned}$$

gefunden. Hat man aber u_2 gesucht, so erhält man

$$u_1,\quad u_3,\quad u_4$$

mittelst der Formeln:

$$u_1=\frac{P_1+Q_1u_2}{S_1+T_1u_2},\quad u_3=\frac{P_3+Q_3u_2}{S_3+T_3u_2},\quad u_4=\frac{P_4+Q_4u_3}{S_4+T_4u_3};$$

und wenn man u_3 gesucht hat, so ergeben sich

$$u_1,\quad u_2,\quad u_4$$

mittelst der Formeln:

$$u_2=\frac{P_2+Q_2u_3}{S_2+T_2u_3},\quad u_1=\frac{P_1+Q_1u_2}{S_1+T_1u_2},\quad u_4=\frac{P_4+Q_4u_3}{S_4+T_4u_3}.$$

Zur Berechnung von

$$x_1,\, y_1,\, z_1;\quad x_2,\, y_2,\, z_2;\quad x_3,\, y_3,\, z_3;\quad x_4,\, y_4,\, z_4$$

und

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4;$$

$$B_1^2,\quad B_2^2,\quad B_3^2,\quad B_4^2;$$

$$r_1,\quad r_2,\quad r_3,\quad r_4$$

dienen ganz dieselben Formeln wie im vorhergehenden Paragraphen, die wir daher hier nicht wiederholen wollen, sondern uns auf den vorhergehenden Paragraphen zu verweisen begnügen.

§. 10.

Die Gleichung der Ebene der Cometenbahn wollen wir nun durch

$$\mathfrak{S}x+\mathfrak{T}y+\mathfrak{U}z=0$$

bezeichnen. Dann kann man, wie leicht erhellen wird,

$$\mathfrak{S}=y_1z_2-y_2z_1,$$

$$\mathfrak{T}=z_1x_2-z_2x_1,$$

$$\mathfrak{U}=x_1y_2-x_2y_1$$

$$\overset{1}{\Omega} = -\sin(\alpha'_3 - \alpha'_4)\sin\beta'_2\cos\beta'_3\cos\beta'_4$$
$$-\sin(\alpha'_4 - \alpha'_2)\cos\beta'_2\sin\beta'_3\cos\beta'_4$$
$$-\sin(\alpha'_2 - \alpha'_3)\cos\beta'_2\cos\beta'_3\sin\beta'_4$$
$$= -\cos\beta'_2\cos\beta'_3\cos\beta'_4 \left\{ \begin{array}{l} \quad\operatorname{tang}\beta'_2\sin(\alpha'_3 - \alpha'_4) \\ + \operatorname{tang}\beta'_3\sin(\alpha'_4 - \alpha'_2) \\ + \operatorname{tang}\beta'_4\sin(\alpha'_2 - \alpha'_3) \end{array} \right\}.$$

Ferner ist:

$$P_1 = -\Theta\sin\beta'_3,$$
$$P_2 = -\overset{1}{\Theta}\sin\beta'_4,$$
$$P_3 = +\Theta\sin\beta'_1,$$
$$P_4 = +\overset{1}{\Theta}\sin\beta'_2;$$
$$Q_1 = -\tau_{1,2}\mathfrak{B}_1 - \tau_{2,3}\mathfrak{B},$$
$$Q_2 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{B}}_1 - \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{B}},$$
$$Q_3 = -\tau_{1,2}\mathfrak{B}'_1 - \tau_{2,3}\mathfrak{B}',$$
$$Q_4 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{B}}'_1 - \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{B}}';$$
$$S_1 = \tau_{2,3}\mathfrak{L},$$
$$S_2 = \tau_{3,4}\overset{1}{\mathfrak{L}},$$
$$S_3 = \tau_{1,2}\mathfrak{L},$$
$$S_4 = \tau_{2,3}\overset{1}{\mathfrak{L}};$$
$$T_1 = -\tau_{2,3}\Omega,$$
$$T_2 = -\tau_{3,4}\overset{1}{\Omega},$$
$$T_3 = -\tau_{1,2}\Omega,$$
$$T_4 = -\tau_{2,3}\overset{1}{\Omega}.$$

Nun wird u_2 mittelst der quadratischen Gleichung

$$0 = (S_2T_3 + T_2Q_3)u_2u_2$$
$$+ (S_2S_3 - Q_2Q_3 + T_2P_3 - P_2T_3)u_2$$
$$-(P_2S_3 + Q_2P_3),$$

oder u_3 mittelst der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned}0 = &(T_2 S_3 + Q_2 T_3) u_3 u_3 \\ &+ (S_2 S_3 - Q_2 Q_3 + P_2 T_3 - T_2 P_3) u_3 \\ &- (S_2 P_3 + P_2 Q_3)\end{aligned}$$

gefunden. Hat man aber u_2 gesucht, so erhält man

$$u_1, \quad u_3, \quad u_4$$

mittelst der Formeln:

$$u_1 = \frac{P_1 + Q_1 u_2}{S_1 + T_1 u_2}, \quad u_3 = \frac{P_3 + Q_3 u_2}{S_3 + T_3 u_2}, \quad u_4 = \frac{P_4 + Q_4 u_3}{S_4 + T_4 u_3};$$

und wenn man u_3 gesucht hat, so ergeben sich

$$u_1, \quad u_2, \quad u_4$$

mittelst der Formeln:

$$u_2 = \frac{P_2 + Q_2 u_3}{S_2 + T_2 u_3}, \quad u_1 = \frac{P_1 + Q_1 u_2}{S_1 + T_1 u_2}, \quad u_4 = \frac{P_4 + Q_4 u_3}{S_4 + T_4 u_3}.$$

Zur Berechnung von

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3; \quad x_4, y_4, z_4$$

und

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4;$$

$$B_1^2, \quad B_2^2, \quad B_3^2, \quad B_4^2;$$

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4$$

dienen ganz dieselben Formeln wie im vorhergehenden Paragraphen, die wir daher hier nicht wiederholen wollen, sondern uns auf den vorhergehenden Paragraphen zu verweisen begnügen.

§. 10.

Die Gleichung der Ebene der Cometenbahn wollen wir nun durch

$$\mathfrak{S}x + \mathfrak{T}y + \mathfrak{U}z = 0$$

bezeichnen. Dann kann man, wie leicht erhellen wird,

$$\mathfrak{S} = y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

$$\mathfrak{T} = z_1 x_2 - z_2 x_1,$$

$$\mathfrak{U} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

setzen. Nun ist aber bekanntlich

$$x_1 = -R_1 \cos L_1 - u_1 \cos\alpha'_1 \cos\beta'_1,$$

$$y_1 = -R_1 \sin L_1 - u_1 \sin\alpha'_1 \cos\beta'_1,$$

$$z_1 = -u_1 \sin\beta'_1$$

und

$$x_2 = -R_2 \cos L_2 - u_2 \cos\alpha'_2 \cos\beta_2',$$

$$y_2 = -R_2 \sin L_2 - u_2 \sin\alpha'_2 \cos\beta'_2,$$

$$z_2 = -u_2 \sin\beta'_2;$$

also wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} = {} & R_1 u_2 \sin L_1 \sin\beta'_2 - R_2 u_1 \sin L_2 \sin\beta'_1 \\
& + u_1 u_2 (\sin\alpha'_1 \cos\beta'_1 \sin\beta'_2 - \sin\alpha'_2 \cos\beta'_2 \sin\beta_1') \\
= {} & R_1 u_2 \sin L_1 \sin\beta'_2 - R_2 u_1 \sin L_2 \sin\beta'_1 \\
& + u_1 u_2 \cos\beta'_1 \cos\beta'_2 (\sin\alpha'_1 \operatorname{tang}\beta'_2 - \sin\alpha'_2 \operatorname{tang}\beta'_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} = {} & -R_1 u_2 \cos L_1 \sin\beta'_2 + R_2 u_1 \cos L_2 \sin\beta_1' \\
& - u_1 u_2 (\cos\alpha'_1 \cos\beta'_1 \sin\beta'_2 - \cos\alpha'_2 \cos\beta'_2 \sin\beta'_1) \\
= {} & -R_1 u_2 \cos L_1 \sin\beta'_2 + R_2 u_1 \cos L_2 \sin\beta'_1 \\
& - u_1 u_2 \cos\beta'_1 \cos\beta'_2 (\cos\alpha_1' \operatorname{tang}\beta'_2 - \cos\alpha'_2 \operatorname{tang}\beta'_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} = {} & -R_1 R_2 \sin(L_1 - L_2) \\
& + R_1 u_2 \sin(\alpha'_2 - L_1) \cos\beta_2' \\
& - R_2 u_1 \sin(\alpha'_1 - L_2) \cos\beta_1' \\
& - u_1 u_2 \sin(\alpha'_1 - \alpha'_2) \cos\beta_1' \cos\beta_2'.
\end{aligned}$$

Die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene der Comete bahn mit der Ebene der xy ist

$$\mathfrak{S}x + \mathfrak{T}y = 0$$

oder

$$y = -\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{T}} x.$$

Bezeichnen wir also den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der Durchschnittslinie der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der xy mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, durch $\overline{\omega}$; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$\tang\overline{\omega} = -\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{T}}.$$

Bezeichnen wir ferner den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil der Ebene der Cometenbahn nach der Seite hin, auf welcher der positive Theil der Axe der y liegt, mit der Ebene der xy einschliesst, durch i; so ist nach den bekannten Formeln der analytischen Geometrie:

$$\cos i^2 = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2+\mathfrak{U}^2},$$

also

$$\sin i^2 = \frac{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2+\mathfrak{U}^2};$$

folglich

$$\cot i^2 = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2} = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{T}^2(1+\tang\overline{\omega}^2)} = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2(1+\cot\overline{\omega}^2)}$$
$$= \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{T}^2\sec\overline{\omega}^2} = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2\operatorname{cosec}\overline{\omega}^2},$$

oder

$$\cot i^2 = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2}\sin\overline{\omega}^2 = \frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{T}^2}\cos\overline{\omega}^2.$$

Also ist

$$\cot i = \pm\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{S}}\sin\overline{\omega},$$

und weil nun

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{S}\cot\overline{\omega}, \quad \mathfrak{U} = \pm\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\overline{\omega}\cot i$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$x - y\cot\overline{\omega} \pm z\operatorname{cosec}\overline{\omega}\cot i = 0$$

oder

$$x\sin\overline{\omega} - y\cos\overline{\omega} \pm z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene Cometenbahn, wo sich nun aber frägt, wie in diesen Gleichungen die Zeichen zu nehmen sind, worüber sich auf folgende Art eine Bestimmung geben lässt.

Man nehme den auf der positiven Seite der Axe der x liegenden Theil der Durchschnittslinie der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der xy als den positiven Theil der Axe der x'' eines durch den Mittelpunkt der Sonne in der Ebene der xy gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems der $x''y''$, und den positiven Theil der Axe der y'' so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x'' an durch den rechten Winkel $(x''y'')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y'' zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Dann ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit

$$x = x'' \cos \overline{\omega} - y'' \sin \overline{\omega},$$
$$y = x'' \sin \overline{\omega} + y'' \cos \overline{\omega};$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen respective mit $\sin\overline{\omega}$, $\cos\overline{\omega}$ multiplicirt, und dann die zweite von der ersten abzieht:

$$x \sin\overline{\omega} - y \cos\overline{\omega} = -y''.$$

Also ist nach dem Obigen die Gleichung der Ebene der Cometenbahn

$$-y'' \pm z \cot i = 0$$

oder

$$z = \pm y'' \tang i.$$

Dies ist natürlich auch die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der $y''z$. Nach den Principien der analytischen Geometrie ist aber, wie durch eine einfache Betrachtung sogleich erhellen wird, die Gleichung dieser Durchschnittslinie

$$z = y'' \tang i \text{ oder } z = y'' \tang(180^0 - i),$$

d. i.

$$z = y'' \tang i \text{ oder } z = -y'' \tang i,$$

jenachdem

$$\overline{\omega} < 90^0 \text{ oder } \overline{\omega} > 90^0$$

ist, woraus sich auf der Stelle ergiebt, dass man in den obigen Gleichungen die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem

$$\bar{\omega} < 90^0 \text{ oder } \bar{\omega} > 90^0$$

ist.

Man kann sich aber von dem doppelten Zeichen ganz unabhängig machen, wenn man, wie von jetzt an geschehen soll, unter i den 180^0 nicht übersteigenden Winkel versteht, den der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der xy nach der Seite des positiven Theils der Axe der y'' hin einschliesst. Unter dieser Voraussetzung hat man nämlich, wie leicht erhellen wird, für i im Obigen i oder $180^0 - i$ zu setzen, jenachdem $\bar{\omega} < 90^0$ oder $\bar{\omega} > 90^0$ ist. Weil nun für $\bar{\omega} < 90^0$ nach dem Vorhergehenden

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} + z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Cometenbahn ist und i für i gesetzt werden muss, so ist auch unter der neuen rücksichtlich des Winkels i gemachten Voraussetzung

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} + z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Cometenbahn. Für $\bar{\omega} > 90^0$ ist nach dem Vorhergehenden

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} - z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Cometenbahn, und es muss jetzt $180^0 - i$ für i gesetzt werden, welches wieder

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} + z\cot i = 0$$

für die Gleichung der Ebene der Cometenbahn giebt. Also ist unter der neuen rücksichtlich des Winkels i gemachten Voraussetzung immer

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} + z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Cometenbahn, und folglich nach dem Obigen unter dieser Voraussetzung natürlich auch immer

$$\cot i = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{S}} \sin\bar{\omega}.$$

Versteht man also unter i den 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der xy nach der Seite des positiven Theils der Axe der y'' hin einschliesst, so hat man zur Berechnung der 180^0 nicht übersteigenden Winkel $\bar{\omega}$ und i die beiden folgenden gar keiner Zweideutigkeit unterliegenden Formeln:

$$\tang\bar{\omega} = -\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{T}}, \quad \cot i = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{S}} \sin\bar{\omega}.$$

Wir wollen nun den Mittelpunkt der Sonne als den Anfang eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $x''' y''' z'''$ annehmen. Die Ebene der Cometenbahn soll die Ebene der $x''' y'''$, und der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der Durchschnittslinie der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der xy der positive Theil der Axe der x''' sein. Die positiven Theile der Axen der y''' und z''' sollen so angenommen werden, dass sie auf der positiven Seite der Ebene der xy liegen. Dann haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$x = x''' \cos(xx''') + y''' \cos(xy''') + z''' \cos(xz'''),$$

$$y = x''' \cos(yx''') + y''' \cos(yy''') + z''' \cos(yz'''),$$

$$z = x''' \cos(zx''') + y''' \cos(zy''') + z''' \cos(zz''');$$

wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der neun in diesen Gleichungen enthaltenen Cosinusse ankommt, wozu wir auf folgende Art gelangen können.

Man muss zwei Fälle, jenachdem $\bar{\omega} < 90^0$ oder $\bar{\omega} > 90^0$ ist, und in jedem dieser beiden Fälle wieder zwei Fälle, jenachdem $i < 90^0$ oder $i > 90^0$ ist, unterscheiden.

Wenn $\bar{\omega} < 90^0$ ist, welchem Falle Taf. I. Fig. 1. entspricht, und die ersten und zweiten Ausdrücke in den Klammern im Nachstehenden sich immer respective auf die Fälle $i < 90^0$ und $i > 90^0$ beziehen, so ergeben sich aus der Betrachtung der Figur und aus den Principien der sphärischen Trigonometrie leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\cos(xx''') = \cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''') = \cos(90^0 - \bar{\omega}) = \sin\bar{\omega},$$
$$\cos(zx''') = \cos 90^0 = 0;$$

$$\cos(xy''') = \left\{\begin{matrix} \cos(90^0 + \bar{\omega}) \cos i \\ \cos(90^0 - \bar{\omega}) \cos(180^0 - i) \end{matrix}\right\} = -\sin\bar{\omega} \cos i,$$

$$\cos(yy''') = \left\{\begin{matrix} \cos\bar{\omega} \cos i \\ \cos(180^0 - \bar{\omega}) \cos(180^0 - i) \end{matrix}\right\} = \cos\bar{\omega} \cos i,$$

$$\cos(zy''') = \left\{\begin{matrix} \cos(90^0 - i) \\ \cos(i - 90^0) \end{matrix}\right\} = \sin i;$$

$$\cos(xz''') = \left\{\begin{matrix} \cos(90^0 - \bar{\omega}) \cos(90^0 - i) \\ \cos(90^0 + \bar{\omega}) \cos(i - 90^0) \end{matrix}\right\} = \pm \sin\bar{\omega} \sin i,$$

$$\cos(yz''') = \left\{\begin{matrix} \cos(180^0 - \bar{\omega}) \cos(90^0 - i) \\ \cos\bar{\omega} \cos(i - 90^0) \end{matrix}\right\} = \mp \cos\bar{\omega} \sin i,$$

$$\cos(zz''') = \left\{\begin{matrix}\cos i \\ \cos(180^0 - i)\end{matrix}\right\} = \pm \cos i.$$

Wenn $\bar{\omega} > 90^0$ ist, welchem Falle Taf. I. Fig. 2. entspricht, und der die ersten und zweiten Ausdrücke in den Klammern im chstehenden sich immer respective auf die Fälle $i < 90^0$ und 90^0 beziehen, so ergeben sich eben so leicht wie vorher aus r Betrachtung der Figur und den Principien der sphärischen igonometrie die folgende Ausdrücke:

$$\cos(xx''') = \cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''') = \cos(\bar{\omega} - 90^0) = \sin\bar{\omega},$$
$$\cos(zx''') = \cos 90^0 = 0;$$

$$\cos(xy''') = \left\{\begin{matrix}\cos(270^0 - \bar{\omega})\cos i \\ \cos(\bar{\omega} - 90^0)\cos(180^0 - i)\end{matrix}\right\} = -\sin\bar{\omega}\cos i,$$

$$\cos(yy''') = \left\{\begin{matrix}\cos\bar{\omega}\cos i \\ \cos(180^0 - \bar{\omega})\cos(180^0 - i)\end{matrix}\right\} = \cos\bar{\omega}\cos i,$$

$$\cos(zy''') = \left\{\begin{matrix}\cos(90^0 - i) \\ \cos(i - 90^0)\end{matrix}\right\} = \sin i;$$

$$\cos(xz''') = \left\{\begin{matrix}\cos(\bar{\omega} - 90^0)\cos(90^0 - i) \\ \cos(270^0 - \bar{\omega})(\cos(i - 90^0)\end{matrix}\right\} = \pm \sin\bar{\omega}\sin i,$$

$$\cos(yz''') = \left\{\begin{matrix}\cos(180^0 - \bar{\omega})\cos(90^0 - i) \\ \cos\bar{\omega}\cos(i - 90^0)\end{matrix}\right\} = \mp \cos\bar{\omega}\sin i,$$

$$\cos(zz''') = \left\{\begin{matrix}\cos i \\ \cos(180^0 - i)\end{matrix}\right\} = \pm \cos i.$$

Hiernach ist also allgemein, wenn man, jenachdem $i < 90^0$ r $i > 90^0$ ist, in den folgenden Formeln die oberen oder un- n Zeichen nimmt:

$$\cos(xx''') = \cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''') = \sin\bar{\omega},$$
$$\cos(zx''') = 0;$$

$$\cos(xy''') = -\sin\bar{\omega}\cos i,$$
$$\cos(yy''') = \cos\bar{\omega}\cos i,$$
$$\cos(zy''') = \sin i;$$

$$\cos(xz''') = \pm \sin\bar{\omega}\sin i,$$
$$\cos(yz''') = \mp \cos\bar{\omega}\sin i,$$
$$\cos(zz''') = \pm \cos i;$$

also

$$x = x''' \cos\tilde{\omega} - y''' \sin\tilde{\omega} \cos i \pm z''' \sin\tilde{\omega} \sin i,$$
$$y = x''' \sin\tilde{\omega} + y''' \cos\tilde{\omega} \cos i \mp z''' \cos\tilde{\omega} \sin i,$$
$$z = y''' \sin i \pm z''' \cos i.$$

Für $z''' = 0$, d. h. für alle in der Ebene der Cometenbahn liegende Punkte, also natürlich auch für alle Punkte der Cometenbahn selbst, ist in völliger Allgemeinheit:

$$x = x''' \cos\tilde{\omega} - y''' \sin\tilde{\omega} \cos i,$$
$$y = x''' \sin\tilde{\omega} + y''' \cos\tilde{\omega} \cos i,$$
$$z = y''' \sin i.$$

Bezeichnet r den Vector des Cometen zur Zeit t, wo sich der Comet in dem Punkte $(x'''y''')$ seiner Bahn befindet, und ω den von diesem Vector mit dem positiven Theile der Axe der x''' eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x''' an durch den rechten Winkel $(x'''y''')$ hindurch von 0 bis 360° zählt; so ist in völliger Allgemeinheit:

$$x''' = r\cos\omega, \quad y''' = r\sin\omega;$$

also nach dem Obigen

$$x = r(\cos\omega \cos\tilde{\omega} - \sin\omega \sin\tilde{\omega} \cos i),$$
$$y = r(\cos\omega \sin\tilde{\omega} + \sin\omega \cos\tilde{\omega} \cos i),$$
$$z = r\sin\omega \sin i.$$

Die Gleichungen der zur Zeit t von der Erde nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinie in dem Systeme der xyz sind nach §. 7.:

$$R\cos L + x = z\cos\alpha' \cot\beta',$$
$$R\sin L + y = z\sin\alpha' \cot\beta';$$

oder

$$x - z\cos\alpha' \cot\beta' = -R\cos L,$$
$$y - z\sin\alpha' \cot\beta' = -R\sin L.$$

Daher hat man nach dem Obigen die beiden Gleichungen:

$$r(\cos\omega \cos\tilde{\omega} - \sin\omega \sin\tilde{\omega} \cos i - \cos\alpha' \cot\beta' \sin\omega \sin i)$$
$$= -R\cos L,$$

$$r(\cos\omega \sin\tilde{\omega} + \sin\omega \cos\tilde{\omega} \cos i - \sin\alpha' \cot\beta' \sin\omega \sin i)$$
$$= -R\sin L;$$

denen

$$r\cos\omega = -R\frac{\cos(L-\bar{\omega})\cos i + \sin(L-\alpha')\cot\beta'\sin i}{\cos i - \sin(\alpha'-\bar{\omega})\cot\beta'\sin i},$$

$$r\sin\omega = -R\frac{\sin(L-\bar{\omega})}{\cos i - \sin(\alpha'-\bar{\omega})\cot\beta'\sin i};$$

$$\tan\omega = \frac{\sin(L-\bar{\omega})}{\cos(L-\bar{\omega})\cos i + \sin(L-\alpha')\cot\beta'\sin i}$$

$$\cot\omega = \cos i\cot(L-\bar{\omega}) + \sin i\cot\beta'\frac{\sin(L-\alpha')}{\sin(L-\bar{\omega})}$$

; und für r hat man nach dem Obigen die Ausdrücke:

$$r = -\frac{R}{\cos\omega}\cdot\frac{\cos(L-\bar{\omega})\cos i + \sin(L-\alpha')\cot\beta'\sin i}{\cos i - \sin(\alpha'-\bar{\omega})\cot\beta'\sin i},$$

$$r = -\frac{R}{\sin\omega}\cdot\frac{\sin(L-\bar{\omega})}{\cos i - \sin(\alpha'-\bar{\omega})\cot\beta'\sin i}.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen

$$r(\cos\omega\cos\bar{\omega} - \sin\omega\sin\bar{\omega}\cos i - \cos\alpha'\cot\beta'\sin\omega\sin i) = -R\cos L,$$

$$r(\cos\omega\sin\bar{\omega} + \sin\omega\cos\bar{\omega}\cos i - \sin\alpha'\cot\beta'\sin\omega\sin i) = -R\sin L$$

ιinα', die zweite mit cos α', und zieht dann die zweite Glei-
g von der ersten ab, so erhält man:

$$r = -\frac{R\sin(\alpha'-L)}{\cos\omega\sin(\alpha'-\bar{\omega}) - \sin\omega\cos i\cos(\alpha'-\bar{\omega})}.$$

$$\cos\omega\sin(\alpha'-\bar{\omega}) - \sin\omega\cos i\cos(\alpha'-\bar{\omega})$$

$$\text{ι}\omega\sin(\alpha'-\bar{\omega})(\cos\tfrac{1}{2}i^2 + \sin\tfrac{1}{2}i^2) - \sin\omega\cos(\alpha'-\bar{\omega})(\cos\tfrac{1}{2}i^2 - \sin\tfrac{1}{2}i^2)$$

$$= \sin(\alpha'-\bar{\omega}-\omega)\cos\tfrac{1}{2}i^2 + \sin(\alpha'-\bar{\omega}+\omega)\sin\tfrac{1}{2}i^2$$

ist, so ist auch

$$r = -\frac{R\sin(\alpha'-L)}{\sin(\alpha'-\overline{\omega}-\omega)\cos\frac{1}{2}i^2+\sin(\alpha'-\overline{\omega}+\omega)\sin\frac{1}{2}i^2}.$$

Die Formeln

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin(L-\overline{\omega})}{\cos(L-\overline{\omega})\cos i+\sin(L-\alpha')\cot\beta'\sin i}$$

und

$$\cot\omega = \cos i\cot(L-\overline{\omega})+\sin i\cot\beta'\frac{\sin(L-\alpha')}{\sin(L-\overline{\omega})}.$$

liefern für ω jederzeit zwei um 180° von einander verschiedene Werthe. Man sieht aber sogleich aus den vorhergehenden für r entwickelten Ausdrücken, dass diese beiden Werthe von ω für r jederzeit zwei Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern; und da nun r seiner Natur nach immer positiv sein muss, so kann es nie zweifelhaft sein, welchen der beiden Werthe von ω man in jedem Falle zu nehmen hat.

Berechnet man die beiden Hülfswinkel v, w mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang}v = \frac{\sin(L-\alpha')}{\cos(L-\overline{\omega})}\cot\beta',$$

$$\operatorname{tang}w = \sin(\alpha'-\overline{\omega})\cot\beta';$$

so ist nach dem Obigen:

$$r\cos\omega = -R\cos(L-\overline{\omega})\frac{\cos(i-v)\cos w}{\cos(i+w)\cos v},$$

$$r\sin\omega = -R\sin(L-\overline{\omega})\frac{\cos w}{\cos(i+w)};$$

also

$$\operatorname{tang}w = \frac{\operatorname{tang}(L-\overline{\omega})\cos v}{\cos(i-v)}$$

und

$$r = -R\cos(L-\overline{\omega})\frac{\cos(i-v)\cos w}{\cos\omega\cos(i+w)\cos v},$$

$$r = -R\sin(L-\overline{\omega})\frac{\cos w}{\sin\omega\cos(i+w)}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass man die den bekanntlich ach ihrer Grösse aufsteigend geordneten Zeiten

$$t_1, t_2, t_3, t_4$$

ntsprechenden Werthe

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

es vorher im Allgemeinen durch ω bezeichneten Winkels be- echnet habe. Dann hat man die folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Es sei $\bar{\omega} < 90^\circ$, $i < 90^\circ$.

1. Wenn die Winkel

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

achsen, so ist der Comet rechtläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocentri- che Länge des aufsteigenden Knotens.

2. Wenn die Winkel

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

ıbnehmen, so ist der Comet rückläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocen- rische Länge des niedersteigenden Knotens.

II. Es sei $\bar{\omega} < 90^\circ$, $i > 90^\circ$.

1. Wenn die Winkel

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

vachsen, so ist der Comet rückläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocentri- iche Länge des aufsteigenden Knotens.

2. Wenn die Winkel

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

ınehmen, so ist der Comet rechtläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocen- ische Länge des niedersteigenden Knotens.

III. Es sei $\bar{\omega} > 90^\circ$, $i < 90^\circ$.

1. Wenn die Winkel

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

ıchsen, so ist der Comet rechtläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocentri- he Länge des aufsteigenden Knotens.

2. Wenn die Winkel

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$$

abnehmen, so ist der Comet rückläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocentrische Länge des niedersteigenden Knotens.

IV. Es sei $\bar{\omega} > 90^0$, $i > 90^0$.

1. Wenn die Winkel

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$$

wachsen, so ist der Comet rückläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens.

2. Wenn die Winkel

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$$

abnehmen, so ist der Comet rechtläufig, und $\bar{\omega}$ ist die heliocentrische Länge des niedersteigenden Knotens.

§. 11.

Die Systeme der xyz und $x'y'z'$ wollen wir jetzt wieder ganz wie vorher in §. 7. annehmen. Nun werde aber die von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem aufsteigenden Knoten des Cometen gezogene gerade Linie als der positive Theil der Axe der x'' eines in der Ebene der xy durch den Mittelpunkt der Sonne gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems der $x''y''$, und der positive Theil der Axe der y'' so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x'' an durch den rechten Winkel $(x''y'')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y'' zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Dann ist, wenn jetzt $\bar{\omega}$ die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens bezeichnet, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x = x''\cos\bar{\omega} - y''\sin\bar{\omega},$$
$$y = x''\sin\bar{\omega} + y''\cos\bar{\omega};$$

also, wie man leicht findet:

$$x'' = \quad x\cos\bar{\omega} + y\sin\bar{\omega},$$
$$y'' = -x\sin\bar{\omega} + y\cos\bar{\omega}.$$

Die Gleichung der Ebene der Cometenbahn in dem Systeme der xyz sei

$$\mathfrak{S}x+\mathfrak{T}y+\mathfrak{U}z=0^{*}),$$

und i sei der spitze Neigungswinkel der Ebene der Cometenbahn gegen die Ebene der xy, d. h. gegen die Ebene der Ekliptik.

Die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene der Cometenbahn mit der Ebene der xy ist also

$$\mathfrak{S}x+\mathfrak{T}y=0$$

oder

$$y=-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{T}}x,$$

folglich nach den Lehren der analytischen Geometrie offenbar

$$\tan\mathrm{g}\,\overline{\omega}=-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{T}}.$$

Ferner ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\cos i^2=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2+\mathfrak{U}^2},\quad \sin i^2=\frac{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2+\mathfrak{U}^2};$$

also

$$\cot i^2=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2+\mathfrak{T}^2}=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{T}^2(1+\tan\mathrm{g}\,\overline{\omega}^2)}=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2(1+\cot\overline{\omega}^2)}$$

$$=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{T}^2\sec\overline{\omega}^2}=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2\operatorname{cosec}\overline{\omega}^2}$$

oder

$$\cot i^2=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{S}^2}\sin\overline{\omega}^2=\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{T}^2}\cos\overline{\omega}^2,$$

folglich

$$\cot i=\pm\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{S}}\sin\overline{\omega};$$

und weil nun

$$\mathfrak{T}=-\mathfrak{S}\cot\overline{\omega},\ \mathfrak{U}=\pm\mathfrak{S}\operatorname{cosec}\overline{\omega}\cot i$$

ist, so ist nach dem Obigen

---

*) Wo jetzt $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ nicht mehr immer dasselbe bedeuten wie vorher.

$$x - y\cot\bar{\omega} \pm z\operatorname{cosec}\bar{\omega}\cot i = 0$$

oder

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} \pm z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Cometenbahn, wo sich nun aber wieder frägt, wie in diesen Gleichungen die Zeichen zu nehmen sind, worüber sich auf folgende Art eine Entscheidung geben lässt.

Nach dem Obigen ist nämlich

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} = -y'',$$

was, in die Gleichung der Ebene der Cometenbahn gesetzt, die Gleichung

$$-y'' \pm z\cot i = 0$$

oder

$$z = \pm y''\tan g i$$

giebt. Nun erhellelt aber leicht, dass unter den gemachten Voraussetzungen, wenn der Comet rechtläufig ist, y'' und z stets gleiche, wenn dagegen der Comet rückläufig ist, y'' und z stets ungleiche Vorzeichen haben, woraus sich, da i spitz, also $\tan g i$ positiv ist, mittelst der vorhergehenden Gleichung ergiebt, dass man in den obigen Gleichungen die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem der Comet rechtläufig oder rückläufig ist.

Wir wollen nun den Mittelpunkt der Sonne als den Anfang eines neuen in der Ebene der Cometenbahn liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'''y'''$, und die von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem aufsteigenden Knoten des Cometen gezogene gerade Linie als den positiven Theil der Axe der x''', den positiven Theil der Axe der y''' aber so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x''' durch den rechten Winkel $(x'''y''')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y''' zu gelangen, in demselben Sinne bewegen muss, in welchem sich der Comet in der Ebene seiner Bahn bewegt. Dann haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten für Punkte in der Ebene der Cometenbahn die folgenden Gleichungen:

$$x = x'''\cos(xx''') + y'''\cos(xy'''),$$

$$y = x'''\cos(yx''') + y'''\cos(yy'''),$$

$$z = x'''\cos(zx''') + y'''\cos(zy''');$$

wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der sechs in diesen Gleichungen vorkommenden Cosinus ankommt, wozu wir auf folgende Art gelangen können, indem wir bemerken, dass im Nachstehenden die ersten und zweiten Ausdrücke in den Klammern

:h immer auf die Fälle der Rechtläufigkeit und Rückläufigkeit s Cometen beziehen.

Wenn

$$0<\bar{\omega}<90^0$$

t, welchem Falle Taf. I. Fig. 1*. entspricht; so ist nach einer blossen etrachtung der Figur und den Lehren der sphärischen Trigonoetrie:

$$\cos(xx''')=\cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''')=\cos(90^0-\bar{\omega})=\sin\bar{\omega};$$
$$\cos(xy''')=\begin{Bmatrix}\cos(90^0+\bar{\omega})\cos i\\ \cos(90^0-\bar{\omega})\cos i\end{Bmatrix}=\mp\sin\bar{\omega}\cos i,$$
$$\cos(yy''')=\begin{Bmatrix}\cos\bar{\omega}\cos i\\ \cos(180^0-\bar{\omega})\cos i\end{Bmatrix}=\pm\cos\bar{\omega}\cos i.$$

Wenn

$$90^0<\bar{\omega}<180^0$$

ist, welchem Falle Taf. I. Fig. 2*. entspricht; so ist:

$$\cos(xx''')=\cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''')=\cos(\bar{\omega}-90^0)=\sin\bar{\omega};$$
$$\cos(xy''')=\begin{Bmatrix}\cos(270^0-\bar{\omega})\cos i\\ \cos(\bar{\omega}-90^0)\cos i\end{Bmatrix}=\mp\sin\bar{\omega}\cos i,$$
$$\cos(yy''')=\begin{Bmatrix}\cos\bar{\omega}\cos i\\ \cos(180^0-\bar{\omega})\cos i\end{Bmatrix}=\pm\cos\bar{\omega}\cos i.$$

Wenn

$$180^0<\bar{\omega}<270^0$$

ist, welchem Falle Taf. I. Fig. 3*. entspricht; so ist:

$$\cos(xx''')=\cos(360^0-\bar{\omega})=\cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''')=\cos(\bar{\omega}-90^0)=\sin\bar{\omega};$$
$$\cos(xy''')=\begin{Bmatrix}\cos(270^0-\bar{\omega})\cos i\\ \cos(\bar{\omega}-90^0)\cos i\end{Bmatrix}=\mp\sin\bar{\omega}\cos i,$$
$$\cos(yy''')=\begin{Bmatrix}\cos(360^0-\bar{\omega})\cos i\\ \cos(\bar{\omega}-180^0)\cos i\end{Bmatrix}=\pm\cos\bar{\omega}\cos i.$$

Wenn

$$270^0 < \bar{\omega} < 360^0$$

ist, welchem Falle Taf. I. Fig. 4*. entspricht; so ist:

$$\cos(xx''') = \cos(360^0 - \bar{\omega}) = \cos\bar{\omega},$$
$$\cos(yx''') = \cos(450^0 - \bar{\omega}) = \sin\bar{\omega};$$

$$\cos(xy''') = \begin{Bmatrix}\cos(\bar{\omega} - 270^0)\cos i\\ \cos(450^0 - \bar{\omega})\cos i\end{Bmatrix} = \mp \sin\bar{\omega}\cos i,$$

$$\cos(yy''') = \begin{Bmatrix}\cos(360^0 - \bar{\omega})\cos i\\ \cos(\bar{\omega} - 180^0)\cos i\end{Bmatrix} = \pm \cos\bar{\omega}\cos i.$$

Also ist, wenn man nur immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Comet rechtläufig oder rückläufig ist, in völliger Allgemeinheit:

$$\cos(xx''') = \cos\bar{\omega},\quad \cos(xy''') = \mp \sin\bar{\omega}\cos i;$$
$$\cos(yx''') = \sin\bar{\omega},\quad \cos(yy''') = \pm \cos\bar{\omega}\cos i;$$

und daher nach dem Obigen

$$x = x'''\cos\bar{\omega} \mp y'''\sin\bar{\omega}\cos i,$$
$$y = x'''\sin\bar{\omega} \pm y'''\cos\bar{\omega}\cos i.$$

Leicht erhellet aber, dass immer

$$(zx''') = 90^0,\quad (zy''') = 90^0 - i;$$

also

$$\cos(zx''') = 0,\quad \cos(zy''') = \sin i$$

ist. Also ist mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher:

$$x = x'''\cos\bar{\omega} \mp y'''\sin\bar{\omega}\cos i,$$

$$y = x'''\sin\bar{\omega} \pm y'''\cos\bar{\omega}\cos i,$$

$$z = y'''\sin i.$$

Bezeichnen wir nun durch r den Vector des Cometen zur Zeit t, und durch ω den von diesem Vector mit der von der Sonne nach dem aufsteigenden Knoten des Cometen gezogenen geraden Linie eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von der in Rede stehenden geraden Linie an im Sinne der Bewegung des Cometen in der Ebene seiner Bahn von 0 bis 360° zählen, so ist in völliger Allgemeinheit

$$x''' = r\cos\omega,\quad y''' = r\sin\omega;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$x = r(\cos\bar{\omega}\cos\omega \mp \sin\bar{\omega}\cos i\sin\omega),$$

$$y = r(\sin\bar{\omega}\cos\omega \pm \cos\bar{\omega}\cos i\sin\omega),$$

$$z = r\sin i\sin\omega;$$

also, weil nach dem Obigen

$$x\sin\bar{\omega} - y\cos\bar{\omega} \pm z\cot i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Cometenbahn ist:

$$\left.\begin{array}{r}\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}\cos\omega \mp \sin\bar{\omega}^2\cos i\sin\omega \\ -\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}\cos\omega \mp \cos\bar{\omega}^2\cos i\sin\omega \\ \pm\cos i\sin\omega\end{array}\right\} = 0,$$

wie es sein muss.

Nun ist aber bekanntlich nach §. 7.

$$R\cos L + x = z\cos\alpha'\cot\beta',$$
$$R\sin L + y = z\sin\alpha'\cot\beta';$$

oder

$$x - z\cos\alpha'\cot\beta' = -R\cos L,$$

$$y - z\sin\alpha'\cot\beta' = -R\sin L;$$

also hat man nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen:

$$r(\cos\bar{\omega}\cos\omega \mp \sin\bar{\omega}\cos i\sin\omega - \cos\alpha'\cot\beta'\sin i\sin\omega)$$
$$= -R\cos L,$$

$$r(\sin\bar{\omega}\cos\omega \pm \cos\bar{\omega}\cos i\sin\omega - \sin\alpha'\cot\beta'\sin i\sin\omega)$$
$$= -R\sin L;$$

aus denen

$$r\cos\omega = -R\frac{\cos(L-\bar{\omega})\cos i \pm \sin(L-\alpha')\cot\beta'\sin i}{\cos i \mp \sin(\alpha'-\bar{\omega})\cot\beta'\sin i},$$

$$r\sin\omega = \mp R\frac{\sin(L-\bar{\omega})}{\cos i \mp \sin(\alpha'-\bar{\omega})\cot\beta'\sin i};$$

also

$$\tang\omega = \pm\frac{\sin(L-\bar{\omega})}{\cos(L-\bar{\omega})\cos i \pm \sin(L-\alpha')\cot\beta'\sin i}$$

oder

$$\cot\omega = \pm \cos i \cot(L-\overline{\omega}) + \sin i \cot\beta' \frac{\sin(L-\alpha')}{\sin(L-\overline{\omega})}$$

folgt; und für r hat man nach dem Vorhergehenden die A drücke:

$$r = -\frac{R}{\cos\omega} \cdot \frac{\cos(L-\overline{\omega})\cos i \pm \sin(L-\alpha')\cot\beta' \sin i}{\cos i \mp \sin(\alpha'-\overline{\omega})\cot\beta' \sin i},$$

$$r = \mp \frac{R}{\sin\omega} \cdot \frac{\sin(L-\overline{\omega})}{\cos i \mp \sin(\alpha'-\overline{\omega})\cot\beta' \sin i}.$$

Ob man ω zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 3 zu nehmen hat, entscheidet sich leicht und durch die Rechn selbst, weil für die beiden Werthe, die ω haben kann, die v stehenden Ausdrücke für r offenbar stets Werthe mit entgeg gesetzten Vorzeichen liefern, r aber natürlich seiner Natur n nur positiv sein kann.

Berechnet man die beiden Hülfswinkel v, w mittelst Formeln:

$$\tang v = \frac{\sin(L-\alpha')}{\sin(L-\overline{\omega})}\cot\beta',$$

$$\tang w = \sin(\alpha'-\overline{\omega})\cot\beta';$$

so ist nach dem Obigen:

$$r\cos\omega = -R\cos(L-\overline{\omega})\frac{\cos(i\mp v)\cos w}{\cos(i\pm w)\cos v},$$

$$r\sin\omega = \mp R\sin(L-\overline{\omega})\frac{\cos w}{\cos(i\pm w)};$$

also

$$\tang\omega = \pm \frac{\tang(L-\overline{\omega})\cos v}{\cos(i\mp v)},$$

und

$$r = -R\cos(L-\overline{\omega})\frac{\cos(i\mp v)\cos w}{\cos\omega\cos(i\pm w)\cos v},$$

$$r = \mp R\sin(L-\overline{\omega})\frac{\cos w}{\sin\omega\cos(i\pm w)}.$$

In diesen Formeln sind immer die oberen oder die unte Zeichen zu nehmen, jenachdem der Comet rechtläufig oder rü läufig ist.

§. 12.

Nehmen wir nun an, dass sich der Comet in einer Parabel bewegt habe, und bezeichnen den Winkel, welchen die von der Sonne nach seinem Perihelium gezogene gerade Linie mit der von der Sonne nach dem aufsteigenden Knoten des Cometen gezogenen geraden Linie einschliesst, indem wir diesen Winkel von der in Rede stehenden geraden Linie an im Sinne der Bewegung des Cometen von 0° bis 360° zählen, durch Θ; so liefern die den Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4 entsprechenden vier Beobachtungen des Cometen nach der Lehre von der Parabel*) die vier folgenden Gleichungen:

---

*) Man kann die nachher gebrauchte Gleichung der Parabel auf verschiedene Arten, z. B. auf folgende Art beweisen.

Die Gleichung der Parabel in Bezug auf das gewöhnliche Coordinatensystem der xy ist bekanntlich

$$y^2 = px.$$

Nehmen wir nun aber den Brennpunkt als den Anfangspunkt eines neuen dem Systeme der xy parallelen Coordinatensystems der x_1y_1 an, so ist

$$x = \frac{1}{4}p + x_1,\ y = y_1;$$

also nach dem Obigen:

$$y_1^2 = p\left(\frac{1}{4}p + x_1\right).$$

Bezeichnen wir ferner den Vector des Punktes (x_1y_1) durch r, und den von demselben mit dem positiven Theile der Axe der x_1, d. h. mit dem der beiden von dem Brennpunkte der Parabel ausgehenden Theile der Axe derselben, welcher nicht durch den Scheitel der Parabel geht, eingeschlossenen, auf gewöhnliche Weise von 0° bis 360° gezählten Winkel durch φ; so ist allgemein:

$$x_1 = r\cos\varphi,\ y_1 = r\sin\varphi;$$

also nach dem Obigen

$$r^2 \sin\varphi^2 = p\left(\frac{1}{4}p + r\cos\varphi\right),$$

folglich

$$r^2 \sin\varphi^2 - pr\cos\varphi = \frac{1}{4}p^2$$

oder

$$r^2 - \frac{p\cos\varphi}{\sin\varphi^2}r = \frac{p^2}{4\sin\varphi^2},$$

$$\left(r - \frac{p\cos\varphi}{2\sin\varphi^2}\right)^2 = \frac{p^2}{4\sin\varphi^2} + \frac{p^2\cos\varphi^2}{4\sin\varphi^4};$$

d. i.

$$\frac{1}{2}p=r_1\{1+\cos(\theta-\omega_1)\},$$

$$\frac{1}{2}p=r_2\{1+\cos(\theta-\omega_2)\},$$

$$\frac{1}{2}p=r_3\{1+\cos(\theta-\omega_3)\},$$

$$\frac{1}{2}p=r_4\{1+\cos(\theta-\omega_4)\}.$$

$$\left(r-\frac{p\cos\varphi}{2\sin\varphi^2}\right)^2=\frac{p^2}{4\sin\varphi^4},$$

woraus

$$r-\frac{p\cos\varphi}{2\sin\varphi^2}=\pm\frac{p}{2\sin\varphi^2}$$

oder

$$r=\pm\frac{p(1\pm\cos\varphi)}{2\sin\varphi^2},$$

also

$$r=\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{2p\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{8\sin\frac{1}{2}\varphi^2\cos\frac{1}{2}\varphi}\\[2ex] -\dfrac{2p\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{8\sin\frac{1}{2}\varphi^2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{p}{4\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\\[2ex] -\dfrac{p}{4\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\end{array}\right.$$

folgt. Weil nun aber r seiner Natur nach eine positive Grösse ist, s kann nur

$$r=\frac{p}{4\sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

oder, weil

$$\sin\frac{1}{2}\varphi^2=\frac{1-\cos\varphi}{2}$$

ist,

$$r=\frac{p}{2(1-\cos\varphi)}$$

gesetzt werden.

Wir wollen nun den Brennpunkt der Parabel durch S bezeichnen und von demselben aus uns eine beliebige gerade Linie SG gezogen denken. Der von dem Vector r mit dieser Linie eingeschlossene Winkel

Aus den drei ersten Gleichungen erhält man durch Elimination von p:

$$r_1\{1+\cos(\Theta-\omega_1)\}=r_2\{1+\cos(\Theta-\omega_2)\}=r_3\{1+\cos(\Theta-\omega_3),$$

also

$$r_2-r_1=r_1\cos(\Theta-\omega_1)-r_2\cos(\Theta-\omega_2)$$
$$=(r_1\cos\omega_1-r_2\cos\omega_2)\cos\Theta+(r_1\sin\omega_1-r_2\sin\omega_2)\sin\Theta,$$

---

indem man diesen Winkel von der Linie SG an nach derselben Seite hin, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 durch den rechten Winkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, von 0° bis 360° zählt, sei ω, und der in demselben Sinne von der Linie SG an von 0° bis 360° gezählte Winkel, welchen mit dieser Linie der positive Theil der Axe der x_1 einschliesst, sei θ; so erhellet mittelst einer sehr einfachen Betrachtung, dass jederzeit entweder

$$\varphi=\omega-\theta$$

oder

$$360^\circ-\varphi=\theta-\omega$$

also entweder

$$\varphi=\omega-\theta$$

oder

$$\varphi=360^\circ+(\omega-\theta),$$

und daher stets

$$\cos\varphi=\cos(\omega-\theta)$$

ist.

Also ist nach dem Obigen allgemein

$$r=\frac{p}{2\{1-\cos(\omega-\theta)\}}$$

oder

$$\frac{1}{2}p=r\{1-\cos(\omega-\theta)\},$$

oder auch

$$\frac{1}{2}p=r\{1-\cos(\theta-\omega)\}.$$

Bezeichnet man den in demselben Sinne wie vorher von der Linie SG an von 0 bis 360° gezählten Winkel, welchen die von dem Brennpunkte nach dem Scheitel der Parabel gezogene gerade Linie mit der Linie SG einschliesst, durch Θ, so ist offenbar

$$\theta-\Theta=\pm180^\circ,$$

also

$$\theta=\Theta\pm180^\circ,$$

$$r_3-r_1=r_1\cos(\Theta-\omega_1)-r_3\cos(\Theta-\omega_3)$$

$$=(r_1\cos\omega_1-r_3\cos\omega_3)\cos\Theta+(r_1\sin\omega_1-r_3\sin\omega_3)\sin\Theta;$$

woraus

$$\sin\Theta=\frac{(r_2-r_1)(r_1\cos\omega_1-r_3\cos\omega_3)-(r_3-r_1)(r_1\cos\omega_1-r_2\cos\omega_2)}{(r_1\sin\omega_1-r_2\sin\omega_2)(r_1\cos\omega_1-r_3\cos\omega_3)-(r_1\sin\omega_1-r_3\sin\omega_3)(r_1\cos\omega_1-r_2\cos\omega_2)},$$

$$\cos\Theta=-\frac{(r_2-r_1)(r_1\sin\omega_1-r_3\sin\omega_3)-(r_3-r_1)(r_1\sin\omega_1-r_2\sin\omega_2)}{(r_1\sin\omega_1-r_2\sin\omega_2)(r_1\cos\omega_1-r_3\cos\omega_3)-(r_1\sin\omega_1-r_3\sin\omega_3)(r_1\cos\omega_1-r_2\cos\omega_2)}$$

oder

$$\sin\Theta=\frac{r_1(r_2-r_3)\cos\omega_1+r_2(r_3-r_1)\cos\omega_2+r_3(r_1-r_2)\cos\omega_3}{r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_3\sin(\omega_2-\omega_3)+r_3r_1\sin(\omega_3-\omega_1)},$$

$$\cos\Theta=-\frac{r_1(r_2-r_3)\sin\omega_1+r_2(r_3-r_1)\sin\omega_2+r_3(r_1-r_2)\sin\omega_3}{r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_3\sin(\omega_2-\omega_3)+r_3r_1\sin(\omega_3-\omega_1)};$$

auch

$$\tang\Theta=-\frac{r_1(r_2-r_3)\cos\omega_1+r_2(r_3-r_1)\cos\omega_2+r_3(r_1-r_2)\cos\omega_3}{r_1(r_2-r_3)\sin\omega_1+r_2(r_3-r_1)\sin\omega_2+r_3(r_1-r_2)\sin\omega_3},$$

oder

---

und hieraus

$$\theta-\omega=\Theta-\omega\pm180^0,$$

folglich allgemein

$$\cos(\theta-\omega)=-\cos(\Theta-\omega);$$

daher nach dem Obigen

$$\frac{1}{2}p=r\{1+\cos(\Theta-\omega)\}.$$

Weil

$$\text{ang}\Theta = -\frac{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\cos\omega_1 + \left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\cos\omega_2 + \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos\omega_3}{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin\omega_1 + \left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin\omega_2 + \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin\omega_3}$$

gt.

Weil nun

$$\sin\Theta^2 + \cos\Theta^2 = 1$$

, so haben wir nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\{r_1(r_2-r_3)\cos\omega_1 + r_2(r_3-r_1)\cos\omega_2 + r_3(r_1-r_2)\cos\omega_3\}^2\\
&+\{r_1(r_2-r_3)\sin\omega_1 + r_2(r_3-r_1)\sin\omega_2 + r_3(r_1-r_2)\sin\omega_3\}^2\\
&=\{r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2) + r_2r_3\sin(\omega_2-\omega_3) + r_3r_1\sin(\omega_3-\omega_1)\}^2,
\end{aligned}$$

er

$$\begin{aligned}
&r_1^2(r_2-r_3)^2 + r_2^2(r_3-r_1)^2 + r_3^2(r_1-r_2)^2\\
&\qquad -2r_1r_2(r_1-r_3)(r_2-r_3)\cos(\omega_1-\omega_2)\\
&\qquad -2r_2r_3(r_2-r_1)(r_3-r_1)\cos(\omega_2-\omega_3)\\
&\qquad -2r_3r_1(r_3-r_2)(r_1-r_2)\cos(\omega_3-\omega_1)\\
&= r_1^2r_2^2\sin(\omega_1-\omega_2)^2 + r_2^2r_3^2\sin(\omega_2-\omega_3)^2 + r_3^2r_1^2\sin(\omega_3-\omega_1)^2,\\
&\qquad + 2r_1r_2r_3\left\{\begin{array}{l} r_1\sin(\omega_1-\omega_2)\sin(\omega_3-\omega_1)\\ + r_2\sin(\omega_2-\omega_3)\sin(\omega_1-\omega_2)\\ + r_3\sin(\omega_3-\omega_1\sin(\omega_2-\omega_3)\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

er

$$1-\cos(\theta-\omega) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\omega)^2,$$

$$1+\cos(\Theta-\omega) = 2\cos\tfrac{1}{2}(\Theta-\omega)^2$$

, so ist auch

$$p = 4r\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\omega)^2$$

d

$$p = 4r\sin\tfrac{1}{2}(\Theta-\omega)^2.$$

$$2(r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2) - 2 r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)$$
$$- 2 r_1 r_2 (r_1 - r_3)(r_2 - r_3) \cos(\omega_1 - \omega_2)$$
$$- 2 r_2 r_3 (r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \cos(\omega_2 - \omega_3)$$
$$- 2 r_3 r_1 (r_3 - r_2)(r_1 - r_2) \cos(\omega_3 - \omega_1)$$

$$= r_1^2 r_2^2 \sin(\omega_1 - \omega_2)^2 + r_2^2 r_3^2 \sin(\omega_2 - \omega_3)^2 + r_3^2 r_1^2 \sin(\omega_3 -$$

$$+ 2 r_1 r_2 r_3 \left\{ \begin{array}{l} r_1 \sin(\omega_1 - \omega_2) \sin(\omega_3 - \omega_1) \\ + r_2 \sin(\omega_2 - \omega_3) \sin(\omega_1 - \omega_2) \\ + r_3 \sin(\omega_3 - \omega_1) \sin(\omega_2 - \omega_3) \end{array} \right\},$$

und folglich:

$$0 = r_1^2 r_2^2 \{1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)^2\}$$
$$+ r_2^2 r_3^2 \{1 + \cos(\omega_2 - \omega_3)^2\}$$
$$+ r_3^2 r_1^2 \{1 + \cos(\omega_3 - \omega_1)^2\}$$
$$- 2 r_1 r_2 r_3 \left\{ \begin{array}{l} r_1 [1 + \sin(\omega_1 - \omega_2) \sin(\omega_3 - \omega_1)] \\ + r_2 [1 + \sin(\omega_2 - \omega_3) \sin(\omega_1 - \omega_2)] \\ + r_3 [1 + \sin(\omega_3 - \omega_1) \sin(\omega_2 - \omega_3)] \end{array} \right\}$$
$$- 2 r_1 r_2 (r_1 - r_3)(r_2 - r_3) \cos(\omega_1 - \omega_2)$$
$$- 2 r_2 r_3 (r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \cos(\omega_2 - \omega_3)$$
$$- 2 r_3 r_1 (r_3 - r_2)(r_1 - r_2) \cos(\omega_3 - \omega_1).$$

Weil nun aber

$$(r_1 - r_3)(r_2 - r_3) = r_1 r_3 - r_3 (r_1 + r_2 - r_3),$$
$$(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = r_2 r_3 - r_1 (r_2 + r_3 - r_1),$$
$$(r_3 - r_2)(r_1 - r_2) = r_3 r_1 - r_2 (r_3 + r_1 - r_2)$$

ist, so ist

$$0 = r_1^2 r_2^2 \{1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)^2\}$$
$$+ r_2^2 r_3^2 \{1 + \cos(\omega_2 - \omega_3)^2\}$$
$$+ r_3^2 r_1^2 \{1 + \cos(\omega_3 - \omega_1)^2\}$$

$$-2r_1r_2r_3\left\{\begin{array}{l} r_1\,[1+\sin(\omega_1-\omega_2)\sin(\omega_3-\omega_1)] \\ +\,r_2\,[1+\sin(\omega_2-\omega_3)\sin(\omega_1-\omega_2)] \\ +\,r_3\,[1+\sin(\omega_3-\omega_1)\sin(\omega_2-\omega_3)] \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} -2r_1r_2\{r_1r_2-r_3(r_1+r_2-r_3)\}\cos(\omega_1-\omega_2) \\ -2r_2r_3\{r_2r_3-r_1(r_2+r_3-r_1)\}\cos(\omega_2-\omega_3) \\ -2r_3r_1\{r_3r_1-r_2(r_3+r_1-r_2)\}\cos(\omega_3-\omega_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} =\ r_1^2r_2^2\{1-\cos(\omega_1-\omega_2)\}^2 \\ +\,r_2^2r_3^2\{1-\cos(\omega_2-\omega_3)\}^2 \\ +\,r_3^2r_1^2\{1-\cos(\omega_3-\omega_1)\}^2 \end{array}$$

$$-2r_1r_2r_3\left\{\begin{array}{l} r_1\left[\begin{array}{l}1-\cos(\omega_1-\omega_2)+\cos(\omega_2-\omega_3)-\cos(\omega_3-\omega_1) \\ \qquad +\sin(\omega_1-\omega_2)\sin(\omega_3-\omega_1)\end{array}\right] \\ +\,r_2\left[\begin{array}{l}1-\cos(\omega_2-\omega_3)+\cos(\omega_3-\omega_1)-\cos(\omega_1-\omega_2) \\ \qquad +\sin(\omega_2-\omega_3)\sin(\omega_1-\omega_2)\end{array}\right] \\ +\,r_3\left[\begin{array}{l}1-\cos(\omega_3-\omega_1)+\cos(\omega_1-\omega_2)-\cos(\omega_2-\omega_3) \\ \qquad +\sin(\omega_3-\omega_1)\sin(\omega_2-\omega_3)\end{array}\right] \end{array}\right\}.$$

Es ist aber überhaupt

$$1-\cos(x-y)+\cos(y-z)-\cos(z-x)+\sin(x-y)\sin(z-x)$$

$$\begin{array}{l} =1-\cos(x-y)+\cos(y-z)-\cos(z-x) \\ \qquad -\frac{1}{2}\cos(y-z)+\frac{1}{2}\cos(2x-y-z). \end{array}$$

$$=1-\cos(x-y)-\cos(z-x)+\frac{1}{2}\cos(y-z)+\frac{1}{2}\cos(2x-y-z)$$

$$=1-2\cos\frac{1}{2}(y-z)\cos\frac{1}{2}(2x-y-z)+\frac{2\cos\frac{1}{2}(y-z)^2-1}{2}+\frac{2\cos\frac{1}{2}(2x-y-z)^2-1}{2}$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(y-z)^2-2\cos\tfrac{1}{2}(y-z)\cos\tfrac{1}{2}(2x-y-z)+\cos\tfrac{1}{2}(2x-y-z)^2$$

$$=\{\cos\tfrac{1}{2}(y-z)-\cos\tfrac{1}{2}(2x-y-z)\}^2,$$

$$=4\sin\tfrac{1}{2}(x-y)^2\sin\tfrac{1}{2}(z-x)^2,$$

also

$$\begin{aligned}0= & \; r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^4\\ & +r_2{}^2r_3{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)^4\\ & +r_3{}^2r_1{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)^4\\ & -2r_1r_2r_3\left\{\begin{array}{l} r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)^2\\ +r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\\ +r_3\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)^2\end{array}\right\},\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}0= & \left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}\right\}^4+\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^4+\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\}^4\\ & -2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2\cdot\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2\\ & -2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2\cdot\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\}^2\\ & -2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\}^2\cdot\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2.\end{aligned}$$

Ueberhaupt ist

$$\begin{aligned}
&x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x\\
&=(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2\\
&=(x^2+2xy+y^2-z^2)(x^2-2xy+y^2-z^2)\\
&=\{(x+y)^2-z^2\}\{(x-y)^2-z^2\}\\
&=(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)\\
&=(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)\\
&=-(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
0=&\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\}\\
\times&\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\}\\
\times&\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\}\\
\times&\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}\right\},
\end{aligned}$$

so dass folglich mindestens eine der vier folgenden Gleichungen erfüllt sein muss:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

Dass nie zwei dieser Gleichungen zugleich Statt finden können, wenn nämlich, was wir hier voraussetzen wollen, keiner der drei Theile auf den rechten Seiten dieser Gleichungen verschwindet, erhellet leicht; denn aus vier Gleichungen von der Form

$$P+Q+R=0,$$
$$P-Q-R=0,$$
$$P-Q+R=0,$$
$$P+Q-R=0$$

erhält man überhaupt die folgenden Combinationen zu zweien nebst den aus denselben durch Addition oder Substraction zu ziehenden Folgerungen:

$$\frac{\begin{array}{c}P+Q+R=0,\\ P-Q-R=0;\end{array}}{P=0}$$

$$\frac{\begin{array}{c}P+Q+R=0,\\ P-Q+R=0;\end{array}}{Q=0}$$

$$\frac{\begin{array}{c}P+Q+R=0,\\ P+Q-R=0;\end{array}}{R=0}$$

$$\frac{\begin{array}{c}P-Q-R=0,\\ P-Q+R=0;\end{array}}{R=0}$$

$$\frac{\begin{array}{c}P-Q-R=0,\\ P+Q-R=0;\end{array}}{Q=0}$$

$$\frac{\begin{array}{c}P-Q+R=0,\\ P+Q-R=0;\end{array}}{P=0}$$

Sollten also zwei der vier obigen Gleichungen zugleich Statt finden können, so würde immer eine der drei Grössen P, Q, R verschwinden müssen, was gegen unsere oben gemachte Voraussetzung ist.

Weil also von den vier Gleichungen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0;$$

e wir im Folgenden der Kürze wegen in obiger Reihenfolge ırch

(I), (II), (III), IV)

ezeichnen wollen, immer nur eine Statt finden kann, so kommt s jetzt darauf an, sicher entscheiden zu können, welche dieser ier Gleichungen in jedem einzelnen Falle wirklich Statt findet.

Wir wollen bei der folgenden Untersuchung hierüber die ionne durch S, den aufsteigenden Knoten des Cometen durch K, und die den Zeiten t_1, t_2, t_3 entsprechenden Oerter desselben ı seiner Bahn durch C_1, C_2, C_3 bezeichnen; auch wollen wir er Kürze wegen nur den für die vorliegende Anwendung allein ledeutung habenden Fall betrachten, wenn der von der Sonne us nach der Seite der Parabel hin liegende Winkel C_1SC_3 nicht rösser als 180° ist, also natürlich auch die beiden von der Sonne us nach der Seite der Parabel hin liegenden Winkel C_1SC_2, C_2SC_3, deren Summe dem Winkel C_1SC_3 gleich ist, 180° nicht bersteigen.

Es sind jetzt zuvörderst die vier in Taf. I. Fig. I., Fig. II., Fig. III., ig. IV. dargestellten Fälle, welche rücksichtlich der Lage der inie SK gegen die drei Vectoren SC_1, SC_2, SC_3 offenbar nur lein eintreten können, zu betrachten.

In dem in Taf. I. Fig. I. dargestellten Falle ist:

$$\begin{aligned}\omega_2-\omega_3&=KSC_2-KSC_3\\&=-C_2SC_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_3-\omega_1&=KSC_3-KSC_1\\&=C_1SC_3,\end{aligned}$$

$$\omega_1-\omega_2=KSC_1-KSC_2$$
$$=-C_1SC_2;$$

also entsprechen den vier Gleichungen

(I), (II), (III), (IV)

die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0.$$

In dem in Taf. I. Fig. II. dargestellten Falle ist:

$$\omega_2-\omega_3=KSC_2-KSC_3$$
$$=-C_2SC_3,$$

$$\omega_3-\omega_1=KSC_3-(360^0-KSC_1)$$
$$=C_1SC_3-360^0,$$

$$\omega_1-\omega_2=(360^0-KSC_1)-K_1SC_2$$
$$=360^0-C_1SC_2;$$

also entsprechen den vier Gleichungen

(I), (II), (III), (IV)

die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0.$$

In dem in Taf. I. Fig. III. dargestellten Falle ist:

$$\begin{aligned}\omega_2-\omega_3&=(360^\circ-KSC_2)-KSC_3\\&=360^\circ-C_2SC_3,\\ \omega_3-\omega_1&=KSC_3-(360^\circ-KSC_1)\\&=C_1SC_3-360^\circ,\\ \omega_1-\omega_2&=(360^\circ-KSC_1)-(360^\circ-KSC_2)\\&=-C_1SC_2;\end{aligned}$$

also entsprechen den vier Gleichungen:

(I), (II), (III), (IV)

die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0.$$

In dem in Taf. I. Fig. IV. dargestellten Falle ist:

$$\begin{aligned}\omega_2-\omega_3&=(360^\circ-KSC_2)-(360^\circ-KSC_3)\\&=-C_2SC_3,\\ \omega_3-\omega_1&=(360^\circ-KSC_3)-(360^\circ-KSC_1)\\&=C_1SC_3,\end{aligned}$$

$$\omega_1-\omega_2=(360^\circ-KSC_1)-(360^\circ-KSC_2)$$
$$=-C_1SC_2;$$

also entsprechen den vier Gleichungen

(I), (II), (III), (IV)

die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0.$$

Man sieht hieraus, dass es jetzt nur darauf ankommt, entscheiden, welche von den vier Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0$$

die richtige ist.

Weil keiner der Winkel

$$C_2SC_3,\ C_1SC_3,\ C_1SC_2$$

grösser als 180°, also keiner Winkel

$$\frac{1}{2}C_2SC_3,\ \frac{1}{2}C_1SC_3,\ \frac{1}{2}C_1SC_2$$

grösser als 90° ist, so sind

$$\sin\frac{1}{2}C_2SC_3,\ \sin\frac{1}{2}C_1SC_3,\ \sin\frac{1}{2}C_1SC_2$$

lauter positive Grössen, und die Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0$$

ist also offenbar unstatthaft. Daher ist bloss noch nöthig, zu entscheiden, welche von den drei Gleichungen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0$$

die richtige ist.

Nun ist aber bekanntlich:

$$\cos C_2SC_3=\frac{r_2^2+r_3^3-C_2C_3^2}{2r_2r_3},$$

$$\cos C_1SC_3=\frac{r_1^2+r_3^2-C_1C_3^2}{2r_1r_3},$$

$$\cos C_1SC_2=\frac{r_1^2+r_2^2-C_1C_2^2}{2r_1r_2};$$

also

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}=\frac{\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}}{2\sqrt{r_1r_2r_3}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}=\frac{\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}}{2\sqrt{r_1r_2r_3}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=\frac{\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}}{2\sqrt{r_1r_2r_3}};$$

und den drei obigen Gleichungen entsprechen also die drei genden Gleichungen:

$$\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}+\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}-\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}=$$

$$\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}-\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}+\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}=$$

$$\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}-\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}-\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}:$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten der Punkte

$$C_1,\ C_2,\ C_3$$

in dem gewöhnlichen Coordinatensysteme der Parabel durch

$$\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_2,\ \eta_2;\ \xi_3,\ \eta_3;$$

so ist

$$r_1=\frac{1}{4}p+\xi_1,$$

$$r_2=\frac{1}{4}p+\xi_2,$$

$$r_3=\frac{1}{4}p+\xi_3;$$

also

$$r_2-r_3=\xi_2-\xi_3,$$

$$r_1-r_3=\xi_1-\xi_3,$$

$$r_1-r_2=\xi_1-\xi_2;$$

ferner ist:

$$C_2C_3^2=(\xi_2-\xi_3)^2+(\eta_2-\eta_3)^2,$$

$$C_1C_3^2=(\xi_1-\xi_3)^2+(\eta_1-\eta_3)^2,$$

$$C_1C_2^2=(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2;$$

so nach dem Vorhergehenden

$$C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2=(\eta_2-\eta_3)^2,$$

$$C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2=(\eta_1-\eta_3)^2,$$

$$C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2=(\eta_1-\eta_2)^2;$$

nd weil nun der Punkt C_2 in der Parabel zwischen C_1 und C_3 egt, so ist offenbar immer

$$\eta_1 \gtrless \eta_2 \gtrless \eta_3,$$

lso offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf inander:

$$\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}=\pm(\eta_2-\eta_3),$$

$$\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}=\pm(\eta_1-\eta_3),$$

$$\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}=\pm(\eta_1-\eta_2);$$

der

$$\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}=\pm\eta_2\mp\eta_3,$$

$$-\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}=\mp\eta_1\pm\eta_3,$$

$$\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}=\pm\eta_1\mp\eta_2;$$

olglich, wenn man diese drei Gleichungen zu einander addirt:

$$\sqrt{C_2C_3^2-(r_2-r_3)^2}-\sqrt{C_1C_3^2-(r_1-r_3)^2}+\sqrt{C_1C_2^2-(r_1-r_2)^2}=0,$$

velches also die allein richtige von den drei obigen Gleichungen ist. Daher ist nach dem Obigen auch bloss die Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=0$$

der

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C_2SC_3}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_2}{\sqrt{r_3}}=\frac{\sin\frac{1}{2}C_1SC_3}{\sqrt{r_2}}$$

ichtig.

Vergleicht man nun dies mit dem Obigen, so ergiebt sich olgendes:

In den beiden in Taf. I. Fig. I. und Taf. I. Fig. IV. dargestellten Fällen ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

In dem in Taf. I. Fig. II. dargestellten Falle ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

In dem in Taf. I. Fig. III. dargestellten Falle ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

Wir wollen nun die Zeichen-Combinationen betrachten, welche rücksichtlich der Vorzeichen der den Zeiten

$$t_1,\ t_2,\ t_3$$

entsprechenden geocentrischen Breiten des Cometen eintreten können, wobei wir immer die Voraussetzung festhalten, dass keiner der Winkel

$$C_1CC_2,\ C_2SC_3,\ C_1SC_3$$

grösser als 180° ist.

In dem in Taf. I. Fig. I. dargestellten Falle können offenbar nur die folgenden Zeichen-Combinationen eintreten:

+ + +
+ + −
+ − −
− − −

In dem in Taf. I. Fig. IV. dargestellten Falle können offenbar nur die folgenden Zeichen-Combinationen eintreten:

− − −
+ − −
+ + −
+ + +

In dem in Taf. I. Fig. II. dargestellten Falle kann offenbar nur die folgende Zeichen-Combination eintreten:

− + +

In dem in Taf. I. Fig III. dargestellten Falle kann offenbar nur die folgende Zeichen-Combination eintreten:

$$- \quad - \quad +$$

Dies, mit dem Obigen verglichen, führt unmittelbar zu den folgenden einfachen Regeln:

I. Wenn die der Zeit t_1 entsprechende geocentrische Breite des Cometen negativ ist, und die den Zeiten t_2, t_3 entsprechenden geocentrischen Breiten desselben beide positiv sind, so ist

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

II. Wenn die den Zeiten t_1, t_2 entsprechenden geocentrischen Breiten des Cometen beide negativ sind, und die der Zeit t_3 entsprechende geocentrische Breite desselben positiv ist, so ist

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

III. In allen übrigen Fällen ist

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_3}}=0.$$

So wie die erste, zweite, dritte Beobachtung die vorhergehende Gleichung, oder vielmehr eine der drei vorhergehenden Gleichungen gaben, so geben die zweite, dritte, vierte Beobachtung eine ganz ähnliche Gleichung, und da diese beiden Gleichungen nach dem Obigen offenbar bloss die beiden unbekannten Grössen $\bar{\omega}$, i enthalten, so kann man mittelst derselben diese beiden Grössen finden, was freilich direct nicht, aber, weil man nach dem Obigen Näherungswerthe dieser Grössen schon kennt, durch successive Annäherung leicht möglich ist.

Hat man $\bar{\omega}$ und i auf diese Weise gefunden, so erhält man Θ mittelst der oben für $\sin\Theta$, $\cos\Theta$, $\tang\Theta$ entwickelten Formeln, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird, und hierauf p mittelst einer der folgenden Formeln:

$$p=2r_1\{1+\cos(\Theta-\omega_1)\},$$

$$p=2r_2\{1+\cos(\Theta-\omega_2)\},$$

$$p=2r_3\{1+\cos(\Theta-\omega_3)\},$$

$$p=2r_4\{1+\cos(\Theta-\omega_4)\}$$

oder

$$p = 4r_1 \cos\frac{1}{2}(\Theta - \omega_1)^2,$$

$$p = 4r_2 \cos\frac{1}{2}(\Theta - \omega_2)^2,$$

$$p = 4r_3 \cos\frac{1}{2}(\Theta - \omega_3)^2,$$

$$p = 4r_4 \cos\frac{1}{2}(\Theta - \omega_4)^2.$$

Wie man die übrigen zur vollständigen Bestimmung der Cometenbahn noch erforderlichen Elemente findet, will ich hier nicht weiter erläutern, weil ich dabei nur wiederholen müsste, was man in jedem vollständigen wissenschaftlichen Hand- oder Lehrbuche der Astronomie findet.

§. 13.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wähle ich absichtlich dasselbe Beispiel, dessen sich **Olbers** in der in der Einleitung angeführten Schrift zur Erläuterung seiner Methode bedient hat. Dieses Beispiel betrifft den Cometen von 1769, Nr. 80. des bekannten Cometenverzeichnisses von **Olbers**. Da aber meine Methode vier Beobachtungen zum Grunde legt, so füge ich den drei von **Olbers** aus **Pingré's Cométographie** entlehnten Beobachtungen noch eine vierte Beobachtung hinzu, die ich aus **Lambert's Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik. Thl. III. Berlin. 1772. S. 270.** entlehne, und die nach **Lambert** von **Messier** herrührt.

Nach diesen Beobachtungen habe ich nun in meinen Zeichen:

$t_1 =$ 1769.	Sept.	4.	14^u.	0^m.	0^s
$t_2 =$ -	-	8.	14.	0.	0
$t_3 =$ -	-	12.	14.	0.	0
$t_4 =$ -		15.	16.	41.	40

$\alpha_1' = 80^0.\ 56'.\ 11''$
$\alpha_2' = 101.\ \ 0.\ 54$
$\alpha_3' = 124.\ \ 19.\ 22$
$\alpha_4' = 140.\ \ 39.\ 21$

$\beta_1' = -17^0.\ 51'.\ 39''$
$\beta_2' = -22.\ \ 5.\ \ 2$

$\beta_3' = -23^\circ.\ 43'.\ 55''$
$\beta_4' = -22.\ 43.\ 44$

$L_1 = 162^\circ.\ 42'.\ 5''$
$L_2 = 166.\ 35.\ 31$
$L_3 = 170.\ 29.\ 20$
$L_4 = 173.\ 31.\ 14$

$\log R_1 = 0{,}003132$
$\log R_2 = 0{,}002665$
$\log R_3 = 0{,}002184$
$\log R_4 = 0{,}001777$

$L_1 - L_2 = -3^\circ.\ 53'.\ 26''$
$L_1 - L_3 = -7.\ 47.\ 15$
$L_2 - L_3 = -3.\ 53.\ 49$
$L_2 - L_4 = -6.\ 55.\ 43$
$L_3 - L_4 = -3.\ 1.\ 54$

$\alpha_2' - \alpha_3' = -23^\circ.\ 18'.\ 28$
$\alpha_3' - \alpha_1' = +43.\ 23.\ 11$
$\alpha_1' - \alpha_2' = -20.\ 4.\ 43$

$\alpha_3' - \alpha_4' = -16^\circ.\ 19'.\ 59''$
$\alpha_4' - \alpha_2' = +39.\ 38.\ 27$
$\alpha_2' - \alpha_3' = -23.\ 18.\ 28$

$\alpha_1' - L_2 = -85^\circ.\ 39''\ 20''$
$\alpha_2' - L_2 = -65.\ 34.\ 37$
$\alpha_2' - L_3 = -69.\ 28.\ 26$
$\alpha_3' - L_2 = -42.\ 16.\ 9$
$\alpha_3' - L_3 = -46.\ 9.\ 58$
$\alpha_4' - L_3 = -28.\ 49.\ 59$

$\log\sin(L_1 - L_2) = 8{,}8315552n$
$\log\sin(L_1 - L_3) = 9{,}1319372n$
$\log\sin(L_2 - L_3) = 8{,}8322667n$

$$\log\sin(L_2-L_4)=9{,}0814645n$$
$$\log\sin(L_3-L_4)=8{,}7233561n$$

$$\log\sin(\alpha_2'-\alpha_3')=9{,}5973333n$$
$$\log\sin(\alpha_3'-\alpha_1')=9{,}8369029$$
$$\log\sin(\alpha_1'-\alpha_2')=9{,}5356853n$$

$$\log\sin(\alpha_3'-\alpha_4')=9{,}4490469n$$
$$\log\sin(\alpha_4'-\alpha_2')=9{,}8048022$$
$$\log\sin(\alpha_2'-\alpha_3')=9{,}5973333n$$

$$\log\sin(\alpha_1'-L_2)=9{,}9987503n$$
$$\log\sin(\alpha_2'-L_2)=9{,}9592882n$$
$$\log\sin(\alpha_2'-L_3)=9{,}9715136n$$
$$\log\sin(\alpha_3'-L_2)=9{,}8277661n$$
$$\log\sin(\alpha_3'-L_3)=9{,}8581465n$$
$$\log\sin(\alpha_4'-L_3)=9{,}6967708n$$

$$\log\tan\beta_1'=9{,}5081746_n$$
$$\log\tan\beta_2'=9{,}6082375_n$$
$$\log\tan\beta_3'=9{,}6430917_n$$
$$\log\tan\beta_4'=9{,}6221120_n$$

$$\log\cos\beta'_1=9{,}9785477$$
$$\log\cos\beta_2'=9{,}9669084$$
$$\log\cos\beta_3'=9{,}9616291$$
$$\log\cos\beta_4'=9{,}9648926.$$

Dies sind die sämmtlichen Logarithmen, welche wir im F genden bei der Berechnung von u_1, u_2, u_3, u_4 nach den Form in §. 8. brauchen.

$$\log\tan\beta_2'=9{,}6082375_n$$
$$\log\sin(\alpha_4'-L_3)=9{,}6967708_n$$
$$\overline{0{,}3050083-1}\quad \text{num}=+0{,}20184$$

$$\log \operatorname{tang}\beta_4' = 9{,}6221120_n$$
$$\log \sin(\alpha_2' - L_3) = 9{,}9715136_n$$
$$\overline{0{,}5936256-1} \;\text{num} = +0{,}392307$$
$$N = \overline{-0{,}190466}\text{*)}$$

$$\log N = 0{,}2798175-1_n$$
$$\log\sin(L_1 - L_2) = 8{,}8315552_n$$
$$\log \mathrm{I} = \overline{0{,}1113727-2}$$

$$\log \operatorname{tang}\beta_2' = 9{,}6082375_n$$
$$\log \sin(\alpha'_1 - L_2) = 9{,}9987503_n$$
$$\overline{0{,}6069878-1} \;\text{num} = +0{,}404565$$
$$\log \operatorname{tang}\beta_1' = 9{,}5081746_n$$
$$\log \sin(\alpha_2' - L_2) = 9{,}9592882_n$$
$$\overline{0{,}4674628-1} \;\text{num} = +0{,}293402$$
$$N = +\overline{0{,}111163}$$

$$\log N = 0{,}0459602-1$$
$$\log\sin(L_1 - L_3) = 9{,}1319372_n$$
$$\log \mathrm{I}^* = \overline{0{,}1778974-2_n}$$

$$\log \operatorname{tang}\beta_3' = 9{,}6430917_n$$
$$\log \sin(\alpha_1' - L_2) = 9{,}9987503_n$$
$$\overline{0{,}6418420-1} \;\text{num} = +0{,}438371$$
$$\log \operatorname{tang}\beta_1' = 9{,}5081746_n$$
$$\log \sin(\alpha_3' - L_2) = 9{,}8277661_n$$
$$\overline{0{,}3359407-1} \;\text{num} = +0{,}216741$$
$$N = \overline{+0{,}221630}$$

$$\log N = 0{,}3456285-1$$
$$\log \sin(L_4 - L_3) = 8{,}7233561$$
$$\log \mathrm{II} = \overline{0{,}0689846-2}$$

$$\log \operatorname{tang}\beta_3' = 9{,}6430917_n$$
$$\log\sin(\alpha_4' - L_3) = 9{,}6967708_n$$
$$\overline{0{,}3398625-1} \;\text{num} = +0{,}218707$$

*) N ist hier und im Folgenden die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen. Hier steht die eine der beiden Zahlen auf der vorhergehenden Seite.

$$\log \operatorname{tang} \beta_4' = 9,6221120_n$$
$$\log \sin(\alpha_3' - L_4) = 9,8581465_n$$
$$\overline{0,4802585 - 1} \quad \text{num} = +\ 0,302175$$
$$N = -\ \overline{0,083468}$$

$$\log N = 0,9215200 - 2_n$$
$$\log \sin(L_4 - L_2) = 9,0814645$$
$$\log \mathrm{II}^* = \overline{0,0029845} - 2_n$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_3' = 9,6430917_n$$
$$\log \sin(\alpha_2' - L_2) = 9,9592882_n$$
$$\overline{0,6023799 - 1} \quad \text{num} = +\ 0,400295$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_2' = 9,6082375_n$$
$$\log \sin(\alpha_3' - L_2) = 9,8277661_n$$
$$\overline{0,4360036 - 1} \quad \text{num} = +\ 0,272900$$
$$N = +\ \overline{0,127395}$$

$$\log N = 0,1051523 - 1$$
$$\log \sin(L_1 - L_2) = 8,8315552_n$$
$$\log \mathrm{III} = \overline{0,9367075} - 3_n$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_3' = 9,6430917_n$$
$$\log \sin(\alpha_2' - L_3) = 9,9715136_n$$
$$\overline{0,6146053 - 1} \quad \text{num} = +\ 0,411723$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_2' = 9,6082375_n$$
$$\log \sin(\alpha_3' - L_3) = 9,8581465_n$$
$$\overline{0,4663840 - 1} \quad \text{num} = +\ 0,292674$$
$$N = +\ \overline{0,119049}$$

$$\log N = 0,0757258 - 1$$
$$\log \sin(L_3 - L_4) = 8,7233561_n$$
$$\log \mathrm{III}^* = \overline{0,7990819} - 3_n$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_1' = 9,5081746_n$$
$$\log \sin(\alpha_2' - \alpha_3') = 9,5973333_n$$
$$\overline{0,1055079 - 1} \quad \text{num} = +\ 0,127499$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_2' = 9,6082375_n$$
$$\log \sin(\alpha_3' - \alpha_1') = 9,8369029$$
$$\overline{0,4451404 - 1_n} \quad \text{num} = -\ 0,278702$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_3' = 9{,}6430917_n$$
$$\log \sin(\alpha_1' - \alpha_2') = \underline{9{,}5356853_n}$$
$$0{,}1787770 - 1 \quad \text{num} = +\,0{,}150930$$
$$\text{IV} = \underline{-\,0{,}000273}$$
$$\log \text{IV} = 0{,}4361626 - 4_n$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_2' = 9{,}6082375_n$$
$$\log \sin(\alpha_3' - \alpha_4') = \underline{9{,}4490469_n}$$
$$0{,}0572844 - 1 \quad \text{num} = +\,0{,}114099$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_3' = 9{,}6430917_n$$
$$\log \sin(\alpha_4' - \alpha_2') = \underline{9{,}8048022}$$
$$0{,}4478939 - 1_n \quad \text{num} = -\,0{,}280475$$

$$\log \operatorname{tang} \beta_4' = 9{,}6221120_n$$
$$\log \sin(\alpha_2' - \alpha_3') = \underline{9{,}5973333_n}$$
$$0{,}2194453 - 1 \quad \text{num} = +\,0{,}165747$$
$$\text{IV}^* = \underline{-\,0{,}000629}$$
$$\log \text{IV}^* = 0{,}7986506 - 4_n$$

Es ist also jetzt:

$$\log \text{II} = 0{,}0689846 - 2$$
$$\log \text{I}^* = \underline{0{,}1778974 - 2_n}$$
$$\log \frac{\text{II}}{\text{I}^*} = 0{,}8910872 - 1_n \qquad \frac{\text{II}}{\text{I}^*} = -\,0{,}778180$$

$$\log \text{II}^* = 0{,}0029845 - 2_n$$
$$\log \text{I} = \underline{0{,}1113727 - 2}$$
$$\log \frac{\text{II}^*}{\text{I}} = 0{,}8916118 - 1_n \qquad \frac{\text{II}^*}{\text{I}} = -\,0{,}779133$$

$$\log \text{IV} = 0{,}4361626 - 4_n$$
$$\log \text{I}^* = \underline{0{,}1778974 - 2_n}$$
$$\log \frac{\text{IV}}{\text{I}^*} = 0{,}2582652 - 2 \qquad \frac{\text{IV}}{\text{I}^*} = +\,0{,}018125$$

$$\log \text{IV}^* = 0{,}7986506 - 4_n$$
$$\log \text{I} = \underline{0{,}1113727 - 2}$$
$$\log \frac{\text{IV}^*}{\text{I}} = 0{,}6872779 - 2_n \qquad \frac{\text{IV}^*}{\text{I}} = -\,0{,}048672$$

$$\frac{II}{I^*} = -0,778189$$

$$\frac{II^*}{I} = -0,779133$$

$$\frac{II}{I^*} - \frac{II^*}{I} = +0,000944 \quad \log = 0,9749720-4$$

$$\frac{IV}{I^*} = +0,018125$$

$$\frac{IV^*}{I} = -0,048672$$

$$\frac{IV}{I^*} - \frac{IV^*}{I} = +0,066797 \quad \log = 0,8247570-2$$

$$\begin{array}{l} 0,9749720-4 \\ \underline{0,8247570-2} \\ 0,1502150-2 \end{array}$$

$$\log I^* = 0,1778974-2_n$$
$$\log II = \underline{0,0689846-2}$$
$$\log \frac{I^*}{II} = 0,1089128_n \qquad \frac{I^*}{II} = -1,285026$$

$$\log I = 0,1113727-2$$
$$\log II^* = \underline{0,0029845-2_n}$$
$$\log \frac{I}{II^*} = 0,0083882_n \qquad \frac{I}{II^*} = -1,283477$$

$$\log IV = 0,4361626-4_n$$
$$\log II = \underline{0,0689846-2}$$
$$\log \frac{IV}{II} = 0,3671780-2_n \qquad \frac{IV}{II} = -0,023290$$

$$\log IV^* = 0,7986506-4_n$$
$$\log II^* = \underline{0,0029845-2_n}$$
$$\log \frac{IV^*}{II^*} = 0,7956661-2 \qquad \frac{IV^*}{II^*} = +0,062469$$

$$\frac{I^*}{II} = -1{,}285026$$

$$\frac{I}{II^*} = -1{,}283477$$

$$\frac{I^*}{II} - \frac{I}{II^*} = -0{,}001549 \quad \log = 0{,}1900514-3_n$$

$$\frac{IV}{II} = -0{,}023290$$

$$\frac{IV^*}{II^*} = +0{,}062469$$

$$\frac{IV}{II} - \frac{IV^*}{II^*} = -0{,}085759 \quad \log = 0{,}9332797-2_n$$

$$0{,}1900514-3_n$$
$$0{,}9332792-2_n$$
$$0{,}2567722-2$$

$\log R_2 = 0{,}0026650$
$0{,}1502150-2$
$0{,}1528800-2$

$\log\sin(L_3-L_4) = 8{,}7233561_n$
$\log\cos\beta_2' = 9{,}9669084$
$0{,}6902645-2_n$

$0{,}1528800-2$
$0{,}6902645-2_n$
$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$ $\qquad u_2 = -0{,}290145$

$\log R_3 = 0{,}0021840$
$0{,}2567722-2$
$0{,}2589562-2$

$\log\sin(L_1-L_2) = 8{,}8315552_n$
$\log\cos\beta_3' = 9{,}9616291$
$0{,}7931843-2_n$

$0{,}2589562-2$
$0{,}7931843-2_n$
$\log u_3 = 0{,}4657719-1_n$ $\qquad u_3 = -0{,}292262$

$\log R_4 = 0{,}0017770$
$\log\sin(L_2-L_4) = 9{,}0814645_n$
$\log\cos\beta_2' = 9{,}9669084$
$\log III^* = 0{,}7990819-3_n$
$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$
$0{,}3118473-4_n$

$\log R_2 = 0{,}0026650$
$\log\sin(L_2-L_3) = 8{,}8322667_n$
$\log\cos\beta_4' = 9{,}9648926$
$\log II^* = 0{,}0029845-2_n$
$0{,}8028088-4$

$$0{,}3118473-4_n$$
$$\underline{0{,}8028088-4}$$
$$\log u_4 = 0{,}5090385-1_n \qquad u_4 = -0{,}322878$$

$$\log R_1 = 0{,}0031320 \qquad \log R_3 = 0{,}0021840$$
$$\log\sin(L_1 - L_3) = 9{,}1319372_n \qquad \log\sin(L_2 - L_3) = 8{,}8322667_n$$
$$\log\cos\beta_3' = 9{,}9616291 \qquad \log\cos\beta_1' = 9{,}9785477$$
$$\log \mathrm{III} = 0{,}9367075-3_n \qquad \log \mathrm{I}^* = \underline{0{,}1778974-2_n}$$
$$\log u_3 = \underline{0{,}4657719-1_n} \qquad 0{,}9908958-4$$
$$0{,}4991777-4_n$$

$$0{,}4991777-4_n$$
$$\underline{0{,}9908958-4}$$
$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n \qquad u_1 = -0{,}322316$$

$$\log R_1 = 0{,}0031320$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log\sin L_1 = 9{,}4731706$$
$$\log\sin\beta_2' = \underline{9{,}5751460_n}$$
$$0{,}5140640-2 \qquad \mathrm{num} = +0{,}032664$$

$$\log R_2 = 0{,}0026650$$
$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log\sin L_2 = 9{,}3652720$$
$$\log\sin\beta_1' = \underline{9{,}4867223_n}$$
$$0{,}3629412-2 \qquad \mathrm{num} = +0{,}023064$$

$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log u_2 = 0\ 4626155-1_n$$
$$\log\sin\alpha_1' = 9{,}9945433$$
$$\log\cos\beta_1' = 9{,}9785477$$
$$\log\sin\beta_2' = \underline{9{,}5751460_n}$$
$$0{,}5191344-2_n \qquad \mathrm{num} = -0{,}033047$$

$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log\sin\alpha_2' = 9{,}9919245$$
$$\log\cos\beta_2' = 9{,}9669084$$
$$\log\sin\beta_1' = \underline{9{,}4867223_n}$$
$$0{,}4164526-2_n \qquad \mathrm{num} = -0{,}026089$$

$$+0{,}032664$$
$$+0{,}023064$$
$$\overline{+0{,}009600}$$
$$-0{,}033047$$
$$\overline{-0{,}023447}$$
$$+0{,}026089$$
$$\mathfrak{S} = \overline{+0{,}002642}$$
$$\log \mathfrak{S} = 0{,}4219328-3$$

$$\log R_1 = 0{,}0031320$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log \cos L_1 = 9{,}9798978_n$$
$$\log \sin \beta_2' = 9{,}5751460_n$$
$$\overline{0{,}0207913-1_n} \qquad \text{num} = -0{,}104904$$

$$\log R_2 = 0{,}0026650$$
$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log \cos L_2 = 9{,}9879982_n$$
$$\log \sin \beta_1' = 9{,}4867223_n$$
$$\overline{0{,}9856674-2_n} \qquad \text{num} = -0{,}096754$$

$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log \cos \alpha_1' = 9{,}1973657$$
$$\log \cos \beta_1' = 9{,}9785477$$
$$\log \sin \beta_2' = 9{,}5751460_n$$
$$\overline{0{,}7219568-3_n} \qquad \text{num} = -0{,}005272$$

$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log \cos \alpha_2' = 9{,}2811834_n$$
$$\log \cos \beta_2' = 9{,}9669084$$
$$\log \sin \beta_1' = 9{,}4867223_n$$
$$\overline{0{,}7057115-3} \qquad \text{num} = +0{,}005078$$

$$+0{,}104904$$
$$-0{,}096754$$
$$\overline{+0{,}008150}$$
$$+0{,}005272$$
$$\overline{+0{,}013422}$$

(Fortsetzung s. folgende Seite.)

$$+0{,}013422$$
$$+0{,}005078$$
$$\mathfrak{T} = +0{,}018500$$
$$\log \mathfrak{T} = 0{,}2671717-2$$

$$\log R_1 = 0{,}0031320$$
$$\log R_2 = 0{,}0026650$$
$$\log \sin (L_1 - L_3) = 8{,}8315552_n$$
$$0{,}8373522-2_n \qquad \text{num} = -0{,}068763$$

$$\log R_1 = 0{,}0031320$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log \sin (\alpha_2' - L_1) = 9{,}9446626_n \qquad \alpha_2' - L_1 = -61^0.\ 41'.\ 11''$$
$$\log \cos \beta_2' = 9{,}9669084$$
$$0{,}3773185-1 \qquad \text{num} = +0{,}238407$$

$$\log R_2 = 0{,}0026650$$
$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log \sin (\alpha_1' - L_2) = 9{,}9987503_n$$
$$\log \cos \beta_1' = 9{,}9785477$$
$$0{,}4882449-1 \qquad \text{num} = +0{,}307783$$

$$\log u_1 = 0{,}5082819-1_n$$
$$\log u_2 = 0{,}4626155-1_n$$
$$\log \sin (\alpha_1' - \alpha_2') = 9{,}5356853_n$$
$$\log \cos \beta_1' = 9{,}9785477$$
$$\log \cos \beta_2' = 9{,}9669084$$
$$0{,}4520388-2_n \qquad \text{num} = -0{,}028316$$

$$+0{,}068763$$
$$+0{,}238407$$
$$+0{,}307170$$
$$-0{,}307783$$
$$-0{,}000613$$
$$+0{,}028316$$
$$\mathfrak{U} = +0{,}027703$$
$$\log \mathfrak{U} = 0{,}4425268-2$$

$$\log \mathfrak{S} = 0{,}4219328-3$$
$$\log \mathfrak{T} = 0{,}2671717-2$$
$$\log \operatorname{tang} \varpi = 9{,}1547611_n \qquad \varpi = 171^0.\ 52'.\ 21''$$

$$\log\sin\varpi = 9{,}1503768$$
$$\log \mathfrak{U} = 0{,}4425268-1$$
$$9{,}5929036-2$$
$$\log \mathfrak{S} = 0{,}4219328-3$$
$$\log\cot i = 10{,}1709708 \qquad i = 24^{0}.\ 0'.\ 9''$$

§. 14.

Wir wollen nun auch die in §. 9. entwickelten Formeln auf den vorhergehenden Fall anwenden. Wir brauchen bei der Rechnung die folgenden Grössen:

$$\tau_{1,2} = 4{,}00000$$
$$\tau_{2,3} = 4{,}00000$$
$$\tau_{3,4} = 3{,}11227$$

$$\log\tau_{1,2} = 0{,}6020600$$
$$\log\tau_{2,3} = 0{,}6020600$$
$$\log\tau_{3,4} = 0{,}4930773$$

$$\log R_1 = 0{,}0031320$$
$$\log R_2 = 0{,}0026650$$
$$\log R_3 = 0{,}0021840$$
$$\log R_4 = 0{,}0017770$$

$$\log\sin\beta_1' = 9{,}4867223_n$$
$$\log\sin\beta_2' = 9{,}5751460_n$$
$$\log\sin\beta_3' = 9{,}6047208_n$$
$$\log\sin\beta_4' = 9{,}5870047_n$$

$$\log\cos\beta_1' = 9{,}9785477$$
$$\log\cos\beta_2' = 9{,}9669084$$
$$\log\cos\beta_3' = 9{,}9616291$$
$$\log\cos\beta_4' = 9{,}9648926$$

$$\log\sin(\alpha_1'-L_1) = 9{,}9954987_n$$
$$\log\sin(\alpha_1'-L_2) = 9{,}9987503_n$$
$$\log\sin(\alpha_1'-L_3) = 9{,}9999868_n$$
$$\log\sin(\alpha_2'-L_1) = 9{,}9446626_n$$
$$\log\sin(\alpha_2'-L_2) = 9{,}9592882_n$$
$$\log\sin(\alpha_2'-L_3) = 9{,}9715136_n$$
$$\log\sin(\alpha_2'-L_4) = 9{,}9794328_n$$

$\log \sin (\alpha_3' - L_1) = 9{,}7929903_n$
$\log \sin (\alpha_3' - L_2) = 9{,}8277661_n$
$\log \sin (\alpha_3' - L_3) = 9{,}8581465_n$
$\log \sin (\alpha_3' - L_4) = 9{,}8790785_n$
$\log \sin (\alpha_4' - L_2) = 9{,}6408477_n$
$\log \sin (\alpha_4' - L_3) = 9{,}6967708_n$
$\log \sin (\alpha_4' - L_4) = 9{,}7345257_n$

$\log \sin (\alpha_1' - \alpha_2') = 9{,}5356853_n$
$\log \sin (\alpha'_2 - \alpha_3') = 9{,}5973333_n$
$\log \sin (\alpha_3' - \alpha_1') = 9{,}8369029$
$\log \sin (\alpha_3' - \alpha_4') = 9{,}4490469_n$
$\log \sin (\alpha_4' - \alpha_2') = 9{,}8048022$

$\log \sin (L_1 - L_2) = 8{,}8315552_n$
$\log \sin (L_2 - L_3) = 8{,}8322667_n$
$\log \sin (L_3 - L_4) = 8{,}7233561_n$

Mittelst dieser Data ergiebt sich nach den in §. 9. entwickelten Formeln:

$\Theta = -0{,}000149$ $\qquad \log \Theta = 0{,}1731863 - 4_n$
$\overset{1}{\Theta}{}' = -0{,}000402$ $\qquad \log \overset{1}{\Theta}{}' = 0{,}6042261 - 4_n$
$\mathfrak{B} = -0{,}115465$ $\qquad \log \mathfrak{B} = 0{,}0624504 - 1_n$
$\mathfrak{B}' = -0{,}104703$ $\qquad \log \mathfrak{B}' = 0{,}0199591 - 1_n$
$\overset{1}{\mathfrak{B}} = -0{,}076014$ $\qquad \log \overset{1}{\mathfrak{B}} = 0{,}8808936 - 2_n$
$\overset{1}{\mathfrak{B}}{}' = -0.108732$ $\qquad \log \overset{1}{\mathfrak{B}}{}' = 0{,}0363574 - 1_n$
$\mathfrak{B}_1 = -0{,}101496$ $\qquad \log \mathfrak{B}_1 = 0{,}0064489 - 1_n$
$\mathfrak{B}_1' = -0{,}092134$ $\qquad \log \mathfrak{B}_1' = 0{,}9644199 - 2_n$
$\overset{1}{\mathfrak{B}}_1 = -0{,}066574$ $\qquad \log \overset{1}{\mathfrak{B}}_1 = 0{,}8233047 - 2_n$
$\overset{1}{\mathfrak{B}}_1{}' = -0{,}095544$ $\qquad \log \overset{1}{\mathfrak{B}}_1{}' = 0{,}9802034 - 2_n$
$\mathfrak{L} = +0{,}194299$ $\qquad \log \mathfrak{L} = 0{,}2884706 - 1$
$\overset{1}{\mathfrak{L}} = +0{,}163607$ $\qquad \log \overset{1}{\mathfrak{L}} = 0{,}2138018 - 1$
$\Omega = +0{,}000220$ $\qquad \log \Omega = 0{,}3424227 - 4$
$\overset{1}{\Omega} = +0{,}000491$ $\qquad \log \overset{1}{\Omega} = 0{,}6910815 - 4$

$P_1 = -0{,}000060$ $\qquad \log P_1 = 0{,}7779071 - 5_n$
$P_2 = -0{,}000155$ $\qquad \log P_2 = 0{,}1912308 - 4_n$
$P_3 = +0{,}000046$ $\qquad \log P_3 = 0{,}6599086 - 5$
$P_4 = +0{,}000151$ $\qquad \log P_4 = 0{,}1793721 - 4$

$$Q_1 = +0{,}867844 \qquad \log Q_1 = 0{,}9384417-1$$
$$Q_2 = +0{,}502872 \qquad \log Q_2 = 0{,}7014574-1$$
$$Q_3 = +0{,}787348 \qquad \log Q_3 = 0{,}8961667-1$$
$$Q_4 = +0{,}720579 \qquad \log Q_4 = 0{,}8576816-1$$

$$S_1 = +0{,}777196 \qquad \log S_1 = 0{,}8905306-1$$
$$S_2 = +0{,}509189 \qquad \log S_2 = 0{,}7068791-1$$
$$S_3 = +0{,}777196 \qquad \log S_3 = 0{,}8905306-1$$
$$S_4 = +0{,}654428 \qquad \log S_4 = 0{,}8158619-1$$

$$\log T_1 = 0{,}9444827-4_n$$
$$\log T_2 = 0{,}1841588-3_n$$
$$\log T_3 = 0{,}9444827-4_n$$
$$\log T_4 = 0{,}2931415-3_n$$

$$S_2 T_3 = -0{,}000448$$
$$T_2 Q_3 = -0{,}001203$$
$$S_2 T_3 + T_2 Q_3 = -0{,}001651$$

$$+S_2 S_3 = +0{,}395739$$
$$-Q_2 Q_3 = -0{,}395935$$
$$+T_2 P_3 = -0{,}000000$$
$$-P_2 T_3 = -0{,}000000$$
$$S_2 S_3 - Q_2 Q_3 + T_2 P_3 - P_2 T_3 = -0{,}000196$$

$$P_2 S_3 = -0{,}000121$$
$$Q_2 P_3 = +0{,}000023$$
$$P_2 S_3 + Q_2 P_3 = -0{,}000098$$

Daher ist die Gleichung, aus welcher u_2 bestimmt werden muss, die folgende:

$$-0{,}001651 . u_2 u_2 - 0{,}000196 . u_2 + 0{,}000098 = 0,$$

oder

$$1651 . u_2 u_2 + 196 . u_2 - 98 = 0,$$

oder

$$u_2 u_2 + \frac{196}{1651} u_2 - \frac{98}{1651} = 0,$$

also, wenn wir

$$a = \frac{196}{1651}, \quad b = \frac{98}{1651}$$

setzen:

$$u_2 u_2 + a u_2 - b = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$u_2 = -\frac{1}{2} a \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right).$$

Weil wir aber aus der im vorhergehenden Paragraphen erlang ersten Näherung schon wissen, dass u_2 negativ ist, so müss wir, da

$$u_2 = -\frac{1}{2} a \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

offenbar positiv ist, im vorliegenden Falle

$$u_2 = -\frac{1}{2} a \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

setzen. Setzt man

$$\tang \varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a},$$

so wird

$$u_2 = -\frac{a \cos \frac{1}{2} \varphi^2}{\cos \varphi}.$$

Mittelst dieser Formeln habe ich gefunden:

$$\log u_2 = 0{,}4915291 - 1_n$$
$$u_2 = -0{,}310119.$$

Hieraus ergiebt sich ferner:

$$\log . Q_1 u_2 = 0{,}4299708 - 1_n \qquad Q_1 u_2 = -0{,}269135$$
$$P_1 = -0{,}000060$$
$$P_1 + Q_1 u_2 = -0{,}269195$$

$$\log . T_1 u_2 = 0{,}4360118 - 4 \qquad T_1 u_2 = +0{,}000273$$
$$S_1 = +0{,}777196$$
$$S_1 + T_1 u_2 = +0{,}777469$$

$$\log(P_1 + Q_1 u_2) = 0{,}4300670-1_n$$
$$\log(S_1 + T_1 u_2) = 0{,}8906830-1$$
$$\log u_1 = 0{,}5393840-1_n$$
$$u_1 = -0{,}346245$$

Die vier Theile der Grösse $\mathfrak{S}$ und ihre Logarithmen sind:

+ 0,034912	log = 0,5429776—2
+ 0,024777	log = 0,3940433—2
− 0,037945	log = 0,5791501 − 2_n
− 0,029955	log = 0,4764683—2_n

+ 0,034912
−0,024777
+ 0,010135
−0,037945
−0,027810
+ 0,029955
$\mathfrak{S}$ = + 0,002145
log $\mathfrak{S}$ = 0,3314273—3

Die vier Theile der Grösse $\mathfrak{T}$ und ihre Logarithmen sind:

− 0,112126	log = 0,0497049—1_n
−0,103937	log = 0,0167695—1_n
−0,006053	log = 0,7819725—3_n
+ 0,005831	log = 0,7657272—3

+ 0,112126
− 0,103937
+ 0,008189
+ 0,006053
+ 0,014242
+ 0,005831
$\mathfrak{T}$ = + 0,020073
log $\mathfrak{T}$ = 0,3026123—2

vier Theile von $\mathfrak{U}$ und ihre Logarithmen sind:

−0,068763	log = 0,8373522—2_n
+ 0,254819	log = 0,4062321—1
+ 0,330634	log = 0,5193470—1
− 0,032513	log = 0,5120545 − 2_n

$$
\begin{array}{rl}
 & +0{,}068763 \\
 & +0{,}254819 \\ \hline
 & +0{,}323582 \\
 & -0{,}330634 \\ \hline
 & -0{,}007052 \\
 & +0{,}032513 \\ \hline
\mathfrak{U} = & +0{,}025461 \\
\log \mathfrak{U} = & \;\; 0{,}4058755-2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \mathfrak{S} = & 0{,}3314273-3 \\
\log \mathfrak{T} = & 0{,}3026123-2 \\ \hline
\log \tang \bar{\omega} = & 9{,}0288150_n \qquad \bar{\omega} = 173^0.\ 54'.\ 1'',9
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \sin \bar{\omega} = & 9{,}0252027 \\
 & +11465 \\
\log \mathfrak{U} = & 0{,}4058755-2 \\ \hline
 & 9{,}4322247-2 \\
\log \mathfrak{S} = & 0{,}3314273-3 \\ \hline
\log \cot i = & 10{,}1007974 \qquad i = 38^0.24'.\ 35'',\ 6
\end{array}
$$

Nach dem Verzeichnisse von **Olbers** Nr. 80., wenn wir die von **Bessel** berechneten Elemente auswählen, sind die richtigen Werthe von $\bar{\omega}$ und i:

$$\bar{\omega} = 175^0.\ 3'.\ 59'' \qquad i = 40^0.\ 45'.\ 50''$$

und man sieht also, wie nahe wir durch die obige auf einer ganz directen, gar kein Probiren irgend einer Art in Anspruch nehmenden Rechnung beruhende Näherung schon den wahren Werthen von $\bar{\omega}$ und i gekommen sind; ja ich glaube, dass im vorliegenden Falle die Abweichungen von respective $1^0.\ 9'.\ 57''$ und $2^0.\ 21'.\ 14''$ von den wahren Elementen mehr auf Rechnung der zum Grunde gelegten Beobachtungen kommen, als der angewandten Methode zur Last fallen, weil ich durch weitere Fortsetzung der Rechnung gefunden habe, dass die beiden aus §. 12. bekannten Gleichungen, durch welche die Bewegung des Cometen in einer Parabel bedingt wird, schon sehr nahe erfüllt werden, wenn man für $\bar{\omega}$ und i ihre beiden durch die obige Näherungsmethode gefundenen Werthe setzt. Ich will aber, um die Ausdehnung, welche diese Abhandlung schon gewonnen hat, nicht noch mehr zu vergrössern, die weitere Rechnung nicht mittheilen, weil dieselbe bei Anwendung der im Obigen entwickelten Formeln nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegen kann.*) Das Anschliessen an eine Parabel würde nun gewissermaassen die dritte Nähe-

---

*) Weil am Schluss zufällig noch nicht gut anders zu benutzender Raum vorhanden war, so habe ich die betreffende Rechnung im Anhange doch noch mitgetheilt.

rung sein, wo man dann endlich zur Ellipse als einer Art vierter Näherung, wenigstens bei den Cometen, übergehen könnte. Soll ich übrigens schliesslich mein eignes Urtheil über die von mir in dieser Abhandlung entwickelte neue Methode zur Berechnung der Cometenbahnen aussprechen, welches sich keineswegs allein auf das oben berechnete Beispiel, sondern auch noch auf manche andere, namentlich über ältere Cometen angestellte Rechnungen gründet, so glaube ich, dass dieselbe, insofern man vier gute und scharf reducirte Beobachtungen zum Grunde zu legen im Stande ist, allerdings den Namen einer völlig directen, nicht das geringste Probiren in Anspruch nehmenden Methode, welche man bisher noch nicht besass, verdient, und bei geschickter Anwendung zu brauchbaren Resultaten führen kann; sind aber die Beobachtungen weniger gut, so kann, wie ich aus verschiedenen Rechnungen, die jedoch noch einer genaueren Revision bedürfen, für jetzt schliessen muss, diese Methode auch zu von der Wahrheit bedeutend abweichenden Resultaten führen, welchen Fehler die Methode von Olbers, wenigstens in demselben Maasse, wohl nicht hat, wodurch dieselbe eben für die praktische Anwendung so brauchbar wird. Welches aber auch der praktische Werth der von mir in dieser Abhandlung entwickelten neuen Methode zur Berechnung der Cometenbahnen sein mag, so scheint mir das analytisch-geometrische Interesse derselben doch jedenfalls gross genug zu sein, um ihre Mittheilung an diesem Orte zu rechtfertigen, und der Vorzug vor anderen Methoden, dass sie völlig direct ist und des Probirens gar nicht bedarf, wird ihr ausserdem nie streitig gemacht werden können; auch glaube ich, dass die Anwendung derselben eine recht gute Uebung für Anfänger in astronomischen Rechnungen darzubieten geeignet ist, bevor dieselben zur Berechnung von Cometenbahnen nach anderen, schon eine grössere Uebung im astronomischen Rechnen voraussetzenden Methoden übergehen, indem die in Rede stehende Methode in der That gar keine andere Uebung im Rechnen voraussetzt, als die, welche jeder gut vorbereitete Anfänger aus der Lehre von den Logarithmen und der ebenen und sphärischen Trigonometrie mitbringt. Zugleich bietet endlich diese Methode, wie es mir scheint, eine gute Anwendung der Lehren der analytischen Geometrie auf einen praktischen Gegenstand dar, und dürfte daher auch in dieser Beziehung für Anfänger instructiv, und der weiteren Ausbildung derselben in der analytischen Geometrie förderlich sein, die durch Anwendungen von rein theoretischem Interesse natürlich zwar auch, aber, wie es mir immer geschienen hat, doch nicht ganz so vollständig wie durch Anwendungen auf Mechanik, Astronomie und andere zugleich das praktische Interesse in Anspruch nehmende Theile der Mathematik und der Naturwissenschaften erlangt werden kann.

Anhang.

$\varpi = 173^\circ.\ 54'.\ 2''$ $\quad i = 38^\circ.\ 24'.\ 36''$

$$\begin{array}{rl} L_1 = 162^\circ.\ 42'.\ 5'' & \alpha_1' = 80^\circ.\ 56'.\ 11'' \\ \varpi = 173.\ 54.\ 2 & \varpi = 173.\ 54.\ 2 \\ L_1 - \varpi = -11.\ 11.\ 57 & \alpha_1' - \varpi = -92.\ 57.\ 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cot\beta_1' = 10{,}4918254_n & \log\cot\beta_1' = 10{,}4918254_n \\ \log\sin(L_1 - \alpha_1') = 9{,}9954987 & \log\sin(\alpha_1' - \varpi) = 9{,}9994186_n \\ 20{,}4873241_n & \log\tan g\, w = 10{,}4912440 \\ \log\cos(L_1 - \varpi) = 9{,}9916503 & w = 72^\circ.\ 7'.\ 0'' \\ \log\tan g\, v = 10{,}4956738_n & i = 38.\ 24.\ 36 \\ v = -72^\circ.\ 17'.\ 13'' & i + w = 110.\ 31.\ 36 \\ i = 38.\ 24.\ 36 & \\ i - v = 110.\ 41.\ 49 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\cos v = 9{,}4832308 & \log\cos w = 9{,}4872512 \\ \log\tan g(L_1 - \varpi) = 9{,}2966438_n & \log\sin(L_1 - \varpi) = 9{,}2882942_n \\ 18{,}7798746_n & \log R_1 = 0{,}0031320 \\ \log\cos(i - v) = 9{,}5482972_n & 0{,}7786774 - 2_n \\ \log\tan g\, \omega_1 = 9{,}2315774 & \log\sin\omega_1 = 9{,}2253635_n \\ \omega_1 = 189^\circ.\ 40'.\ 22'' & \log\cos(i + w) = 9{,}5448655_n \\ & 10{,}7702290 - 2 \\ & \log r_1 = 0{,}0084484 \\ & r_1 = 1{,}019644 \end{array}$$

$\varpi = 173^\circ.\ 54'.\ 2''$ $\quad i = 38^\circ.\ 24'.\ 36''$

$$\begin{array}{rl} L_2 = 166^\circ.\ 35'.\ 31 & \alpha_2' = 101^\circ.\ 0'.\ 54'' \\ \varpi = 173.\ 54.\ 2 & \varpi = 173.\ 54.\ 2 \\ L_2 - \varpi = -7.\ 18.\ 31 & \alpha_2' - \varpi = -72.\ 53.\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\cot\beta_2' = 10{,}3917625_n & \log\cot\beta_2' = 10{,}3917625_n \\ \log\sin(L_2 - \alpha_2') = 9{,}9592882 & \log\sin(\alpha_2' - \varpi) = 9{,}9803302_n \\ 20{,}3510507_n & \log\tan g\, w = 10{,}3720927 \\ \log\cos(L_2 - \varpi) = 9{,}9964571 & w = 66^\circ.\ 59'.\ 51'' \\ \log\tan g\, v = 10{,}3545936_n & i = 38.\ 24.\ 36 \\ v = -66^\circ.\ 9'.\ 19'' & i + w = 105.\ 24\ 27 \\ i = 38.\ 24.\ 36 & \\ i - v = 104.\ 33.\ 55 & \end{array}$$

$\log\cos v = 9,6066601$

$\log\tang(L_2 - \varpi) = 9,1080765_n$

$18,7147366_n$

$\log\cos(i - v) = 9,4005084_n$

$\log\tang\omega_2 = 9,3142282$

$\omega_2 = 191^0.\ 38'.\ 58''$

$\log\cos w = 9,5919226$

$\log\sin(L_2 - \varpi) = 9,1045336_n$

$\log R_2 = 0,0026650$

$0,6991212 - 2_n$

$\log\sin\omega_2 = 9,3051862_n$

$\log\cos(i + w) = 9,4243626_n$

$0,7295488 - 2$

$\log r_2 = 0,9695724 - 1$

$r_2 = 0,932336$

$\varpi = 173^0.\ 54'.\ 2''$

$i = 38^0.\ 24'.\ 36''$

$L_3 = 170^0.\ 29'.\ 20''$

$\varpi = 173.\ 54.\ 2$

$L_3 - \varpi = -3.\ 24.\ 42$

$\alpha_3' = 124^0.\ 19'.\ 22''$

$\varpi = 173.\ 54.\ 2$

$\alpha_3' - \varpi = -49.\ 34.\ 40$

$\log\cot\beta_3' = 10,3569083_n$

$\log\sin(L_3 - \alpha_3') = 9,8581465$

$20,2150548_n$

$\log\cos(L_3 - \varpi) = 9,9992296$

$\log\tang v = 10,2158252_n$

$v = -58^0.\ 41'.\ 4''$

$i = 38.\ 24.\ 36$

$i - v = 97.\ 5.\ 40$

$\log\cot\beta_3' = 10,3569083_n$

$\log\sin(\alpha_3' - \varpi) = 9,8815484_n$

$\log\tang w = 10,2384567$

$w = 59^0.\ 59'.\ 38''$

$i = 38.\ 24.\ 36$

$i + w = 98.\ 24.\ 14$

$\log\cos v = 9,7167954$

$\log\tang(L_3 - \varpi) = 8,7753577_n$

$18,4911531_n$

$\log\cos(i - v) = 9,0916941_n$

$\log\tang\omega_3 = 9,3994590$

$\omega_3 = 194^0.\ 5'.\ 0''$

$\log\cos w = 9,6990502$

$\log\sin(L_3 - \varpi) = 8,7745872_n$

$\log R_3 = 0,0021840$

$0,4758214 - 2_n$

$\log\sin\omega_3 = 9,3862008_n$

$\log\cos(i + w) = 9,1647990_n$

$0,5509998 - 2$

$\log r_3 = 0,9248216 - 1$

$r_3 = 0,841049$

$\varpi = 173^0.\ 54'.\ 2''$ $\qquad i = 38^0.\ 24'\ 36''$

$L_4 = 173^0.\ 31'.\ 14''$ $\quad \alpha_4' = 140^0.\ 39'.\ 21''$

$\varpi = 173.\ \ 54.\ \ 2$ $\quad \varpi = 173.\ \ 54.\ \ 2$

$L_4 - \varpi = -0.\ 22.\ 48$ $\quad \alpha_4' - \varpi = -33.\ 14.\ 41$

$\log \cot \beta_4' = 10{,}3778880_n$
$\log \sin(L_4 - \alpha_4') = 9{,}7345257$
$20{,}1124137_n$
$\log \cos(L_4 - \varpi) = 9{,}9999904$
$\log \tang v = 10{,}1124233_n$
$v = -52^0.\ 20'.\ 4''$
$i = 38.\ \ 24.\ 36$
$i - v = 90.\ \ 44.\ 40$

$\log \cot \beta_4' = 10{,}3778880_n$
$\log \sin(\alpha_4' - \varpi) = 9{,}7389518_n$
$\log \tang w = 10{,}1168398$
$w = 52^0.\ 36'.\ 57''$
$i = 38.\ \ 24.\ \ 36$
$i + w = 91.\ \ 1.\ 33$

$\log \cos v = 9{,}7860777$
$\log \tang(L_4 - \varpi) = 7{,}8216655_n$
$17{,}6077432_n$
$\log \cos(i - v) = 8{,}1136974_n$
$\log \tang \omega_4 = 9{,}4940458$
$\omega_4 = 197^0.\ 19'.\ 26''$

$\log \cos w = 9{,}7833005$
$\log \sin(L_4 - \varpi) = 7{,}8216559_n$
$\log R_4 = 0{,}0017770$
$0{,}6067334 - 3_n$
$\log \sin \omega_4 = 9{,}4738842_n$
$\log \cos(i + w) = 8{,}2529307_n$
$0{,}7268149 - 3$
$\log r_4 = 0{,}8799185 - 1$
$r_4 = 0{,}758435$

Es ist also:

$\omega_1 = 189^0.\ 40'.\ 22''$	$r_1 = 1{,}019644$
$\omega_2 = 191.\ \ 38.\ \ 58$	$r_2 = 0{,}932336$
$\omega_3 = 194.\ \ 5.\ \ 0$	$r_3 = 0{,}841049$
$\omega_4 = 197.\ \ 19.\ \ 26$	$r_4 = 0{,}758435$

Weil $\varpi > 90^0$, $i < 90^0$ ist und die Winkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 wachsen, so ist nach §. 10. III. der Comet rechtläufig, und ϖ ist die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens, wie auch Olbers a. a. O. findet.

$$\omega_1 = 189^0.\ 40'.\ 22''$$
$$\omega_2 = 191.\ \ 38.\ \ 58$$
$$\omega_3 = 194.\ \ \ 5.\ \ \ 0$$

$$\omega_2 - \omega_3 = -2^0.\ 26'.\ 2'' \qquad \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3) = -1^0.\ 13'.\ 1''$$

$$\omega_3 - \omega_1 = +4.\ \ 24.\ \ 38 \qquad \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) = +2.\ \ 12.\ \ 19$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -1.\ \ 58.\ \ 36 \qquad \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = -0.\ \ 59.\ \ 18$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3) = 8{,}3271153_n$$
$$\log\sqrt{r_1} = 0{,}0042242$$
$$0{,}3228911 - 2_n \qquad \text{num} = -0{,}021033$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) = 8{,}5852334$$
$$\log\sqrt{r_2} = 0{,}9847862 - 1$$
$$0{,}6004472 - 2 \qquad \text{num} = +0{,}039852$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = 8{,}2367590_n$$
$$\log\sqrt{r_3} = 0{,}9624108 - 1$$
$$0{,}2743482 - 2_n \qquad \text{num} = -0{,}018808$$

$$\begin{array}{r} -0{,}021033 \\ +0{,}039852 \\ \hline +0{,}018819 \\ -0{,}018808 \\ \hline +0{,}000011 \end{array}$$

Dies ist der Betrag der nach §. 12. III. hier gültigen Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)}{\sqrt{r_1}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1)}{\sqrt{r_2}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)}{\sqrt{r_3}} = 0.$$

$$\omega_2 = 191^0.\ 38'.\ 58''$$
$$\omega_3 = 194.\ \ \ 5.\ \ \ 0$$
$$\omega_4 = 197.\ \ 19.\ \ 26$$

$$\omega_3 - \omega_4 = -3^0.\ 14'.\ 26'' \qquad \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_4) = -1^0.\ 37'.\ 13''$$

$$\omega_4 - \omega_2 = +5.\ \ 40.\ \ 28 \qquad \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega_2) = +2.\ \ 50.\ \ 14$$

$\omega_2 - \omega_3 = -2.\ 26.\ 2 \qquad \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3) = -1.\ 13.\ 1$

$\log \sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_4) = 8{,}4514088_n$

$\log \sqrt{r_2} = 0{,}9847862 - 1$

$0{,}4666226 - 2_n \qquad \text{num} = -0{,}029284$

$\log \sin \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega_2) = 8{,}6945931$

$\log \sqrt{r_3} = 0{,}9624108 - 1$

$0{,}7321823 - 2 \qquad \text{num} = +0{,}053974$

$\log \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3) = 8{,}3271153_n$

$\log \sqrt{r_4} = 0{,}9399592 - 1$

$0{,}3871561 - 2_n \qquad \text{num} = -0{,}024387$

$-0{,}029284$
$+0{,}053974$
$+0{,}024690$
$-0{,}024387$
$+0{,}000303$

Dies ist der Betrag der nach §. 12. III. hier gültigen Gleichung

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_4)}{\sqrt{r_2}} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega_2)}{\sqrt{r_3}} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)}{\sqrt{r_4}} = 0.$$

Es würde keine Schwierigkeit haben, durch die bekannten Methoden $\bar{\omega}$ und i nun so zu bestimmen, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)}{\sqrt{r_1}} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1)}{\sqrt{r_2}} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)}{\sqrt{r_3}} = 0,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_4)}{\sqrt{r_2}} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_4 - \omega_2)}{\sqrt{r_2}} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)}{\sqrt{r_4}} = 0,$$

genau erfüllt werden, wobei ich mich aber jetzt nicht länger aufhalten will, da es mir zunächst nur darauf ankam, die Methode zu zeigen und möglichst deutlich zu erläutern.

V.

Ueber die von Asymptotenchorden umhüllten Curven.

Von

Herrn O. Bermann,

Hülfslehrer am Gymnasium zu Wetzlar.

(Vergl. Thl. XIV. Nr. XXVII. S. 382. Thl. XVI. Nr. XV. S. 179.)

Im Folgenden werden nochmals diejenigen Curven betrachtet, welche von den Asymptotenchorden gegebener Kegelschnitte in dem Falle umhüllt werden, dass der entsprechende Pol sich ebenfalls in einem Kegelschnitte bewegt. Das Frühere soll hiermit theils vollständiger, theils richtiger dargestellt werden; doch wird es gewiss möglich sein, ausser den hier betrachteten Fällen noch andere abzuleiten.

Es ist bereits bekannt, dass, wenn die Directrix eine Parabel ist, die Umhüllungscurve mit ihr zusammenfällt. Indem daher dieser Fall ausgeschlossen wird, lässt sich

$$\Omega \equiv y^2 + \beta x^2 + \varepsilon = 0$$

als einfachster Ausdruck der Directrix ansehen, so dass man sie auf zugeordnete Durchmesser bezieht. Für den Pol x', y' ist dann

$$(y-y')^2 + \beta(x-x')^2 = \Omega$$

die Asymptotenchorde und

$$\frac{dy'}{dx'} = -\beta . \frac{x-x'}{y-y'}$$

deren erste Differentialgleichung. — Die Gleichung der Bahn allgemein

$$\omega' : y'^2 + 2\alpha' x' y' + \beta' x'^2 + 2\gamma' y' + 2\delta' x' + \varepsilon' = 0,$$

ihre erste Differentialgleichung demnach

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\alpha' y' + \beta' x' + \delta'}{y' + \alpha' x' + \gamma'}.$$

Setzt man

$$x - x' = t, \quad y - y' = u, \quad \beta - \beta' = m, \quad y + \alpha' x + \gamma' = p,$$
$$\alpha' y + \beta' x + \delta' = q;$$

so hat man durch Identificirung der beiden Ausdrücke für ersten Differentialquotienten:

$$\frac{\beta t}{u} = \frac{q - \alpha' u - \beta' t}{p - u - \alpha' t}$$

oder

$$\alpha'(u^2 - \beta' t^2) - mtu - qu + \beta pt = 0,$$

und daher

1) $u^2 + \beta t^2 - \Omega = 0$ Gleichung der Asymptotenchorde;

2) $u^2 + \beta' t^2 + 2\alpha' tu - 2pu - 2qt + \omega = 0$ die Bahngleichung, in ω für x' und y' x und y gesetzt s

3) $u^2 - \beta' t^2 - \frac{m}{\alpha'} tu - \frac{q}{\alpha'} u + \frac{\beta p}{\alpha'} t = 0.$

Die Elimination von t und u aus diesen drei Gleichu wird die der Umhüllungscurve geben.

Es ist

$$1) - 2) : \; mt^2 - 2\alpha' tu + 2pu + 2qt = \Omega + \omega,$$
$$\alpha' \times (1) - 3)) : \; 2\alpha' \beta t^2 + mtu + qu - \beta pt = \alpha' \Omega;$$

woraus

$$u = \frac{mt^2 + 2qt - (\Omega + \omega)}{2(\alpha' t - p)} = \frac{\alpha' \Omega + \beta pt - 2\alpha' \beta t^2}{mt + q}.$$

Dies gibt die Gleichung

$$(m^2+4\alpha'^2\beta)t^3+3(mq-2\alpha'\beta p)t^2+2\left(q^2+\beta p^2-\alpha'^2\Omega-\frac{m}{2}(\Omega+\omega)\right)t$$
$$+(2\alpha'p-q)\Omega-q\omega=0.$$

Substituirt man aber die ersten der vorstehenden Werthe von u in Gleichung 1), so resultirt

$$(m^2+4\alpha'^2\beta)t^4+4(mq-2\alpha'\beta p)t^3+4\left(q^2+\beta p^2-\alpha'^2\Omega-\frac{m}{2}(\Omega+\omega)\right)t^2$$
$$+4(\Omega(2p\alpha'-q)-q\omega)t+(\Omega+\omega)^2-4p^2\Omega=0,$$

so dass man die beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad At^4+4Bt^3+4Ct^2+Dt+E=0,$$

$$\text{II.}\quad At^3+3Bt^2+2Ct+D=0$$

hat. II. ist die erste Ableitung von I., welche deshalb zwei gleiche Wurzeln haben muss.

Durch Elimination von t aus II. und I. oder aus II. und I. $-t\times$II.:

$$Bt^3+2(t^2+3Dt+E=0$$

ergibt sich sodann als allgemeine Gleichung der gesuchten Umhüllungscurve:

$$[(3B^2-2AC)(3D^2-2CE)-(AE-BD)^2]^2$$
$$=[(AE-BD)(3AD-2BC)+(3B^2-2AC)(3BE-2CD)]$$
$$\times[(AE-BD)(3BE-2CD)+(3D^2-2CE)(3AD-2BC)],$$

eine complicirte Form, worin

$$A:m^2+4\alpha'^2\beta,\quad B:mq-2\alpha'\beta p,\quad C:q^2+\beta p^2-\alpha'^2\Omega-\frac{m}{2}(\Omega+\omega),$$

$$D:2\alpha'p\Omega-q(\Omega+\omega),\quad E:(\Omega+\omega)^2-4p^2\Omega$$

ist. Durch andere Eliminationsweisen kann man die Curve auch in verschiedenen anderen Formen darstellen, wovon noch folgende hervorgehoben werden soll. Die Substitution des zweiten Werthes von u in Gleichung 1) gibt

$$\text{III.}\quad At^4+2Bt^3+C't^2+2D't+E'=0,$$

wo

$$C':q^2+\beta p^2-\frac{A\Omega}{\beta},$$

$$D':(\alpha'p-\frac{m}{\beta}q)\Omega,$$

$$E' : (\alpha'^2 \Omega - q^2) \frac{\Omega}{\beta}$$

ist. Bildet man

$$\text{I.} + \text{III.} - 2t \times \text{II.} : C't^2 + 2(D+D')t + E + E' = 0,$$

so folgt

$$t = \frac{1}{C'} [(\sqrt{(D+D')^2 - C'(E+E')} - (D+D')].$$

Die Substitution dieses Werthes in II. gibt als Gleichung der Umhüllungscurve:

$$A[\sqrt{(D+D')^2 - C'(E+E')} - (D+D')]^3$$

$$+ 3BC'[\sqrt{(D+D')^2 - C'(E+E')} - (D+D')]^2$$

$$+ 2CC'^2[\sqrt{(D+D')^2 - C'(E+E')} - (D+D')] + DC'^3 = 0^{*}).$$

Hat man ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte als Bahn und Directrix, so ist $\alpha' = 0$, $\beta = \beta'$; daher

$$m = 0; p : y + \gamma'; q : \beta x + \delta'$$

oder, wenn man die Centrale beider Kegelschnitte zur Ordinatenaxe wählt, so dass δ' verschwindet:

$$q = \beta x;\ A = 0;\ B = 0;\ C = C' = q^2 + \beta p^2 = \beta((y+\gamma')^2 + \beta x^2);$$

$$D = -q(\Omega + \omega);\ E = (\Omega + \omega)^2 - 4p^2\Omega;\ D' = 0;\ E' = -\beta x^2 \Omega.$$

Die Gleichung der Umhüllungscurve in ihrer zuletzt aufgestellten Form reducirt sich nun auf:

$$2C[\sqrt{D^2 - C(E+E')} - D] + CD = 0,$$

$$2\sqrt{D^2 - C(E+E')} = D.$$

Quadrirt und reducirt:

---

*) Die Gleichung vereinfacht sich durch die frühere Annahme $\alpha' = 0$, indem, wo möglich, diejenigen zugeordneten Durchmesser der Directrix zu Coordinatenaxen gewählt werden, welche gleichzeitig zugeordneten Durchmessern der Bahn parallel sind.

$$3D^2=4C(E+E'),$$

$$3q^2(\Omega+\omega)^2=4(q^2+\beta p^2)\left[(\Omega+\omega)^2-4p^2\Omega-\frac{q^2}{\beta}\Omega\right]-q^2(\Omega+\omega)^2$$

$$=4\beta p^2(\Omega+\omega)^2-4(q^2+\beta p^2)(q^2+4\beta p^2)\frac{\Omega}{\beta},$$

$$(q^2+4\beta p^2)(\Omega+\omega)^2=4\frac{q^2+\beta p^2}{\beta}(q^2+4\beta p^2)\Omega,$$

$$(\Omega+\omega)^2=4\frac{q^2+\beta p^2}{\beta}.\Omega,$$

$$(\Omega+\omega)^2=4[(y+\gamma')^2+\beta x^2].\Omega$$

$$=4(\omega+\gamma'^2-\varepsilon')\Omega,$$

$$(\Omega-\omega)^2=4(\gamma'^2-\varepsilon')\Omega,$$

$$4)\qquad \Omega-\omega-2\sqrt{\gamma'^2-\varepsilon'}.\sqrt{\Omega}=0.$$

Aber

$$\Omega-\omega=-2\left(\gamma'y-\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\right).$$

Also ist

$$\left(\gamma'y-\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}\right)^2=(\gamma'^2-\varepsilon')(y^2+\beta x^2+\varepsilon)$$

oder

$$5)\qquad \varepsilon'y^2+\beta(\varepsilon'-\gamma'^2)x^2+(\varepsilon'-\varepsilon)\gamma'y+\frac{1}{4}(\varepsilon+\varepsilon')^2-\varepsilon\gamma'^2=0$$

die gesuchte Umhüllungscurve, ein Kegelschnitt.

Dasselbe Resultat ergibt sich auch folgendermassen. Unter den obigen Bedingungen wird II.:

$$4Ct^2+4Dt+E=0,$$

$$t=-\frac{D}{2C}\pm\frac{\sqrt{D^2-CE}}{2C}.$$

Weil beide Wurzelwerthe gleich sein müssen, ist nun

$$D^2-CE=0$$

die Gleichung der Umhüllungscurve.

$$D^2-CE\equiv\beta^2x^2(\Omega+\omega)^2-[\beta^2x^2+\beta(y+\gamma')^2][(\Omega+\omega)^2-4(y+\gamma')^2\Omega]=0,$$

was sich auf

$$(\Omega + \omega)^2 - 4(\beta x^2 + (y+\gamma')^2)\Omega = 0$$

reducirt, d. h. auf das bereits vorhin Entwickelte.

Die Gleichung des Umhüllungs-Kegelschnitts lässt sich auch schreiben:

$$6) \quad \left(y - \frac{\gamma'}{2\varepsilon'}(\varepsilon - \varepsilon')\right)^2 + \frac{\beta}{\varepsilon'}(\varepsilon' - \gamma'^2)x^2 + \frac{1}{4\varepsilon'^2}(\varepsilon' - \gamma'^2)(\varepsilon + \varepsilon')^2 = 0,$$

woraus erhellt, dass sein Mittelpunkt auf der Axe der y, d. h. ebenfalls auf der Centralen von Bahn und Directrix in der Entfernung $(\varepsilon - \varepsilon')\frac{\gamma'}{2\varepsilon'}$ vom Mittelpunkte letzterer liegt, und dass auch er hinsichtlich der Lage mit jenen beiden übereinstimmt.*)

Sind Bahn und Directrix-Ellipsen, also β positiv ($\varepsilon' - \gamma'^2$ ist immer $\leqq 0$), so bedingt das Vorzeichen von ε' die Natur des Umhüllungs-Kegelschnitts. Da aber ε' das Product aus den beiden Segmenten ist, welche die Bahn auf der Centralen bestimmt, so ist derselbe eine Hyperbel, wenn beide von gleichem Vorzeichen sind oder ε' positiv ist, eine Ellipse, wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

Schneidet daher die Bahn-Ellipse die Centrale in zwei zu verschiedenen Seiten des Mittelpunktes der Directrix-Ellipse liegenden Punkten, so ist die Umhüllungscurve eine Ellipse; liegen sie aber auf derselben Seite, eine Hyperbel; geht endlich die Bahn durch den Mittelpunkt der Directrix selbst, so verschwindet ε' und die Umhüllungscurve geht in die Parabel

$$7) \quad \beta\gamma'^2 x^2 + \varepsilon\gamma' y + \varepsilon\gamma'^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 = 0$$

oder

$$x^2 = -\frac{\varepsilon}{\beta\gamma'}\left(y + \frac{4\gamma'^2 - \varepsilon}{4\gamma'}\right)$$

über, welche die Centrale zum Durchmesser und da, wo sie von ihr geschnitten wird, eine in der Entfernung $\frac{4\gamma'^2 - \varepsilon}{4\gamma'}$ der Abscissenaxe parallele Linie zur Tangente hat. Da der Mittelpunkt der Bahn von dem der Directrix in der Entfernung $y = -\gamma'$ liegt und

*) Hier ist

$$\Omega : y^2 + \beta x^2 + \varepsilon = 0,$$
$$\omega : (y + \gamma')^2 + \beta x^2 + \varepsilon' - \gamma'^2 = 0.$$

für die Ellipse $\frac{\varepsilon}{\beta}$ negativ ist, so ist die Richtung dieser Parabel derjenigen entgegengesetzt, in welcher man von letzterem Mittelpunkte zum ersteren gelangt.

Hat man hingegen zwei Hyperbeln, also β negativ, so muss es sich offenbar folgendermassen verhalten: Wenn die Bahn zu beiden Seiten des Directrix-Mittelpunkts die Centrale schneidet, so ist die Umhüllungscurve eine Hyperbel; schneidet sie dieselbe aber auf einer Seite, eine Ellipse. Für $\varepsilon'=0$ unterscheidet sich die resultirende Parabel nur durch die entgegengesetzte Richtung von der vorhin betrachteten.

Sind beide Kegelschnitte concentrisch oder $\gamma'=0$, so ist die Umhüllungscurve

$$y^2+\beta x^2+\frac{(\varepsilon+\varepsilon')^2}{4\varepsilon'}=0$$

ein gleichartiger und ähnlicher (ebenfalls concentrischer) Kegelschnitt.

In gerade Linien und Punkt kann die Curve nach Gleichung 6) nur dann degeneriren, wenn $(\varepsilon'-\gamma'^2)(\varepsilon+\varepsilon')^2$ verschwindet mit der Bedingung $\varepsilon' \gtrless 0$, also entweder für $\varepsilon'-\gamma'^2=0$ oder für $\varepsilon'=-\varepsilon$, wenn die Bahn nicht durch den Mittelpunkt der Directrix geht:

1) $\varepsilon'-\gamma'^2=0$.

Für ein positives β ist die Bahn der Punkt, dessen $x=0$, $y=-\gamma'$, d. h. der Mittelpunkt, auf den sie sich reducirt hat; dann ist aus 6) $y=\frac{\varepsilon-\gamma'^2}{2\gamma'}$ die Gleichung der Umhüllungscurve, d. h. man erhält die Asymptotenchorde der Bahn-Ellipse für diesen Punkt als Pol. Reducirt sich auch die Bahn auf einen Punkt, ihren Mittelpunkt, so ist $\varepsilon=0$, $y=\frac{-\gamma'}{2}$ die bezügliche Gleichung, wie es auch nach dem Früheren sein muss, weil die Asymptotenchorde eines Punktes die seine Verbindungslinie mit dem Pole halbirende Senkrechte ist.

Für ein negatives β ist die Bahn ein System zweier Geraden, d. h. die Bahn-Hyperbel reducirt sich auf ihre denen der Directrix parallele Asymptoten. Für $\varepsilon=0$ reducirt sich auch die Directrix-Hyperbel auf ihre Asymptoten. Auch dann ist die Umhüllungscurve dieselbe Gerade $y=\frac{\varepsilon-\gamma'^2}{2\gamma'}$, d. h. die Asymptotenchorde des Bahnmittelpunktes oder des Punktes, in welchem die beiden Geraden, welche die Bahn bilden, sich schneiden. Sie ist dann identisch mit der gemeinschaftlichen Chorde von Bahn und Directrix, was auch schon vorhin bei der Ellipse der Fall war; dies erhellt auch aus Gleichung 4), welche sich auf $\Omega-\omega=0$ reducirt. Ist $\varepsilon=0$ oder hat man zwei Systeme paralleler Geraden,

so ist $y = -\frac{1}{2}\gamma'$ die Gerade, auf welche sich die Umhüllungscurve reducirt. — Alles dieses zeigt sich leicht bei der Ausführung der bezüglichen Constructionen, weil hier für keinen anderen Punkt der Bahn, als den Mittelpunkt, eine Asymptotenchorde möglich ist.

2) $\varepsilon' = -\varepsilon$.

Unter dieser Bedingung geht Gleichung 6) über in

$$(y+\gamma')^2 + \frac{\beta(\varepsilon'-\gamma'^2)}{\varepsilon'}x^2 = 0,$$

ist also ein Punkt für ein negatives $\frac{\beta}{\varepsilon'}$, ein Geradensystem für ein positives, da $\varepsilon' - \gamma'^2$ immer negativ ist. Da aber $\varepsilon' = -\varepsilon$ und ε stets negativ ist, so hat man einen Punkt für ein negatives β, ein Geradensystem für ein positives. Die Bedingung $\varepsilon' = -\varepsilon$ heisst aber nichts Anderes, als dass die gemeinschaftliche Chorde von Bahn und Directrix zugleich Polare des Bahn-Mittelpunktes für die gegebene Directrix ist oder die Punkte verbindet, in welchen die von jenem an letztere gezogenen Tangenten dieselbe berühren. Es ist nämlich die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde

$$\Omega - \omega = 0 \equiv y^2 + \beta x^2 + \varepsilon - (y^2 + \beta x^2 + 2\gamma' y - \varepsilon) = 0$$
$$\equiv 2\varepsilon - 2\gamma' y = 0 \equiv y - \frac{\varepsilon}{\gamma'} = 0;$$

die Chordale des Poles $x' = 0$, $y' = -\gamma'$ für die Directrix

$$y^2 + \beta x^2 + \varepsilon = 0$$

findet sich, wenn man in der allgemeinen Polargleichung

$$(y' + \alpha x' + \gamma)y + (\alpha y' + \beta x' + \delta)x + \gamma y' + \delta x' + \varepsilon = 0$$

$\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $x' = 0$, $y' = -\gamma'$ setzt, ebenfalls

$$\equiv -\gamma' y + \varepsilon = 0 \text{ oder } y - \frac{\varepsilon}{\gamma'} = 0.$$

Tritt daher dieser Fall ein, so reducirt sich für zwei ähnliche Ellipsen die Umhüllungscurve auf ein System zweier Geraden, d. h. auf die beiden Tangenten an die Bahn in den Durchschnittspunkten derselben mit der Directrix. Ausser diesen schneiden sich dann auch alle anderen Asymptotenchorden in einem und demselben Punkte, dem Bahn-Mittelpunkte, so, dass jene beiden Geraden die Grenze bilden, über welche hinaus nach dem Mittelpunkte der Directrix zu keine Asymptotenchorde fällt. Für zwei ähnliche Hyperbeln stellt die Umhüllungscurve unmittelbar diesen Bahn-

ittelpunkt vor; es findet also derselbe Satz auch hier Statt; och gibt es keine Grenze für die Lage der sich in ihm schneienden Asymptotenchorden. (Vergl. die Berichtigung am Schlusse es vorigen Aufsatzes).

Für den speciellen Fall zweier Kreise gilt das für die Ellipsen ereits Gezeigte. Es ist dann

Gleichung der Bahn: $\omega: (y-y_0)^2+x^2=R^2$,

„ der Directrix: $\Omega: y^2+x^2=r^2$;

lso

$$\beta=\beta'=1, \quad \varepsilon=r^2, \quad \varepsilon'=y_0^2-R^2, \quad \gamma'=-y_0.$$

Die Gleichung der Umhüllungscurve wird

$$\text{')}\quad (R^2-y_0^2)y^2+R^2x^2+[y_0^2-(R^2+r^2)]y_0y + r^2y_0^2-\frac{1}{4}(y_0^2+r^2-R^2)^2=0$$

der

$$\text{')}\left(y-\frac{(R^2-r^2-y_0^2)y_0}{2(R^2-y_0^2)}\right)^2+\frac{R^2}{R^2-y_0^2}x^2-\frac{R^2(y_0^2-(R^2+r^2))}{4(R^2-y_0^2)^2}=0,$$

ine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem $y_0 >$ oder $< R$ ist; eine 'arabel:

$$x^2=\frac{r^2}{y_0}\left(y-y_0-\frac{r^2}{4y_0}\right)$$

der

$$x^2=\frac{r^2}{R}\left(y-R-\frac{r^2}{4R}\right)$$

für $y_0=R$.

In dem oben betrachteten Falle, wo die gemeinschaftliche horde zugleich Polare des Bahnmittelpunktes ist, schneiden sich ie beiden Kreise rechtwinklig, so dass $y_0^2=R^2+r^2$ ist. Die leichung der Umhüllungscurve 6') reducirt sich dann auf

$$(y-\sqrt{R^2+r^2})^2-r^2x^2=0$$

der

$$(y-y_0)^2-r^2x^2=0,$$

d. h. auf das System der beiden Geraden

$$y+rx-y_0=0 \quad \text{und} \quad y-rx-y_0=0,$$

die sich auch schreiben lassen:

$$\frac{y}{y_0}+\frac{x}{\frac{y_0}{r}}=1 \quad \text{und} \quad \frac{y}{y_0}-\frac{x}{\frac{y_0}{r}}=1;$$

d. h. auf die beiden vorhin erwähnten Tangenten, und alle As ptotenchorden schneiden sich im Bahnmittelpunkte $y=y_0$, $x=$

Berühren sich die beiden Kreise von Aussen oder Inne so ist $y_0=R\pm r$, und die Gleichung der Umhüllungscurve w

$$R(R\pm 2r)y^2-r^2x^2+2R(R\pm r)y+r^2(R\pm r)^2+r^4=0.$$

Sind diese Kreise concentrisch, so folgt

$$y^2+x^2=\left(\frac{R^2+r^2}{2r}\right)^2,$$

also ebenfalls ein concentrischer Kreis vom Radius $\frac{R^2+r^2}{2r}$, auch eine leichte Construction zeigt.

Ist die Bahn eine Hyperbel, die Directrix ein System zwe ihren Asymptoten paralleler Geraden $y=\pm x\sqrt{-\beta}$, so hat man negativ, $\varepsilon=0$. Es resultirt dann als Umhüllungscurve.

$$5'') \quad \varepsilon' y^2+\beta(\varepsilon'-\gamma'^2)x^2+\varepsilon'\gamma' y+\frac{1}{4}\varepsilon'^2=0,$$

$$6'') \quad (y+\frac{\gamma'}{2})^2+\frac{\beta}{\varepsilon'}(\varepsilon'-\gamma'^2)x^2+\frac{\varepsilon'-\gamma'^2}{4}=0.$$

Die Natur der Curve erhellt aus dem Vorhergehenden und ist aus 6'') ersichtlich, dass ihr Mittelpunkt auch der Halbirun punkt der Centralen ist. Ist $\varepsilon'=0$, d. h. geht die Hyperbel dur den Durchschnittspunkt der beiden Geraden, so geht Gleichung in $x=0$ über oder die Curve reducirt sich auf die Centrale selb mit welcher dann alle Asymptotenchorden parallel sind.

Sind sie concentrisch, d. h. betrachtet man die Asymptot einer Bahn-Hyperbel als Directrix, so ist $\gamma'=0$, also

---

*) wobei natürlich im letzteren Falle die Directrix innerhalb d Bahn liegt und daher dann $R>r$ gedacht werden muss.

$$y^2 + \beta x^2 + \frac{\varepsilon'}{4} = 0$$

Umhüllungscurve, eine der Bahn in der halben Entfernung den Asymptoten parallele Hyperbel.

Im Allgemeinen kann man, wenn die Directrix ein System er Geraden ist, dasselbe zu Coordinatenaxen nehmen, so dass hat

$$\Omega \equiv xy = 0.$$

Gleichung der Asymptotenchorde des Poles x', y' findet sich, lieselbe nichts anderes ist, als die Verbindungslinie der bei- Punkte, worin ein sich im gegebenen Pole schneidendes dem en paralleles Geradensystem es schneidet, wenn man die chung

$$(x - x')(y - y') = 0$$

letzteren von $\Omega = 0$ abzieht, also:

$$\Omega - tu = 0,$$

n erste Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{t}$$

Hieraus, so wie aus der allgemeinen Gleichung ω' der Bahn und n erster Differentialgleichung zieht man analog dem Früheren Gleichung

$$u^2 - \beta' t^2 + qt - pu = 0$$

hat folglich:

$$1) \quad tu - \Omega = 0, \quad \text{wo } \Omega = xy;$$

$$2) \quad u^2 + \beta' t^2 + 2\alpha' tu - 2pu - 2qt + \omega = 0$$

r

$$2) \quad u^2 + \beta' t^2 - 2pu - 2qt + 2\alpha'\Omega + \omega = 0;$$

$$3) \quad u^2 - \beta' t^2 + qt - pu = 0.$$

stituirt man $\frac{\Omega}{t}$ für u in 2), so resultirt

$$\text{I.}\quad \beta' t^4 - 2qt^3 + St^2 - 2p\Omega t + \Omega^2 = 0,$$

wo $S = 2\alpha'\Omega + \omega$ ist.

Ferner ist 2) — 3):

$$2\beta' t^2 - 3qt - pu + S = 0;$$

macht man hier dieselbe Substitution, so folgt

$$\text{II.}\quad 2\beta' t^3 - 3qt^2 + St - p\Omega = 0,$$

welche Gleichung die erste Ableitung von I. ist, so dass diese zwei gleiche Wurzeln hat.

Sodann ist $t \times$ II. $-2 \times$ I.:

$$qt^3 - St^2 + 3p\Omega t - 2\Omega^2 = 0.$$

Fortgesetzte Elimination zwischen II. und letzterer Gleichung führt zur Gleichung der Umhüllungscurve in folgender Form:

$$4)\quad \Omega(PP' - R^2)^2 = (PQ' - QR)(P'Q - Q'R),$$

wo

$$P = 2\beta' S - 3q^2,$$
$$P' = 2S - 3p^2,$$
$$Q = qS - 6\beta' p\Omega,$$
$$Q' = pS - 6p\Omega,$$
$$R = 4\beta'\Omega - pq$$

ist.

Besondere Fälle.

Ist die Bahn eine Hyperbel, deren eine Asymptote einer der Geraden des Systems der Directrix und zwar der als Abscissenaxe angenommenen parallel ist, so hat man

$$\beta' = 0,\ P = -3q^2,\ P' = 2S - 3p^2,\ Q = qS,\ Q' = pS - 6q\Omega,\ R = -pq$$

und

$$p = y + \alpha' x + \gamma',\quad q = \alpha' y + \delta',\quad S = y^2 + 4\alpha' xy + 2\gamma' y + 2\delta' x + \varepsilon'.$$

Dies gibt die Umhüllungscurve

$$\Omega q(4p^2 - 3S)^2 = (9q\Omega - pS)(S^2 - p^2 S - 3pq\Omega)$$

oder

$$xy(\alpha'y+\delta')\,[(y-2\alpha'x)^2+2\gamma'y+2(4\alpha'\gamma'-3\delta')x+4\gamma'^2-3\varepsilon']^2$$
$$=[9(\alpha'y+\delta')xy-(y+\alpha'x+\gamma')\,(y^2+4\alpha'xy+2\gamma'y+2\delta'x+\varepsilon')][(y^2+4\alpha'xy$$
$$+2\gamma'y+2\delta'x+\varepsilon')\,(2\alpha'xy-\alpha'^2x^2+2(\delta'-\alpha'\gamma')x+\varepsilon'-\gamma'^2)$$
$$-3(\alpha'y+\delta')\,(y+\alpha'x+\gamma')xy].$$

Ist überdies noch $\delta'=0$, $\gamma'=0$, so ist die Abscissenaxe selbst Asymptote und die Ordinatenaxe geht durch den Mittelpunkt der Bahnhyperbel. Die vorstehende Gleichung reducirt sich auf

$$\alpha'xy^2[\,(y-2\alpha'x)^2-3\varepsilon']^2$$
$$=[4\alpha'xy(y-\alpha'x)-\varepsilon'(y+\alpha'x)-y^3]\,[4\alpha'^2x^2y(y-\alpha'x)$$
$$+\varepsilon'(y^2+6\alpha'xy-\alpha'^2x^2)+\varepsilon'^2-\alpha'xy^3].$$

Ist die Bahn eine auf das System der Directrix als zugeordnete Durchmesser bezogene Ellipse oder Hyperbel, so ist

$$\alpha'=0,\ \gamma'=0,\ \delta'=0,\ P=\beta'(2\omega-3\beta'x^2),\ P'=2\omega-3y^2,$$
$$Q=\beta'x(\omega-6y^2),\quad Q'=y(\omega-6\beta'x^2),\quad R=3\beta'xy$$

und man erhält als Gleichung der Umhüllungscurve:

$$\omega^2[2\omega-3(y^2+\beta'x^2)]^2$$
$$=(\omega^2-9\beta'x^2\omega+9\beta'x^2y^2+9\beta'^2x^4)\,(\omega^2-9y^2\omega+9\beta'x^2y^2+9y^4)$$

oder, da $y^2+\beta'x^2=\omega-\varepsilon'$ ist:

$$\omega^2(\omega-3\varepsilon')^2=(\omega^2-9\beta'\varepsilon'x^2)\,(\omega^2-9\varepsilon'y^2),$$
$$\omega^4-6\varepsilon'\omega^3+9\varepsilon'^2\omega^2=\omega^4-9\varepsilon'(\omega-\varepsilon')\omega^2+81\beta'\varepsilon'^2x^2y^2,$$
$$3\varepsilon'\omega^3=81\beta'\varepsilon'^2x^2y^2,$$
$$\omega^3=27\beta'\varepsilon'x^2y^2,$$
$$\omega=3\sqrt[3]{\beta'\varepsilon'x^2y^2},$$

d. h.

$$5)\quad y^2+\beta'x^2+\varepsilon'-3\sqrt[3]{\beta'\varepsilon'x^2y^2}=0.$$

Ist die Bahn ein Kreis vom Radius r, die Directrix ein System zweier auf einander senkrechter Diameter desselben, also $\beta'=1$, $\varepsilon'=-r^2$, so heisst die Umhüllungscurve:

$$y^2+x^2=r^2-3\sqrt[3]{r^2x^2y^2}$$

oder für den Radius 1:

$$y^2+x^2=1-3\sqrt[3]{x^2y^2}.$$

Ist die Bahn eine gleichseitige Hyperbel mit demselben Radius, so ist die Umhüllungscurve:

$$y^2-x^2=r^2+3\sqrt[3]{r^2x^2y^2}$$

oder

$$y^2-x^2=1+3\sqrt[3]{x^2y^2}.$$

Unter einer anderen Form ergeben sich dieselben Curven auf folgende Weise.

Die drei Gleichungen 1), 2), 3) werden in unserem Falle:

$$1') \quad tu=xy,$$

$$2') \quad (u-y)^2+\beta'(t-x)^2+\varepsilon'=0,$$

$$3') \quad u(u-y)=\beta' t(t-x).$$

Substituirt man aus 1) $u=\frac{xy}{t}$ in 3), so resultirt:

$$\frac{xy}{t}\left(\frac{xy}{t}-y\right)=\beta' t\,(t-x),$$

$$xy^2(x-t)=-\beta' t^3(t-x),$$
$$-xy^2=\beta' t^3,$$

$$t=-\sqrt[3]{\frac{xy^2}{\beta'}},$$

$$u=\frac{xy}{t}=-\sqrt[3]{\beta' x^2 y}.$$

Dies in 2) substituirt, gibt:

$$(y+\sqrt[3]{\beta' y x^2})^2+\beta'(x+\sqrt[3]{\frac{xy^2}{\beta'}})^2+\varepsilon'=0,$$

$$y^2+3y\sqrt[3]{\beta' y x^2}+3x\sqrt[3]{\beta'^2 y^2 x^4}+\beta' x^2+\varepsilon'=0,$$

$$(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{\beta' x^2})^3+\varepsilon'=0,$$

oder bei Ausziehung der Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{\beta' x^2}=-\sqrt[3]{\varepsilon'},$$

$$6)\quad y^{\frac{2}{3}}+\beta'^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+\varepsilon'^{\frac{1}{3}}=0;$$

was man auch, von der Bahngleichung $a^2y^2 \pm b^2x^2=a^2b^2$ ausgehend,

$$6')\quad a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \pm b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\ ^{*})$$

schreiben kann. Für den Fall des Kreises stellt sich die Curve in der Form

$$y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}\ ^{**})$$

dar. Ohne Schwierigkeit lässt sich jedoch die zuletzt gefundene Form auf die erste in 5) zurückführen. Man hat zu diesem Ende die Gleichung 6) bloss zu schreiben:

$$y^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}=-\varepsilon'^{\frac{1}{3}}$$

und wieder in die dritte Potenz zu erheben, wodurch man natürlich wieder zu der Gleichung

$$y^2+\beta' x^2+\varepsilon'+3[y\sqrt[3]{\beta' y x^2}+x\sqrt[3]{\beta'^2 y^2 x^4}]=0$$

gelangt, von welcher man ausgegangen war. Es ist aber

$$y\sqrt[3]{\beta' y x^2}+x\sqrt[3]{\beta'^2 y^2 x^4}=(y^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}})\sqrt[3]{\beta' x^2 y^2},$$

und da jetzt aus Gleichung 6) bekannt ist, dass

---

*) Die Curve steht zu der Bahn-Evolute in Affinität und wird ihr identisch für $a^2 \mp b^2=a^2b^2$, m. s. Magnus Sammlung von Aufgaben etc. S. 404.

**) Es ist klar, dass die Diagonalen der Rechtecke, welche man dadurch erhält, dass man von einem Punkte der Kreisperipherie Perpendikel auf die beiden gegeneinander senkrechten Durchmesser fällt, d. h. die in Rede stehenden Asymptotenchorden, gleich dem Radius des Kreises sind. Dieselbe Curve wird also resultiren, wenn man eine gerade Linie von der Länge des Radius des gegebenen Kreises so bewegt, dass ihre Endpunkte auf den beiden Durchmessern bleiben. Sie ist die Hypocycloide, in welcher der Radius des erzeugenden Kreises $=\frac{1}{4}$ von dem des festen ist; m. s. Magnus S. 444.

Aehnliche Beziehungen lassen sich auch bei der allgemeinen Curve 6') zu den radii vectores der Bahn aufstellen.

$$y^{\frac{1}{3}} + \beta'^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{\varepsilon'},$$

so hat man

$$y\sqrt[3]{\beta' y x^2} + x\sqrt[3]{\beta'^2 y^2 x^4} = \sqrt[3]{\beta'\varepsilon' x^2 y^2},$$

und daher wieder die frühere Gleichung 5).

Hat man eine Parabel, welche auf das System der Directrix als zugeordnete Durchmesser bezogen, deren Gleichung also

$$y^2 + 2\delta' x = 0$$

ist, so ist

$$\alpha' = 0,\ \beta' = 0,\ \gamma' = 0,\ \varepsilon' = 0,\ \omega : y^2 + 2\delta' x,\ p : y,\ q : \delta',\ S : \omega;$$

$$P = -3\delta'^2,$$

$$P' = 2\omega - 3y^2 \text{ oder } 4\delta' x - y^2,$$

$$Q = \delta'\omega \text{ oder } \delta'(y^2 + 2\delta' x),$$

$$Q' = y\omega - 6\delta'\Omega \text{ oder } y(y^2 - 4\delta' x),$$

$$R = -\delta' y.$$

Die Gleichung der Umhüllungscurve ist demnach

$$xy[3\delta'(y^2 - 4\delta' x) - \delta'^2 y^2]^2 = [-3\delta'^2 y(y^2 - 4\delta' x) + \delta'^2 y(y^2 + 2\delta' x)]$$
$$\times [\delta'(y^2 + 2\delta' x)(4\delta' x - y^2) + \delta' y^2 (y^2 - 4\delta' x)],$$

reducirt:

$$(y^2 - 6\delta' x)^2 = (y^2 - 4\delta' x)(y^2 - 7\delta' x),$$

$$y^4 - 12\delta' x y^2 + 36\delta'^2 x^2 = y^4 - 11\delta' x y^2 + 28\delta'^2 x^2,$$

$$8\delta'^2 x^2 = \delta' x y^2,$$

$$y^2 - 8\delta' x = 0,$$

eine auf dasselbe System der Directrix bezogene, der Bahnparabel entgegengesetzte Parabel mit dem vierfachen Parameter derselben.

Zum Schlusse soll noch die Umhüllungscurve der Bahnparabel, zu welcher die beiden Geraden des Systems der Directrix Tangenten sind, betrachtet werden. Bezeichnen a und b die Segmente, welche die Bahnparabel auf den beiden Tangenten bestimmt, so ist ihre Gleichung bekanntlich

$$\omega': \sqrt{\frac{y'}{a}} + \sqrt{\frac{x'}{b}} = 1,$$

woraus

$$\frac{dy'}{dx'} = -\sqrt{\frac{ay'}{bx'}} \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dt} = -\sqrt{\frac{a(y-u)}{b(x-t)}}.$$

Aus der Gleichung $tu - xy = 0$ der Asymptotenchorde folgt

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{t},$$

so dass also

$$\frac{u^2}{t^2} = \frac{a(y-u)}{b(x-t)}$$

ist. Substituirt man $\frac{xy}{t}$ für u in letztere Gleichung, so resultirt

$$\frac{x^2y^2}{t^4} = \frac{a}{bt} \cdot \frac{yt - xy}{x-t},$$

$$\frac{x^2y^2}{t^4} = -\frac{ay}{bt},$$

$$\frac{x^2y}{t^3} = -\frac{a}{b},$$

$$t = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}yx^2},$$

$$u = \frac{xy}{t} = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}xy^2}.$$

Die Gleichung der Umhüllungscurve ist demnach

$$\sqrt{\frac{y + \sqrt[3]{\frac{a}{b}xy^2}}{a}} + \sqrt{\frac{x + \sqrt[3]{\frac{b}{a}yx^2}}{b}} = 1,$$

$$\sqrt{\left\{\frac{y}{a}\left(1+\sqrt[3]{\frac{ax}{by}}\right)\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{x}{b}\left(1+\sqrt[3]{\frac{by}{ax}}\right)\right\}}=1,$$

$$\left(1+\sqrt[3]{\frac{by}{ax}}\right)\sqrt{\left\{\frac{x}{b}\left(1+\sqrt[3]{\frac{by}{ax}}\right)\right\}}=1.$$

Quadrirt:

$$\left(1+\sqrt[3]{\frac{by}{ax}}\right)^3=\frac{b}{x}.$$

Hieraus die Kubikwurzel gezogen:

$$1+\sqrt[3]{\frac{by}{ax}}=\sqrt[3]{\frac{b}{x}},$$

$$1+\sqrt[3]{\frac{b}{x}}\sqrt[3]{\frac{y}{a}}=\sqrt[3]{\frac{b}{x}},$$

$$8)\qquad \sqrt[3]{\frac{y}{a}}+\sqrt[3]{\frac{x}{b}}=1,$$

welche Gleichung sich von der der Bahnparabel durch die Kubikwurzeln statt der Quadratwurzeln unterscheidet. Die Curve hat dieselben beiden Tangenten und Tangentialpunkte, was übrigens schon aus der allgemeinen früher dargethanen und bei allen obigen Fällen ersichtlichen Eigenschaft der Umhüllungscurven hervorgeht, dass sie durch die Durchschnittspunkte der Bahn mit der Directrix gehen, resp. in denselben Punkten berühren.

VI.

[eber die Neper'schen und Gauss'-chen Gleichungen in der sphärischen Trigonometrie.

Von

dem Herausgeber.

I.

Als ich die in dem Aufsatze Thl. XVI. Nr. XVI. mitgetheilte nfache Herleitung der drei ersten Systeme von Grundformeln r sphärischen Trigonometrie gefunden hatte, lag der Wunsch hr nahe, eine eben so leichte Herleitung des vierten und fünf n Systems von Grundformeln der genannten Wissenschaft, näm h der nach Neper und Gauss benannten Gleichungen, zu sitzen, da alle bis jetzt — wenigstens mir — bekannten Her tungen dieser Formeln keineswegs so einfach und leicht sind, e man im Interesse des mathematischen Unterrichts wünschen chte, und mancherlei zum Theil ziemlich künstliche Verwand ngen in Anspruch nehmen. Meine ersten in dieser Beziehung gestellten Versuche hatten jedoch nicht den gewünschten Erfolg, d ich legte die Sache wieder bei Seite. Eine gelegentliche terhaltung mit einem geschickten Gymnasiallehrer der Mathe tik, in welcher derselbe meiner früheren Bemühungen mit undlicher Anerkennung gedachte, und bemerkte, dass auch ihm, besondere bei dem Privatunterrichte von Leuten, die sich auf aktische Staatsprüfungen vorbereiteten, — da ja wenigstens auf eussischen Gymnasien die sphärische Trigonometrie nicht mehr s Glück hat, in den Kreis des mathematischen Unterrichts ge gen zu werden, — die Neper'schen und Gauss'schen Gleichun-

gen immer Schwierigkeiten gemacht hätten, ja dass er sich, um seinen Schülern völlig verständlich zu werden und dieselben tüchtig zu machen, die Prüfung auch in der sphärischen Trigonometrie mit Glück bestehen zu können, bei dem Beweise der gedachten Gleichungen oder Analogieen zu einer Art von Schema seine Zuflucht zu nehmen genöthigt gesehen habe, brachte mir vor einigen Tagen diesen Gegenstand wieder in Erinnerung, und ich war, — wie ich wenigstens hoffe, — so glücklich, diesmal eine Beweisart zu finden, die ich für so höchst einfach und leicht halte, dass ich mich jetzt fast wundere, wie dieselbe bisher mir und wahrscheinlich auch anderen entgehen konnte. Diese Beweisart werde ich nun im Folgenden mittheilen und zugleich den Weg andeuten, den man bei deren Entwickelung bei'm Unterrichte nach meiner Meinung am besten einschlagen dürfte.

II.

Wenn man bei dem Unterrichte zu dem zweiten Systeme von Grundformeln gelangt ist, so führt das Bedürfniss, diese Formeln zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, sogleich und ohne die geringsten Schwierigkeiten zu den allgemein bekannten und in jedem Lehrbuche der sphärischen Trigonometrie sich findenden Formeln für die goniometrischen Functionen der halben Winkel des sphärischen Dreiecks, nämlich, wenn wie gewöhnlich $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ gesetzt wird, zu den Formeln:

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\tang\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}};$$

und in ähnlicher Weise für die übrigen Winkel des Dreiecks.

Nachdem man aber diese Formeln gefunden hat, liegt der Gedanke nicht fern, auch für die goniometrischen Functionen der halben Summen und Differenzen zweier Winkel des sphärischen Dreiecks bequeme Formeln zu haben, und weil aus dem Cosinus und Sinus sich immer leicht die Tangente oder Cotangente ergiebt, so greifen wir natürlich zunächst nach dem Cosinus und Sinus der halben Summe und der halben Differenz zweier Winkel unseres Dreiecks, und entwickeln dieselben wie folgt.

Bekanntlich ist

$$\cos\frac{1}{2}(A\pm B)=\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\mp\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A\pm B)=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\pm\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B;$$

nach den obigen Formeln:

$$s\frac{1}{2}(A\pm B)=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$\mp\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}$$

$$=\frac{\sin s\mp\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C\\[2ex]\dfrac{\cos\frac{1}{2}c\sin(s-\frac{1}{2}c)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C\\[2ex]\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C;\end{cases}$$

$$\sin\frac{1}{2}(A \pm B) = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$= \frac{\sin(s-b) \pm \sin(s-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin(s-\frac{1}{2}(a+b))\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C \\[2ex] \dfrac{\cos(s-\frac{1}{2}(a+b))\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C \\[2ex] \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C. \end{cases}$$

So haben wir also in zwei Zügen die vier Gauss'schen (chungen:

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c = \cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$$

gefunden.

Um nun, nach der schon oben gemachten Andeutung, ɛ Formeln für die Tangenten der halben Summe und der ha Differenz zweier Winkel zu erhalten, dividiren wir mit der er

der vier vorhergehenden Gleichungen in die zweite, mit der dritten in die vierte. Dies giebt:

$$\tang\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\tang\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C.$$

Der Gedanke liegt endlich nahe, Aehnliches auch für die Seiten des Dreiecks zu leisten. Deshalb dividiren wir noch mit der ersten Gleichung in die dritte, mit der zweiten in die vierte. Dies giebt:

$$\tang\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tang\frac{1}{2}c,$$

$$\tang\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tang\frac{1}{2}c.$$

Die vier vorhergehenden Gleichungen sind die Neper'schen Gleichungen, und so ist die ganze Sache in der kürzesten Weise vollständig abgethan.

III.

Man möge mir verzeihen, wenn ich jetzt behaupte, dass sowohl die Gauss'schen, als auch die Neper'schen Gleichungen, streng genommen und in gewissem Sinne, blosse Identitäten sind, was sich auf folgende Art nachweisen lässt.

Die Gauss'schen Gleichungen kann man nämlich auf folgende Art schreiben:

$$\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}},$$

$$\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}+\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}},$$

$$\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}+\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}},$$

$$\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}-\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Hebt man in diesen Gleichungen auf, was sich aufheben lässt, so werden dieselben:

$$\frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin(s-b) + \sin(s-a)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

d. i.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin(s-\frac{1}{2}(a+b))\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

also

$$\frac{\sin(s-\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos(s-\frac{1}{2}(a+b))}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Die beiden ersten Neper'schen Analogieen können auf folgende Art geschrieben werden:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}+\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}{\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}-\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}{\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}+\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}.$$

Hebt man nun auf, was sich aufheben lässt, so werden diese Gleichungen:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin s-\sin(s-c)},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin(s-b)-\sin(s-a)}{\sin s+\sin(s-c)};$$

d. i.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin(s-\frac{1}{2}(a+b))\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

also

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos(s-\frac{1}{2}(a+b))}{\sin(s-\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}c}; \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Die beiden letzten Neper'schen Analogieen können auf folgende Art geschrieben werden:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c}=\frac{\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}+\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}{\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c}=\frac{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}-\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}+\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}}.$$

Hebt man in diesen Gleichungen auf, was sich aufheben lässt, so werden dieselben:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin s - \sin(s-c)},$$

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin(s-b) + \sin(s-a)};$$

d. i.

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\sin(s-\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}, \qquad \frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c},$$

also

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos(s-\frac{1}{2}(a+b))}{\sin(s-\frac{1}{2}(a+b))\cos\frac{1}{2}(a-b)}; \qquad \frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c}.$$

Ich glaube hiernach in der That nicht zu viel zu behaupten, wenn ich behaupte, dass sowohl die Gauss'schen, als auch die Neper'schen Gleichungen, streng genommen, blosse Identitäten sind, was freilich von sehr vielen, meinetwegen von allen mathematischen Gleichungen gilt; es kommt am Ende nur auf den grösseren oder geringeren Grad der Leichtigkeit an, mit welchem dieselben identisch gemacht werden können. Im obigen Falle liegt aber die Identität gewiss sogleich vor Augen, wenn man die Sache nur aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, und gleich von vorn herein davon ausgeht, die genannten Gleichungen auf die Form identischer Gleichungen zurückzuführen, wie ich im Vorhergehenden gethan habe. Das Vorhergehende kann natürlich auch als ein neuer Beweis der in Rede stehenden Gleichungen gelten.

IV.

Ueberhaupt führen solche Identificirungen wie die vorhergehenden manchmal zu bemerkenswerthen Resultaten, und man sollte mehr auf dieselben achten, und sie öfter in Anwendung bringen, wie ich jetzt noch an ein Paar Beispielen zeigen will.

Die Identität der Gleichungen

$$\sin(s-a)\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}=\sin(s-b)\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}$$
$$=\sin(s-c)\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}$$

fällt auf der Stelle in die Augen, weil diese Gleichungen nichts weiter sind als die Gleichungen

$$\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}=\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$
$$=\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}.$$

Die in Rede stehenden Gleichngen führen aber mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln für die Tangenten der halben Winkel auf der Stelle zu den Gleichungen

$$\sin(s-a)\tang\frac{1}{2}A=\sin(s-b)\tang\frac{1}{2}B=\sin(s-c)\tang\frac{1}{2}C.$$

Eben so leicht erhellet die Identität der folgenden drei Gleichungen:

$$\sin(s-a)=\sin s\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}},$$

$$\sin(s-b)=\sin s\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},$$

$$\sin(s-c)=\sin s\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}.$$

Also ist nach bekannten Formeln:

$$\sin(s-a)=\sin s\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C,$$

$$\sin(s-b)=\sin s\tan\frac{1}{2}C\tan\frac{1}{2}A,$$

$$\sin(s-c)=\sin s\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B.$$

In diesen Gleichungen sind aber die Neper'schen Analogieen enthalten, oder aus denselben sind diese Analogieen sehr leicht abzuleiten. Denn zuerst ist

$$\frac{\tan\frac{1}{2}A}{\tan\frac{1}{2}B}=\frac{\sin(s-b)}{\sin(s-a)},$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}A\pm\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}B}=\frac{\sin(s-b)\pm\sin(s-a)}{\sin(s-a)},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A\pm B)}{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-a)}\\[2ex]\dfrac{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-a)}\end{array}\right.,$$

also durch Division:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\tan\frac{1}{2}(a-b)\cot\frac{1}{2}c.$$

Ferner ist

$$\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}B=\frac{\sin(s-c)}{\sin s},$$

, wenn man diese Grössen von der Einheit subtrahirt und selben addirt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A\pm B)}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}=\frac{\sin s\mp\sin(s-c)}{\sin s},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A\pm B)}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}=\begin{cases}\dfrac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin s}\\[2ex] \dfrac{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin s}\end{cases};$$

ırch Division:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\tang\frac{1}{2}(a+b)\cot\frac{1}{2}c.$$

un nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-a)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin s}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-a)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin s}$$

ist; so erhält man durch Division:

$$\tang\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}B=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\frac{\sin s}{\sin(s-a)},$$

$$\tang\frac{1}{2}(A-B)\cot\frac{1}{2}B=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\frac{\sin s}{\sin(s-a)}.$$

Aber nach dem Obigen:

$$\tang\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}C=\frac{\sin(s-a)}{\sin s}.$$

Also, wenn man multiplicirt:

$$\tang\frac{1}{2}(A+B)\tang\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\tang\frac{1}{2}(A-B)\tang\frac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

So ist man jetzt wieder zu den vier Neper'schen Gleichunge[n] gelangt.

VII.

Leichtfassliche Konstruktion einer Fläche des zweiten Grades, von welcher neun Punkte beliebig gegeben sind.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,
Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

(Vgl. die Abhandlung im 9ten Theil, S. 168—214.)

Aufgabe 1.

Wenn von einem einfachen Hyperboloid irgend wei in ihm liegende, einander nicht schneidende erade A, A_1 und irgend drei Punkte α, β, γ desselben geben sind, alle übrigen, in ihm liegenden Geraden finden.

Auflösung.

Durch die zwei Geraden A, A_1 und die drei Punkte α, β, γ e man die drei Paar Ebenen $A\alpha$ und $A_1\alpha$, $A\beta$ und $A_1\beta$, $A\gamma$ d $A_1\gamma$, so erhält man als Durchschnitte dieser letzteren drei ne Gerade a, b, c oder A', A'_1, A'_2. Legt man nun durch zwei ser neuen Geraden, z. B. durch A' und A'_1, und durch jeden nkt der dritten (A'_2) neue Ebenenpaare, so bilden die Durchnitte A_2, A_3, A_4 .... dieser Ebenenpaare die eine Schaar der raden eines einfachen Hyperboloids, zu welcher auch die gebenen, A und A_1, gehören; und legt man wiederum durch A d A_1 und jeden Punkt einer beliebigen dritten, zur nämlichen haar gehörigen Geraden, z. B. der A_2, welche durch γ g gt, andere Ebnenpaare, so bilden die Durchschnitte dieser

teren, nämlich d, e, f... oder A'_3, A'_4, A'_5,.. die andere Schaar Gerader desselben Hyperboloids, zu der auch die a, b, c oder A', A'_1, A'_2 gehören.

Beweis.

Denn die drei Geraden A', A_1', A'_2 werden von sämmtlichen Geraden A, A_1, A_2, A_3, A_4...., und die drei Geraden A, A_1, A_2 werden von sämmtlichen Geraden a, b, c, d, e, f... geschnitten (Theil IX., S. 189. Anm.)

Aufgabe 2.

Wenn von einem einfachen Hyperboloid irgend zwei in ihm liegende, einander schneidende Gerade A, A' und ausserdem vier Punkte α, β, γ, δ desselben beliebig gegeben sind, alle anderen in ihm liegenden Geraden zu finden.

Auflösung.

Man lege durch drei der gegebenen Punkte (Taf. II. Fig. 1.), z. B. durch α, β, γ, eine Ebene, welche die Geraden A, A' in den Punkten B, ε schneidet; ferner durch den vierten gegebenen Punkt δ und durch die Gerade A' eine Ebene, welche die vorige in der Geraden e schneidet; denke sich durch die fünf Punkte α, β, γ, ε, B einen Kegelschnitt gelegt, und bestimme mittels des mystischen Secksecks denjenigen Punkt B_1, in welchem die Gerade e denselben zum zweitenmal trifft. Diesen Punkt B_1 verbinde man jetzt mit dem Punkte δ durch eine Gerade A_1 und verfahre sodann ganz nach der vorigen Aufgabe, indem man die Geraden A, A_1 und irgend drei der Punkte α, β, γ, ε als gegeben betrachtet.

Beweis.

Weil die Punkte B, B_1, α, β, γ, ε einem Kegelschnitte angehören, so bilden die Geraden $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$, $B\varepsilon$ und $B_1\alpha$, $B_1\beta$, $B_1\gamma$, $B_1\varepsilon$ vier entsprechende Strahlenpaare zweier projektivischen ebenen Strahlbüschel B, B_1, und daher die Ebenen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\varepsilon$ und $A_1\alpha$, $A_1\beta$, $A_1\gamma$, $A_1\varepsilon$ vier entsprechende Ebenenpaare zweier projektivischen Ebenenbüschel A, A_1. Also liegen (nach Theil IX., S. 180., Anm. rechts) die vier Durchschnittslinien dieser Ebenenpaare, worunter auch A' ist, nebst den Geraden A, A_1 in einem und demselben einfachen Hyperboloid.

Aufgabe 3.

Wenn von einem einfachen Hyperboloid eine einzige in ihm liegende Gerade A und ausserdem sechs

Punkte β, γ, δ, ε, φ, σ desselben beliebig gegeben sind, alle übrigen in ihm liegenden Geraden und insbesondere diejenigen zu finden, in welchen die durch A gelegten Ebenen die Fläche desselben zum zweitenmal schneiden.

Auflösung.

a) Man verbinde (Taf. II. Fig. 2) einen der gegebenen Punkte, z. B. γ, mit zwei anderen, z. B. ε und φ, durch zwei Gerade E und F; dann einen der drei übrigen, z. B. δ, mit den zwei letzten, β und σ, durch zwei Gerade 𝔅 und 𝔖; endlich die gegebene Gerade A mit dem Punkte β durch eine Ebene, welche die Geraden E und F in den Punkten ε_1 und φ_2 schneidet, und mit dem Punkte σ durch eine Ebene, welche die Geraden F und E in den Punkten φ_1 und ε_2 schneidet.

b) Durch den Punkt ε_1 lege man jetzt eine Gerade, welche die Geraden 𝔅 und F beide zugleich schneidet, nämlich die erstere im Punkte β', die letztere in φ_3; und verbinde β' mit ε, φ_3 mit ε_2 durch zwei Gerade, welche einander in einem Punkte b treffen werden.

c) Aehnlicher Weise lege man durch den Punkt φ_1 eine Gerade, welche die beiden Geraden 𝔖 und E in den Punkten σ' und ε_3 schneidet; und verbinde σ' mit φ, ε_3 mit φ_2 durch zwei Gerade, welche einander in einem Punkte s treffen werden.

d) Eine durch die Punkte b und s zu ziehende Gerade trifft die F im Punkte b_1, die E im Punkte s_1. Man lege durch den Punkt b_1 und die Gerade 𝔅 eine Ebene, und durch den Punkt s_1 und die Gerade 𝔖 eine zweite Ebene. Diese beiden Ebenen schneiden einander in einer Geraden A_1, ausserdem erstere die Ebene $A\beta$ in einer Geraden $𝔅_0$, letztere die Ebene $A\sigma$ in einer Geraden $𝔖_0$.

e) Man betrachte jetzt die Geraden A und A_1, wie in der Aufgabe 1., als in einem einfachen Hyperboloid liegend, dem auch die drei Punkte γ, β_0, σ_0, in welchen letzteren die Ebene $\gamma\varepsilon\varphi$ von $𝔅_0$ und $𝔖_0$ geschnitten wird, angehören; so ist dieses das gesuchte. Legt man insbesondere durch den Punkt γ eine Gerade M, welche den beiden Geraden $𝔅_0$ und $𝔖_0$ begegnet, so wird die Durchschnittslinie je zweier durch A und A_1 gelegten Ebenen, welche einen Punkt der Linie M gemein haben, in jenem Hyperboloid liegen.

Beweis.

Ausser den so eben bezeichneten Punkten β_0 und σ_0 liegen auch die Punkte B, B_1, in denen die Geraden A, A_1 die Ebene $\gamma\varepsilon\varphi$ schneiden, sowie sämmtliche anderen Punkte der Konstruktion, mit alleiniger Ausnahme der Punkte δ, β, σ und derer der Linie M, in der Ebene $\gamma\varepsilon\varphi$.

a) Auf den drei Convergenten $\beta'\varepsilon_1\varphi_3$, $\beta' B_1 b_1$, $\beta'\varepsilon b$ liegen die Eckenpaare zweier Dreiecke $\varepsilon_1\beta_0\varepsilon$ und $\varphi_3 b_1 b$; also schneiden sich die entsprechenden Seiten derselben, nämlich $\varepsilon_1\beta_0$ und $\varphi_3 b_1$, $\varepsilon_1\varepsilon$ und $\varphi_3 b$, $\varepsilon\beta_0$ und bb_1, in drei Punkten φ_2, ε_2, x, welche in einerlei gerader Linie liegen.

b) Auf den drei Convergenten $\sigma'\varphi_1\varepsilon_3$, $\sigma' B_1 s_1$, $\sigma'\varphi s$ liegen die Eckenpaare zweier Dreiecke $\varphi_1\sigma_0\varphi$ und $\varepsilon_3 s_1 s$; also schneiden sich ihre entsprechenden Seiten, nämlich $\varphi_1\sigma_0$ und $\varepsilon_3 s_1$, $\varphi_1\varphi$ und $\varepsilon_3 s$, $\varphi\sigma_0$ und ss_1, in drei Punkten ε_2, φ_2, y, welche in einerlei gerader Linie liegen.

c) Aus a) und b) folgt, dass die vier Geraden bs, $\varepsilon_2\varphi_2$, $\varepsilon\beta_0$, $\varphi\sigma_0$ durch einerlei Punkt x (oder y) gehen.

d) Die drei in gerader Linie liegenden Punkte ε_2, x, φ_2 sind die Durchschnitte der drei Paar Hauptgegenseiten des Sechsecks $B\sigma_0\varphi\gamma\varepsilon\beta_0$, also liegen die Punkte B, σ_0, φ, γ, ε, β_0 auf einem und demselben Kegelschnitte. Das nämliche gilt aber auch von den sechs Punkten B_1, σ_0. φ, γ, ε, β_0, weil die Hauptgegenseiten des Sechsecks $B_1\sigma_0\varphi\gamma\varepsilon\beta_0$ sich paarweise in drei Punkten s_1, x, b_1 schneiden, die in gerader Linie liegen. Durch fünf Punkte σ_0, φ, γ, ε, β_0 geht aber nur ein einziger Kegelschnitt; also liegen die sieben Punkte B, B_1, φ, γ, ε, β_0, σ_0 auf einem und demselben Kegelschnitte. Es sind demnach B, B_1 die Mittelpunkte zweier projektivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen nach den Punkten φ, γ, ε, β_0, σ_0.... gehen, und daher A, A_1 die Achsen zweier projektivischen Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenen durch dieselben fünf Punkte gehen. Bedenkt man nun, dass die Geraden A_1, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ vom Punkte δ ausgehen, und dass die Ebenen $A\beta_0$, $A_1\beta_0$, welche sich in $\mathfrak{B}_0$ schneiden, mit den Ebenen $A\beta$, $A_1\beta$, sowie die Ebenen $A\sigma_0$, $A_1\sigma_0$, die sich in $\mathfrak{S}_0$ schneiden, mit den Ebenen $A\sigma$, $A_1\sigma$, zusammenfallen, so wird man aus dem vorher Bewiesenen den Schluss ziehen, dass A, A_1 und M drei zu einerlei Schaar gehörige Gerade eines einfachen Hyperboloids sind, das auch die Punkte β, γ, δ, ε, φ, σ enthält.

Anmerkung 1.

Im Grunde handelt es sich hier um die Aufgabe: *Wenn von einem Ebenenbüschel die Achse A und fünf Ebenen desselben, welche nämlich durch fünf im Raume beliebig gegebene Punkte $\beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \varphi$ gehen, gegeben sind; durch einen sechsten gegebenen Punkt δ die Achse A_1 eines anderen Ebenenbüschels zu ziehen, das mit dem ersteren in Ansehung der nach denselben Punkten $\beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \varphi$ gehenden Ebenenpaare projectivisch sei.* Eine sehr einfache, wenn auch zur organischen Konstruktion minder geeignete Analysis dieser Aufgabe reducirt deren Auflösung auf die folgende: *Durch vier gegebene in einem Punkte δ convergirende Gerade $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$ einen Kegel des zweiten Grades zu legen, welcher eines gegebenen*

Doppelverhältnisses fähig sei; und diese wieder erledigt sich durch die analoge Aufgabe: **Durch vier in einer Ebene gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, der eines gegebenen Doppelverhältnisses fähig sei.**

Der partikulärste Fall und der Wortlaut dieser letzteren sind alte Bekannte aus Euklids Elementen III. 33. Dort nämlich schloss man: Weil alle Peripheriewinkel über einerlei Sehne des Kreises gleich gross sind, und deren Grösse nur mit der des Kreises selbst sich ändert, so ist der Kreis durch zwei seiner Punkte und die Grösse des zugehörigen Peripheriewinkels bestimmt. Und hier schliesst man ganz ähnlich: Weil, wenn von vier Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Kegelschnittes nach den übrigen Punkten $B, B_1, B_2, B_3, B_4 ....$ desselben je vier Strahlen a, b, c, d; a_1, b_1, c_1, d_1; a_2, b_2, c_2, d_2; a_3, b_3, c_3, d_3; a_4, b_4, c_4, d_4;... gezogen werden, die Doppelverhältnisse

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}, \quad \frac{\sin a_1 c_1}{\sin b_1 c_1} : \frac{\sin a_1 d_1}{\sin b_1 d_1} \text{ u. s. w.}$$

sämmtlich einander gleich sind, und die Grösse derselben nur mit dem Kegelschnitte selbst sich ändert, so ist der Kegelschnitt durch vier seiner Punkte und die Grösse des zugehörigen Doppelverhältnisses bestimmt. Denkt man sich einen der Punkte $B, B_1 ...,$ z. B. B_4, mit einem der Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, z. B. mit α, identisch, so fällt der Strahl a_4 in die Tangente bei α, und die Strahlen b_4, c_4, d_4 in die Geraden $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta$; ist also ausser den Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend ein Doppelverhältniss durch vier beliebige Strahlen a', b', c', d' eines Punktes B' (oder auch durch vier Punkte einer Geraden, vier Ebenen eines Ebenenbüschels) gegeben, so hat man nur zu setzen:

$$B'(a', b', c', d') = B_4(a_4, b_4, c_4, d_4),$$

aus den drei gegebenen Elementenpaaren b' und b_4 oder $\alpha\beta$, c' und c_4 oder $\alpha\gamma$, d' und d_4 oder $\alpha\delta$ das dem a' entsprechende Element a_4 zu suchen und sofort durch die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einen Kegelschnitt zu legen, welcher die Gerade a_4 in α berührt; so wird dieser, und zwar nur dieser Kegelschnitt in Ansehung der Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des gegebenen Doppelverhältnisses fähig sein.

Beim **Kreise** sind die Strahlbüschel $B, B_1, B_2, B_3, B_4 ...$ $... B'$ **projektivisch-gleich**, das System je zweier also schon durch **ein** Paar entsprechende Strahlen bestimmt, d. h. gibt man sich ausser den Punkten α, B, B_1 des Kreises, wodurch zugleich die Strahlen a und a_1 gegeben sind, ganz beliebig noch die Strahlen $b, c, d ...$ des Strahlbüschels B, so sind hierdurch, wegen der Gleichheit der Winkel $ab, ac, ad ...$ und $a_1 b_1, a_1 c_1, a_1 d_1 ...$, auch die Strahlen $b_1, c_1, d_1 ...$, und mittels dieser die Punkte $\beta, \gamma, \delta ...$ gegeben. Während also im Falle des Kegelschnitts, wo das System jener projektivischen Strahlbüschel B, B_1 durch **drei** Paar entsprechende Strahlen bestimmt ist, zur Konstruktion desselben **vier** Strahlen a', b', c', d' eines Strahlbüschels B' und **vier** Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Kegelschnittes gegeben sein müssen,

wird man zu der des Kreises nur zwei Strahlen a', b' von B d. h. einen Winkel B' und zwei Punkte α, β des Kreises als gegeben ansehen dürfen, und man erhält den Kreis, ganz ähnlich wie den Kegelschnitt, indem man im Punkte α, als Scheitel, an den Strahl $\alpha\beta$ den Winkel $a'b'$ anlegt und die so erhaltene Gerade a_4 als Tangente des Kreises behandelt.

Kehren wir nach dieser Erörterung zur obigen Aufgabe zurück, so bietet sich sofort folgende Auflösung dar: Man schneide die Strahlen $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\sigma$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$ durch irgend eine Ebene in den Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, und lege einmal z. B. durch vier Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$ einen Kegelschnitt, welcher des durch die Ebenen $A\beta$, $A\gamma$, $A\sigma$, $A\varepsilon$ gegebenen Doppelverhältnisses fähig ist, und dann wieder durch die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{f}$ einen Kegelschnitt, welcher des durch die Ebenen $A\beta$, $A\gamma$, $A\sigma$, $A\varphi$ gegebenen Doppelverhältnisses fähig ist, und suche den vierten gemeinschaftlichen Punkt B_1 dieser Kegelschnitte, so ist die Gerade δB_1 die gesuchte Achse A_1.

Fallen diese beiden Kegelschnitte zusammen, so gibt es unzählige Achsen A_1 und daher auch unzählige einfache Hyperboloide der Art, wie sie die Aufgabe 3. fordert. Dann aber ist das System der gegebenen Elemente A, β, γ, δ, ε, φ, σ nicht beliebig. Ist dagegen diese letztere Bedingung erfüllt, so gibt es nur ein einziges Hyperboloid der verlangten Art.

Anmerkung 2.

Das so eben über die Bedeutung von Euklids Elem. III. 33. Gesagte bestätigt von Neuem die Ansicht, dass die Unterscheidung einer Geometrie der Alten und der Neueren nicht stichhaltig, dass vielmehr die gesammte geometrische Erkenntniss, sowie alle Erkenntniss, ein ununterbrochener Fortschritt vom besondern Gebilde zum allgemeinen Gesetz ist. Ihre Gewissheit, in Bezug auf ihren Anfang und daher auch auf ihren Fortschritt, beruht ausser den allgemeinen Gesetzen des Denkens und den mathematischen Axiomen auf der Einfachheit ihrer Elemente, der zuerst betrachteten Gebilde, sowie auch der Physiker vertraut, den Grund der Erscheinungen um so sicherer zu erfassen, je mehr er glaubt, beim Fundamentalexperiment die Faktoren derselben auf ein Minimum zurückgeführt zu haben; und er würde sich eines ebenso exakten Wissens wie der Geometer rühmen dürfen, wenn er gewiss wäre, an seinen Elementen, welche die Natur ihm liefert, einen ebenso unvermischten Stoff zu besitzen, als dem Geometer die seinigen durch die innere Intuition gegeben werden. Diese Gewissheit aber, welche uns unser Anfang, das elementare Verfahren, gibt, und die dem Zweifel gegenüber unerschütterlich ist, schreitet zum Bewusstsein des Princips der Wissenschaft selber fort, indem beim jedesmaligen Rückblick auf den zurückgelegten Weg — also nicht etwa bloss vom Standpunkt der Neueren aus — das gefundene Gesetz sich als den Grund der früher betrachteten Formen und ihrer Eigenschaf-

ten, als seiner Besonderheiten, zeigt, während es zugleich Ausgangspunkt zur Erkenntniss weiterer, allgemeinerer Gesetze wird. Tritt nun diese Beschäftigung mit allgemeinen geometrischen Principien vorzugsweise bei den Neueren hervor, so ist dieses nicht als eine Manier derselben, sondern als das nothwendige Resultat der Wissenschaft selbst anzusehen, und nur das würde Tadel verdienen, wenn man bei derartigen freieren Excursionen der bleiernen Gewichte, welche Euklid der Geometrie an die Füsse gebunden hat, meinte entbehren zu können.

Aufgabe. 4.

Durch neun im Raum beliebig gegebene Punkte D, D_1, α, σ, β, γ, δ, ε, φ eine Fläche des zweiten Grades zu legen, d. h. 1) auf jedem Strahle g eines der gegebenen Punkte, z. B. D oder D_1, denjenigen Punkt χ zu finden, in welchem derselbe die Fläche zum zweitenmal schneidet; und insbesondere

2) diejenige Ebene zu finden, welche die Fläche im Punkte D_1 oder D berührt.

Erste Auflösung.

(Taf. II. Fig. 3.)

a) Man bilde aus den Punkten D und D_1 und aus irgend zweien der übrigen, z. B. α und σ, ein Tetraeder, dessen Kanten $D\alpha$ und $D\sigma$ mit A und A' bezeichnet werden mögen; und lasse irgend einen der fünf übrigen gegebenen Punkte, z. B. φ, zunächst ganz ausser Acht.

b) Man konstruire ein einfaches Hyperboloid $\mathfrak{p}$, in welchem die Gerade A und die 6 Punkte D_1, σ, β, γ, δ, ε liegen, d. h. man suche die durch den Punkt D_1 gehende, mit A zu einerlei Schaar gehörende Gerade A_1 und ausserdem irgend eine dritte Gerade M von derselben Schaar des Hyperboloids.

c) Man konstruire ein zweites einfaches Hyperboloid $\mathfrak{p}'$, in welchem die Gerade A' und die 6 Punkte D_1, α, β, γ, δ, ε liegen, d. h. man suche die durch den Punkt D_1 gehende, mit A' zu einerlei Schaar gehörende Gerade A_1' und ausserdem irgend eine dritte Gerade M' derselben Schaar.

d) Die unter *b*) und *c*) gefundenen Geraden A_1 und A_1' schneiden die der Ecke D_1 gegenüberliegende Fläche $D\alpha\sigma$ des Tetraeders bezüglich in den Punkten B_1 und B_1'. Man verbinde den Punkt B_1 mit dem Punkte σ durch eine Gerade A_2', und den Punkt B_1' mit dem Punkte α durch eine Gerade A_2.

e) Jetzt endlich lege man durch die Gerade A und den bisher vernachlässigten Punkt φ eine Ebene, welche die Gerade M

im Punkte $\mathfrak{f}$ schneide; und verbinde diesen Punkt $\mathfrak{f}$ mit der Geraden A_1 durch eine Ebene, welche die Ebene $D\alpha\sigma$ in einem Strahle f_1 des Punktes B_1 schneidet.

Desgleichen lege man durch A' und φ eine Ebene, welche die Gerade M' im Punkte $\mathfrak{f}'$ schneide, und verbinde $\mathfrak{f}'$ mit A_1' durch eine Ebene, welche die Ebene $D\alpha\sigma$ in einem Strahle f_1' des Punktes B_1' schneidet.

Nun lege man durch den Durchschnittspunkt φ_1 der beiden Strahlen f_1 und f_1' und durch die Punkte φ und D_1 eine Ebene, welche die Ebene $D\alpha\sigma$ in der Geraden f_2 und die Geraden A_2, A_2' in den Punkten $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_2'$ schneidet.

f) Ist nun g irgend ein Strahl des Punktes D, auf welchem ein zehnter Punkt χ der Fläche gesucht wird, so verfahre man in Bezug auf den Punkt χ zunächst ebenso wie unter *e*) in Bezug auf den Punkt φ, d. h. man lege durch A und g, A' und g zwei Ebenen, welche die M, M' in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ schneiden, mittels deren sofort die Strahlen g, g' und deren Durchschnittspunkt χ_1 sich ergeben.

g) Der Strahl g_1 schneide f_1' im Punkte $\mathfrak{g}_3$ und der Strahl g_1' den Strahl f_1 im Punkte $\mathfrak{g}_3'$. Man verbinde die Punkte $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{g}_3'$ mit einander durch eine Gerade, welche die Gerade A_2' im Punkte $\mathfrak{g}_2'$ trifft, diesen Punkt sodann mit χ_1 durch eine Gerade g_2, welche die A_2 im Punkte $\mathfrak{g}_2$ trifft.

Oder aber: man verbinde $\mathfrak{f}_2'$ mit $\mathfrak{g}_3$, wodurch man auf A_2 denselben Punkt $\mathfrak{g}_2$ erhält, und $\mathfrak{g}_2$ mit χ_1, wodurch man auf A_2' denselben Punkt $\mathfrak{g}_2'$ als vorher erhält.

Oder endlich: man ziehe die Geraden $\mathfrak{f}_2\,\mathfrak{g}_3'$ und $\mathfrak{f}_2'\,\mathfrak{g}_3$, so werden diese Geraden A_2' und A_2 resp. in den nämlichen Punkten $\mathfrak{g}_2'$ und $\mathfrak{g}_2$ treffen.

Und wenn diess so ist, so wird man auch statt Alles dessen sagen können: Man beschreibe ein vollständiges Viereck $\mathfrak{f}_2\,\mathfrak{g}_2'$ $\mathfrak{f}_2'\,\mathfrak{g}_2$, dessen drei Paar Gegenseiten A_2 und A_2', f_2 und g_2, $\mathfrak{f}_2\,\mathfrak{g}_2'$ und $\mathfrak{f}_2'\,\mathfrak{g}_2$ resp. durch die drei Paar Gegenecken B_1' und B_1, φ_1 und χ_1, $\mathfrak{g}_3'$ und $\mathfrak{g}_3$ des von den Geraden f_1, g_1, f_1', g_1' gebildeten vollständigen Vierseits gehen.

h) Sofort lege man durch den Punkt D_1 und die Gerade g_2 eine Ebene, so schneidet dieselbe den gegebenen Strahl g in dem gesuchten Punkte χ.

i) Um nun auch diejenige Ebene zu finden, welche die Fläche im Punkte D_1 berührt, so verfahre man in Bezug auf den Strahl DD_1 des Punktes D ebenso, wie unter *f*), *g*) und *h*) in Bezug auf den Strahl g. Diejenige Ebene, welche der unter *h*) durch D_1 und g_2 gelegten analog ist, wird die gesuchte sein.

Beweis.

a) Es seien $a, s, b, c, d, e, f, g, m \ldots$ beliebige und beliebig viele Strahlen des Punktes D, von denen die sieben ersteren durch die gegebenen Punkte $\alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ gehen. Man denke sich einerseits durch die Gerade A und die Strahlen $a, s, b, c, d, e, f, g, m \ldots$ Ebenen gelegt, welche die Gerade M in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m} \ldots$ schneiden und selber mit $\alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \chi, \mu \ldots$ bezeichnet werden mögen; andererseits durch die Gerade A' und dieselben Strahlen die Ebenen $\alpha', \sigma', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \varphi', \chi', \mu' \ldots$, welche die Gerade M' in den Punkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{s}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}', \mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{m}' \ldots$ schneiden; sofort durch die Gerade A_1 und die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m} \ldots$ die Ebenen $\alpha_1, \sigma_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, \varphi_1, \chi_1, \mu_1 \ldots$, welche die Ebene $D\alpha\sigma$ in dem Strahlbüschel B_1 mit den Strahlen $a_1, s_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, m_1, \ldots$ schneiden; und endlich durch die Gerade A_1' und die Punkte $\mathfrak{a}', \mathfrak{s}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}', \mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{m}' \ldots$ die Ebenen $\alpha_1', \sigma_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1', \varepsilon_1', \varphi_1', \chi_1', \mu_1' \ldots$, welche die Ebene $D\alpha\sigma$ in dem Strahlbüschel B_1' mit den Strahlen $a_1', s_1', b_1', c'_1, d_1', e_1', f_1', g_1', m_1' \ldots$ schneiden.

Demnach ist

$$A(\alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \chi, \mu \ldots) \equiv M(\mathfrak{a}, \mathfrak{s}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{m} \ldots)$$
$$\equiv A_1(\alpha_1, \sigma_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, \varphi_1, \chi_1, \mu_1 \ldots)$$
$$\equiv B_1\,(a_1, s_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, m_1 \ldots);$$

und

$$A'(\alpha', \sigma', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \varphi', \chi', \mu' \ldots)$$
$$\equiv M'(\mathfrak{a}', \mathfrak{s}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}', \mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{m}' \ldots)$$
$$\equiv A_1'(\alpha_1', \sigma_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1', \varepsilon_1', \varphi_1', \chi_1', \mu'_1 \ldots)$$
$$\equiv B_1'\,(a_1', s_1', b_1', c_1', d'_1, e_1', f_1', g_1', m_1' \ldots);$$

also auch

$$A(\alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \chi, \mu \ldots)$$
$$= B_1(a_1, s_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, m_1 \ldots);$$

und

$$A'(\alpha', \sigma', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \varphi', \chi', \mu' \ldots)$$
$$= B_1'(a_1', s_1', b_1', c_1', d_1', e_1', f_1', g_1', m_1' \ldots)$$

Die Geraden A, A_1 und M und die Durchschnitte der Ebenenpaare α, α_1; σ, σ_1; β, β_1; $\gamma, \gamma_1 \ldots$ liegen in einem einfachen Hyperboloid, welches mit dem der Construktion, nämlich mit $\mathfrak{p}$, zu-

sammenfällt, indem eine solche Fläche durch drei Gerade A, A_1, M völlig bestimmt ist. Es enthält also, wie dieses, auch die Punkte σ, β, γ, δ, ε; folglich gehen die Durchschnttslinien der Ebenenpaare σ, σ_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1; ε, ε_1 und die Ebene σ_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1 selbst durch die Punkte σ, β, γ, δ, ε.

Ebenso zeigt man mittels des Hyperboloids $\mathfrak{p}'$, dass die Ebenen α_1', β_1', γ_1', δ_1', ε_1' durch die Punkte α, β, γ, δ, ε gehen.

Daher müssen nun auch die Durchschnittspunkte der Strahlenpaare b_1, b_1'; c_1, c_1'; d_1, d_1'; e_1, e_1', welche Punkte in dem Folgenden mit β_1, γ_1, δ_1, ε_1 bezeichnet werden, mit dem Punkte D_1 und den gegebenen Punkten β, γ, δ, ε in geraden Linien liegen.

Ehe wir weiter gehen, muss noch Folgendes bemerkt werden: Da die Strahlen a und s mit den Achsen A und A' der Ebenenbüschel A und A' zusammenfallen, so sind die Ebenen α und σ' im Grunde von unbestimmter Richtung, desgleichen also auch die Ebenen α_1 und σ_1', und in der That würde eine solche Annahme der Lage dieser Ebenen das Ergebniss der ferneren Betrachtung nicht ändern. Wir können aber, wegen der Analogie der Punkte β, γ, δ, ε, unter α_1 diejenige Ebene des Ebenenbüschels A_1, welche nach dem Punkte α geht, und unter σ_1' diejenige Ebene des Ebenenbüschels A_1', welche nach dem Punkte σ geht, verstehen, und dann werden zunächst die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}'$ und hierdurch die Ebenen α und σ' bestimmt.

Da endlich bei der Construktion der Hyperboloide $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ auf den Punkt φ nicht gerücksichtigt wurde, so werden zwar die Ebenen φ und φ', nicht aber nothwendig die Ebenen φ_1 und φ_1' durch diesen Punkt gehen; im Allgemeinen also ist eine Ebene, welche den Punkt φ mit der Durchschnittslinie der Ebenen φ_1, und φ_1' oder, was einerlei ist, welche den Punkt φ mit dem Punkte D_1 und dem Durchschnittspunkte φ_1 der Strahlen f_1 und f_1' verbindet, von bestimmter Lage. Deshalb ist denn auch die Gerade f_2 auf bestimmte Weise gegeben.

b) Sind im Allgemeinen $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{m}_3$ .... die Durchschnitte des Strahles f_1' und der Strahlen a_1, s_1, b_1, c_1, d_1 e_1, g_1, m_1 ..., und $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{s}_3'$, $\mathfrak{b}_3'$, $\mathfrak{c}_3'$, $\mathfrak{d}_3'$, $\mathfrak{e}_3'$, $\mathfrak{g}_3'$, $\mathfrak{m}_3'$... die Durchschnitte des Strahles f_1 und der Strahlen a'_1, s_1', b_1', c'_1, d_1', e_1', g_1', m_1'..., so erhält man die Dreieckspaare $B_1\,\mathfrak{f}_2'\mathfrak{a}_3$ und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{a}'_3$, $B_1\mathfrak{f}_3'\mathfrak{s}_3$ und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{s}_3'$, $B_1\mathfrak{f}_2'\mathfrak{b}_3$, und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{b}_3'$, $B_1\mathfrak{f}_2'\mathfrak{c}_3$ und $B'_1\mathfrak{f}_2\,\mathfrak{c}_3'$, $B_1\mathfrak{f}'_2\mathfrak{d}_3$ und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{d}'_3$, $B_1\mathfrak{f}_2'\mathfrak{e}_3$ und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{e}'_3$, $B_1\mathfrak{f}_2'\mathfrak{g}_3$ und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{g}_3$, $B_1\mathfrak{f}'_2\mathfrak{m}_3$ und $B_1'\mathfrak{f}_2\mathfrak{m}'_3$....., deren Eckenpaare auf den drei Convergenten f_2, f_1, f_1' liegen; also liegen die Durchschnitte

$$\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2', \alpha;\ \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_2', \sigma;\ \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2', \beta_1;\ \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_2'\, \gamma_1;\ \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_2', \delta_1;\ \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2', \varepsilon_1;$$
$$\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2', \chi_1;\ \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2', \mu_1 \ldots$$

ihrer entsprechenden Seitenpaare drei zu drei in gerader Linie, nämlich in den Geraden

$$a_2, s_2, b_2, c_2, d_2, e_2, g_2, m_2 \ldots$$

Man kann also z. B. die Gerade g_2 auf jede der in der Construktion unter $g)$ angegebenen Weisen erhalten.

Die Gerade A_2 und die Gerade f_1' sind nun in Ansehung der Punktenpaare

$$\mathfrak{a}_2, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{m}_2 \ldots$$

und

$$\mathfrak{a}_3, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{f}_3, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{m}_3 \ldots$$

perspektivisch, denn $\mathfrak{f}_2'$ ist ihr Projektionspunkt; die Gerade f_1' und der Strahlbüschel B_1 aber sind in Ansehung derselben Punkte und der Strahlen

$$a_1, s_1, b_1, c_1, d_1, f_1, g_1, m_1 \ldots$$

perspektivisch: also ist

$$A_2(\mathfrak{a}_2. \mathfrak{s}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{m}_2 \ldots) =$$

$$B_1(a_1, s_1, b_1, c_1, d_1, e_1\, f_1, g_1, m_1 \ldots) =$$

$$A(\alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, x, \mu \ldots);$$

und ebenso ergibt sich, dass

$$A_2'(\mathfrak{a}_2', \mathfrak{b}_2', \mathfrak{c}_2', \mathfrak{d}_2', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{f}_2', \mathfrak{g}_2', \mathfrak{m}_2 \ldots) =$$

$$B_1'(a_1', s_1', c_1', d_1', e_1', f_1', g_1', m_1 \ldots) =$$

$$A'(\alpha', \sigma', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \varphi', \chi', \mu' \ldots)$$

ist. Da nun dem gemeinschaftlichen Punkte $(\mathfrak{s}_2\, \mathfrak{a}_2')$ der Geraden A_2 und A_2' wechselsweise die den Ebenenbüscheln A und A' gemeinschaftliche Ebene $(\sigma\alpha')$ entspricht, so bildet die Ebene $D\alpha\sigma$ und der räumliche Strahlbüschel D in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare

$$a_2, s_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, m_2 \ldots$$

und

$$a, s, b, c, d, e, f, g, m \ldots,$$

und daher auch, wenn man die Ebenen, welche den Punkt D_1 mit den Geraden

$$a_2, s_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2, m_2 \ldots$$

verbinden, mit

$$\alpha_2,\ \sigma_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta_2,\ \varepsilon_2,\ \varphi_2,\ \chi_2,\ \mu_2 \ldots,$$

bezeichnet, die zwei räumlichen Strahlbüschel D_1 und D in Ansehung der entsprechenden Ebenen

$$\alpha_2,\ \sigma_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta_2,\ \varepsilon_2,\ \varphi_2,\ \chi_2,\ \mu_2 \ldots$$

und Strahlen

$$a,\ s,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ m \ldots.$$

zwei reciproke Gebilde,

Nun aber gehören die Durchschnittspunkte der sämmtlichen entsprechenden Elementenpaare zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel, wie früher gezeigt worden ist, einer und derselben Fläche des zweiten Grades an, welche auch deren Mittelpunkte D, D_1 enthält, und die Punkte $\alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ sind die Durchschnitte der entsprechenden Elementenpaare a und α_2, s und σ_2, b und β_2, c und γ_2, d und δ_2, e und ε_2, f und φ_2; also liegen auch die Durchschnitte $\chi, \mu \ldots$ aller übrigen entsprechenden Elementenpaare g und χ_2, m und $\mu_2 \ldots$ mit den gegebenen 9 Punkten $D, D_1, \alpha, \sigma, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ in einerlei Fläche des zweiten Grades.

c) Es sei p derjenige Strahl von D, welcher nach dem Punkte D_1 geht, so fallen die Ebenen π und π' mit $DD_1\alpha$ und $DD_1\sigma$ zusammen und es ergibt sich nothwendig eine Ebene π_2, als Polare des Strahles p. Die Polarebenen der in dieser Ebene π_2 liegenden Strahlen von D_1 gehen durch den Strahl p von D und, wie im 9ten Theile des Archivs Seite 196—198 gezeigt worden, geht entweder keine dieser Ebenen durch den ihr entsprechenden Strahl — in diesem Falle kann auch keine den letzteren in einem anderen Punkte als D_1 schneiden d. h. die Ebene π_2 hat mit der Fläche nur den einen Punkt D_1 gemein — oder zwei jener Ebenen gehen durch die entsprechenden Strahlen — und dann sind diese Strahlen zwei der Ebene π_2 und der Fläche gemeinschaftliche Gerade d. h. π_2 die Berührungsebene eines einfachen Hyperboloids — oder nur eine geht durch den entsprechenden Strahl — und dann ist π_2 die Berührungsebene eines Kegels.

Andere Auflösung.

a) Man bilde wieder das Tetraeder $DD_1\alpha\sigma$, dessen Kanten $D\alpha$, $D\sigma$, $D_1\sigma$, $D_1\alpha$, $\alpha\sigma$ der Reihe nach mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, A, A', $(A_0\ A_0')$ bezeichnet werden mögen, und lasse von den fünf übrigen gegebenen Punkten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ irgend einen, z. B. φ, zunächst ganz ausser Acht.

b) Man bilde nun die Ecken D_1, α, σ des Tetraeders, als Scheitel, drei Dreikante $D_1(\beta\gamma\delta)$, $\alpha(\beta\gamma\delta)$, $\sigma(\beta\gamma\delta)$, deren Kanten nach irgend dreien der vier Punkte $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ z. B. nach β, γ, δ, gehen.

Die Seitenflächen $D_1\beta\gamma$, $D_1\beta\delta$, $D_1\gamma\delta$ des ersteren mögen die Kante $\alpha\sigma$ des Tetraeders in den Punkten δ_0, γ_0, β_0; die Kanten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ des zweiten mögen die Gegenfläche $DD_1\sigma$ von α (im Tetraeder) in den Punkten $\beta_{''}$, $\gamma_{''}$, $\delta_{''}$, und die Kanten $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$, $\sigma\delta$ des dritten die Gegenfläche $DD_1\alpha$ von σ in den Punkten $\beta'_{''}$, $\gamma'_{''}$, $\delta'_{''}$ schneiden.

Man denke sich jetzt aus den sechs Punkten δ_0, γ_0, β_0, $\beta_{''}$, $\gamma_{''}$, $\delta_{''}$ das windschiefe Sechseck $\delta_0\beta_{''}\gamma_0\delta_{''}\beta_0\gamma_{''}\delta_0$, und ebenso aus den sechs Punkten δ_0, γ_0, β_0, $\beta'_{''}$, $\gamma_{''}'$, $\delta_{''}'$ das windschiefe Sechseck $\delta_0\beta'_{''}\gamma_0\delta_{''}'\beta_0\gamma_{''}'\delta_0$ gebildet und verbinde die sechs Seiten eines jeden von beiden mit der Ecke D des Tetraeders durch sechs Ebenen. In den so um den Scheitel D entstehenden zwei Sechskanten werden die drei Paar Hauptgegenflächen, nämlich $D\delta_0\beta_{''}$ und $D\delta_{''}\beta_0$, $D\beta_{''}\gamma_0$, und $D\beta_0\gamma_{''}$, $D\gamma_0\delta_{''}$ und $D\gamma_{''}\delta_0$; $D\delta_0\beta'_{''}$ und $D\delta'_{''}\beta_0$, $D\beta'_{''}\gamma_0$ und $D\beta_0\gamma'_{''}$, $D\gamma_0\delta'_{''}$ und $D\gamma'_{''}\delta_0$ sich in drei Geraden $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}'$ schneiden, welche in einerlei Ebene M, M' liegen. Man konstruire diese zwei Ebenen.

c) Man wiederhole das ganze unter *b*) vorgeschriebene Verfahren, indem man nichts thut, als einen der drei Punkte β, γ, δ, z. B. δ, mit dem Punkte ε vertauscht. (Es wird aber dann der Punkt δ_0 unter dem Namen ε_0 und für die Punkte β_0, γ_0 werden zwei andere Punkte unter denselben Namen auftreten). Auf diese Weise erhält man zwei den M und M' analoge Ebenen N und N'.

d) Hiermit ist auch die Durchschnittslinie $\mathfrak{A}_{''}$ der Ebenen M und N, und die Durchschnittslinie $\mathfrak{A}'_{''}$ der Ebenen M' und N' gefunden. Ist nun f der nach dem neunten gegebenen Punkte φ gehende, und g ein beliebig gegebener anderer Strahl des Punktes D, dessen zweiter Durchschnitt mit der Fläche gesucht wird, so verbinde man den Punkt α mit zwei beliebigen Punkten von f und g durch zwei Gerade, welche die Ebene $DD_1\sigma$ in den Punkten $\varphi_{''}$ und $\chi_{''}$ schneiden, und den Punkt σ mit denselben oder auch zwei anderen Punkten von f und g durch zwei Gerade, welche die Ebene $DD_1\alpha$ in den Punkten $\varphi_{''}'$ und $\chi_{''}'$ schneiden werden.

Jetzt lege man einerseits durch die Gerade $\mathfrak{A}_{''}$ und die Punkte $\beta_{''}$, $\gamma_{''}$, $\delta_{''}$, $\varepsilon_{''}$, $\varphi_{''}$, $\chi_{''}$ die Ebenen $\beta_{''}$, $\gamma_{''}$, $\delta_{''}$, $\varepsilon_{''}$, $\varphi_{''}$, $\chi_{''}$, welche die Kante A_0 in den Punkten $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, und andererseits durch die Gerade $\mathfrak{A}'_{''}$ und die Punkte $\beta'_{''}$, $\gamma'_{''}$, $\delta'_{''}$, $\varepsilon'_{''}$, $\varphi'_{''}$, $\chi'_{''}$ die Ebenen $\beta'_{''}$, $\gamma'_{''}$, $\delta'_{''}$, $\varepsilon'_{''}$, $\varphi'_{''}$, $\chi'_{''}$, welche dieselbe Kante A'_0 in den Punkten $\mathfrak{b}'_0$, $\mathfrak{c}'_0$, $\mathfrak{d}'_0$, $\mathfrak{e}'_0$, $\mathfrak{f}'_0$, $\mathfrak{g}'_0$ schneiden werden; und verbinde sofort die Punkte $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{e}_0$ bezüglich mit den Geraden $D_1\beta$, $D_1\gamma$, $D_1\delta$, $D_1\varepsilon$ durch die Ebenen β_1, γ_1, δ_1, ε_1, sowie die Punkte $\mathfrak{b}'_0$, $\mathfrak{c}'_0$, $\mathfrak{d}'_0$, $\mathfrak{e}'_0$ bezüglich mit denselben Geraden durch die Ebenen β'_1, γ'_1, δ_1', ε'_1. Diess vorausgesetzt, so werden sich die vier Ebenen β_1, γ_1, δ_1, ε_1 in einer und derselben Geraden $\mathfrak{A}_1$, und die vier Ebenen β'_1, γ_1', δ_1', ε_1' in einer und derselben Geraden $\mathfrak{A}'_1$ schneiden.

e) Jetzt lege man durch die Gerade $\mathfrak{A}_1$ und die Punkte σ, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$ noch die Ebenen σ_1, φ_1, χ_1, und durch die Gerade $\mathfrak{A}_1'$

und die Punkte α, $\mathfrak{f}'_0$, $\mathfrak{g}'_0$ die Ebenen α'_1, φ'_1, χ_1'; so werden sich die drei Ebenenpaare σ_1 und α'_1, φ_1 und φ_1', χ_1 und χ_1' bezüglich in drei Strahlen des Punktes D_1, nämlich $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{F}_1''$, $\mathfrak{G}_1''$ schneiden. Nun endlich lege man durch den Strahl $\mathfrak{F}_1''$ und den neunten gegebenen Punkt φ eine Ebene φ_2, denke sich ein mystisches Sechskant — d. h. dessen Durchschnitte der Hauptgegenflächen in einerlei Ebene liegen — dessen Kanten die Strahlen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}''_1$, $\mathfrak{F}''_1$, $\mathfrak{G}_1''$ und die Durchschnittslinie der Ebene φ_2 und einer durch $\mathfrak{G}_1''$ gehenden Ebene χ_2 sind, und konstruire diese letztere Ebene; so wird dieselbe den Strahl g in dem gesuchten zehnten Punkte χ der gedachten Fläche des zweiten Grades schneiden u. s. w.

Beweis.

a) Es seien wieder

$$a,\ s,\ b,\ a,\ d,\ e,\ f,\ g,\ m\ldots.$$

beliebig viele Strahlen des Punktes D, von denen die 7 ersteren durch die gegebenen Punkte α, σ, β, γ, δ, ε, φ gehen; es seien

$$\alpha,\ \sigma,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \varphi,\ \chi,\ \mu\ldots.$$

zugleich die Bezeichnungen der Ebenen, welche durch die Kante $\mathfrak{A}$ des Tetraeders und die Strahlen

$$a,\ s,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ m\ldots$$

gehen, sowie

$$\alpha',\ \sigma',\ \beta',\ \gamma',\ \delta',\ \varepsilon',\ \varphi',\ \chi',\ \mu'\ldots.$$

diejenigen der Ebenen, welche dieselben Strahlen mit der Kante $\mathfrak{A}'$ verbinden.

Diese zwei Schaaren von Ebenen (Taf. II. Fig. 4.), welche offenbar, wenn wir von α und σ' absehen, durch die Punkte

$$\sigma\ \beta_{\prime\prime},\ \gamma_{\prime\prime},\ \delta_{\prime\prime},\ \varepsilon_{\prime\prime},\ \varphi_{\prime\prime},\ \chi_{\prime\prime},\ \mu_{\prime\prime}\ldots$$

und

$$\alpha,\ \beta'_{\prime\prime},\ \gamma'_{\prime\prime},\ \delta'_{\prime\prime},\ \varepsilon_{\prime\prime}',\ \varphi_{\prime\prime}',\ \chi_{\prime\prime}',\ \mu'_{\prime\prime}\ldots$$

der Konstruktion gehen müssen, mögen die Kanten A und A' des Tetraeders bezüglich in den Punkten

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{s}\ (\text{d. h. } \sigma),\ \mathfrak{s}\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{m}\ldots$$

und

$$\mathfrak{a}'\ (\text{d. h. } \alpha),\ \mathfrak{s}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}',\ \mathfrak{e}',\ \mathfrak{f}',\ \mathfrak{g}',\ \mathfrak{m}'\ldots$$

schneiden; und es seien β_1, γ_1, δ_1, ε_1 die Durchschnittspunkte der Strahlen $D_1\beta$, $D_1\gamma_1$, $D_1\delta_1$, $D_1\varepsilon_1$ und der Gegenebene $D\alpha\sigma$ von D_1.

Diess vorausgesetzt, so ist das ebene Sechseck $\delta_0 \mathfrak{b} \gamma_0 \mathfrak{d} \beta_0 \mathfrak{c} \delta_0$ die Projektion des windschiefen $\delta_0\beta_{\prime\prime}\gamma_0\delta_{\prime\prime}\beta_0\gamma_{\prime\prime}\delta_0$, und das ebene Sechseck $\delta_0\mathfrak{b}'\gamma_0\mathfrak{d}'\beta_0\mathfrak{c}'\delta_0$ die des windschiefen $\delta_0\beta'_{\prime\prime}\gamma_0\delta'_{\prime\prime}\beta_0\gamma'_{\prime\prime}\delta_0$ in Bezug auf D als Projektionspunkt.

b) Da nun jene zwei Sechsecke einem System zweier Geraden A und A_0, A' und A'_0 eingeschrieben sind, so sind es mystische, d. h. die Durchschittspunkte $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}'_1$, $\mathfrak{d}'_1$, $\mathfrak{b}_1'$ der drei Paar Hauptgegenseiten $\delta_0\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}\beta_0$, $\beta_0\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\gamma_0$, $\gamma_0\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}\delta_0$; $\delta_0\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{d}'\beta_0$, $\beta_0\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{b}'\gamma_0$, $\gamma_0\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{c}'\delta_0$ liegen in einer geraden Linie M, M', welche also der Durchschnitt der in der Konstruktion genannten Ebene M, M' mit der Ebene $D_1\alpha\sigma$ sein muss.

Denkt man sich nun zwei bewegliche, durch die festen Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gehende Gerade, deren Durchschnittspunkt i die Gerade M durchläuft, und die zwei beweglichen Punkte, in denen jene zwei Gerade die Kante A_0 schneiden, fortwährend mit den festen Punkten β_1 und γ_1 durch zwei neue Gerade verbunden, so erzeugen letztere um die Mittelpunkte β_1 und γ_1 zwei projektivische Strahlbüschel; ihr Durchschnittspunkt i_1 durchläuft also einen Kegelschnitt, welcher auch die Punkte β_1 und γ_1 enthält; und da, wenn der Punkt i nach $\mathfrak{d}_1$, auf die Kante A oder A_0 rückt, der Punkt i_1 nach δ_1, σ oder auf i (den Durchschnitt von M und A_0) selber zu liegen kommt, so gehören auch diese letzteren drei Punkte zu demselben Kegelschnitt.

Wiederholt man diese ganze Betrachtung, indem man nur den festen Punkt $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{d}$ und γ_1 mit δ_1 vertauscht, demzufolge dann auch $\mathfrak{c}_1$ für $\mathfrak{d}_1$ und γ_1 für δ_1 zu nehmen ist, so erhält man einen zweiten Kegelschnitt, welcher die nämlichen fünf Punkte σ, β_1, γ_1, δ_1 und den Durchschnitt von M und A_0, wie der erstere enthält, also mit diesem identisch ist. Hieraus folgt, dass wenn man irgend einen Punkt i der Geraden M mit den Punkten $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ durch Gerade verbindet und die Punkte $\mathfrak{b}_{\prime\prime}$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, wo letztere die A_0 schneiden, bezüglich mit $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ durch drei neue Gerade verbindet, diese letzteren durch einen und denselben Punkt i_1 gehen müssen.

Ein Gleiches lässt sich von der Geraden N, dem Durchschnitt der Ebenen N und $D_1\alpha\sigma$, und wiederum von den Geraden M' und N', den Durchschnitten der Ebenen M' und N' mit $D_1\alpha\sigma$, in Bezug auf die Punkte

$$\beta_1,\ \gamma_1,\ \varepsilon_1,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{e};\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1,\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}';\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \varepsilon_1,\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{e}'$$

nachweisen.

Ist nun also B der Durchschnittspunkt der Geraden M und N, B' der der Geraden M' und N', d. h. der Durchschnittspunkt der Geraden $\mathfrak{A}_{\prime\prime}$, $\mathfrak{A}'_{\prime\prime}$ mit der Ebene $D_1\alpha\sigma$, so muss derselbe die Eigenschaften der Punkte beider Geraden gemeinschaftlich be-

sitzen, d. h. alle von B nach den Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ gehenden Geraden schneiden die A_0 in solchen vier Punkten $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{e}_0$, dass die von ihnen nach β_1, γ_1, δ_1, ε_1 gehenden Geraden b_1, c_1, d_1, e_1 sich in einem und demselben Punkte B_1 vereinigen, und alle von B' nach $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$ gehenden Geraden schneiden die A'_0 in solchen vier Punkten $\mathfrak{b}'_0$, $\mathfrak{c}'_0$, $\mathfrak{d}'_0$, $\mathfrak{e}'_0$, dass die von ihnen nach β_1, γ_1, δ_1, ε_1 gehenden Geraden b'_1, c'_1, d'_1, e_1' sich in einem und demselben Punkte B_1' vereinigen.

Zieht man nun noch von B nach den Punkten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$... und von B' nach $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{m}'$... gerade Linien, welch die A_0 in $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{m}_0$.., die A'_0 in $\mathfrak{f}'_0$, $\mathfrak{g}'_0$, $\mathfrak{m}'_0$... schneiden, und verbindet diese Punkte bezüglich mit B_1 durch die Geraden f_1, g_1, m_1..., mit B'_1 durch f'_1, g'_1, m'_1..., versteht man ferner unter $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}'$ die Punkte σ, α und unter $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{s}'$ diejenigen Punkte von A, A', welche bezüglich mit α und B, σ und B' in gerader Linie liegen, so dass also $\mathfrak{s}_0$ und $\mathfrak{s}'_0$ mit σ; $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}'_0$ mit α zusammenfallen, und einerseits s_1 und a_1, andererseits s'_1 und a'_1 die von σ und α nach B_1, B'_1 gehenden Geraden sind; bedenkt man endlich, dass die Punkte

$$B_1,\ B'_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1,\ \varepsilon_1,\ \varphi_1,\ \chi_1,\ \mu_1 \ldots$$

den Geraden

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}'_1,\ D_1\beta,\ D_1\gamma,\ D_1\delta,\ D_1\varepsilon;\ \mathfrak{F}_1'',\ \mathfrak{G}_1'',\ \mathfrak{M}_1'' \ldots$$

und der Durchschnitt B''_1 der Geraden s_1 und a'_1 (in Taf. II. Fig. 3. $\mathfrak{s}_2\,\mathfrak{a}'_2$) der Geraden $\mathfrak{A}''_1$ angehören, und dass die Strahlen

$$a_1,\ s_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1,\ f_1,\ g_1,\ m_1 \ldots$$

in den Ebenen

$$\alpha_1,\ \sigma_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1,\ \varepsilon_1,\ \varphi_1,\ \chi_1,\ \mu_1 \ldots$$

des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}_1$, die Strahlen

$$a'_1,\ s'_1,\ b'_1,\ c'_1,\ d'_1,\ e'_1,\ f'_1,\ g'_1,\ m'_1 \ldots$$

in den Ebenen

$$\alpha'_1,\ \sigma'_1,\ \beta'_1,\ \gamma'_1,\ \delta'_1,\ \varepsilon'_1,\ \varphi'_1,\ \chi'_1,\ \mu'_1 \ldots$$

des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}'_1$ liegen, so überzeugt man sich, dass

$$\mathfrak{A}(\alpha,\ \sigma,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \varphi,\ \chi,\ \mu \ldots) \equiv$$

$$A(\mathfrak{a},\ \mathfrak{s},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{m} \ldots) \equiv$$

$$A_0(\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{s}_0,\ \mathfrak{b}_0,\ \mathfrak{c}_0,\ \mathfrak{d}_0,\ \mathfrak{e}_0,\ \mathfrak{f}_0,\ \mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{m}_0 \ldots) \equiv$$

$$B_1(a_1,\ s_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1,\ f_1,\ g_1,\ m_1 \ldots) \equiv$$

$\mathfrak{A}_1(\alpha_1, \sigma_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, \varphi_1, \chi_1, \mu_1 ...)$,

und

$$\mathfrak{A}'(\alpha', \sigma', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \varphi', \chi', \mu' ...) \equiv$$

$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{s}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{e}', \mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{m}' ...) \equiv$$

$$A'(\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{s}'_0, \mathfrak{b}'_0, \mathfrak{c}'_0, \mathfrak{d}'_0, \mathfrak{e}'_0, \mathfrak{f}'_0, \mathfrak{g}'_0, \mathfrak{m}'_0 ...) \equiv$$

$$B'_1(a'_1, s'_1, b_1', c'_1, d'_1, e'_1, f'_1, g'_1, m'_1 ...) \equiv$$

$$\mathfrak{A}'_1(\alpha'_1, \sigma'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \delta'_1, \varepsilon'_1, \varphi'_1, \chi'_1, \mu_1' ...)$$

st, und dass folglich der ganze noch übrige Theil des Beweises uf lit. *b*) des vorigen zurückkommt. Denn dass nach der jetzigen Konstruktion die Geraden $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{H}_1''$, $\mathfrak{G}_1''$ und der Durchschnitt der Ebenen φ_2 und χ_2 ein mystisches Sechskant bilden, olgt einfach daraus, dass in Taf. II. Fig. 3. die Punkte B_1, B'_1, B''_1 $\mathfrak{s}_2$ $\mathfrak{a}'_2$), φ_1, χ_1 und der Durchschnitt der Geraden f_2, g_2 ein mystisches Sechseck bilden, indem die Durchschnitte $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{f}'_2$ seiner drei Paar Hauptgegenseiten g_2 und $B'_1 B''_1$, $\chi_1 B_1$ und $B'_1\varphi_1$, $B_1 B''_1$ und f_2 in einer Geraden liegen; und es wurde diese neue Fassung nur aus dem Grunde gewählt, und desshalb auch die Konstruktion von vier mystischen Sechskanten um D der an und ür sich einfachern von vier ebenen mystischen Sechsecken in der Ebene $D_1\alpha\sigma$ vorgezogen, weil gezeigt werden sollte, dass die räumliche Figur, welche das zwischen zehn Punkten einer Fläche des zweiten Grades obwaltende Gesetz ausdrückt, zunächst, so zu sagen, als eine Verstrickung von fünf mystischen Sechskanten erscheint. Ich sage: zunächst, weil zu hoffen steht, dass diese Figur später einer mehr symmetrischen Platz machen werde, sowie ja auch das mystische, die sechs Punkte eines Kegelschnitts bestimmende Sechseck einer weiteren, besondern Betrachtung der den Kegelschnitt erzeugenden proj. Strahlbüschel zu verdanken ist. Ob aber nicht vielleicht der Umstand, dass einer der neuen gegebenen Punkte beim Bau des Hauptgerüstes keine Rolle spielt, die ausgesprochene Hoffnung schwächen dürfte?

Schlussbemerkungen.

Ist nicht ein Strahl g des räumlichen Strahlbüschels D, sondern eine Ebene χ_2 des räumlichen Strahlbüschels D_1 gegeben, auf welcher ein Punkt χ der fraglichen Fläche gesucht wird, so ist hiermit in Taf. II. Fig. 3. die Gerade g_2, folglich die Punkte $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}'_2$ und mittels der Strahlen f_1, f_1' und der Punkte $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}'_2$ die Punkte $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}'_3$, die Strahlen g_1, g'_1 die Ebenen χ_1, χ'_1; χ, χ' und folglich der Strahl g gegeben.

Ist hingegen eine Ebene von D oder ein Strahl von D_1 gegeben, so findet man den entsprechenden Strahl oder Ebene, in-

dem man von zwei der Ebene angehörigen Strahlen oder von zwei durch den Strahl gehenden Ebenen die entsprechenden Elemente sucht u. s. w. Uebrigens genügt es im letzteren Falle auch, wenn man zu einem gegebenen Strahle $\mathfrak{G}''_1$, als Durchschnitt zweier Ebenen χ_1, χ'_1 angesehen, den entsprechenden Strahl g sucht, sodann für irgend eine Ebene τ_2, welche durch $\mathfrak{G}''_1$ geht, den entsprechenden Strahl t bestimmt und g mit t durch eine Ebene verbindet.

Die beiden Hyperboloide der ersten Konstruktion haben ausser den acht Punkten D, D_1, α, σ, β, γ, δ, ε noch unzählige andere Punkte gemein. Es sei n irgend ein Strahl von D, welcher durch einen dieser Punkte ν geht; so werden auch in den proj. Ebenenbüscheln A und A_1 (Taf.II. Fig 3. oder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ Taf.II. Fig. 4.) die entsprechenden Ebenen ν und ν_1, und in A' und A'_1 ($\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'_1$) die entsprechenden Ebenen ν' und ν'_1, und folglich auch die Gerade, in denen ν_1 und ν'_1 sich schneiden, und die Ebene ν_2 durch den Punkt ν gehen, d. h. der Punkt ν gehört, gleich den Punkten D, D_1, α, σ, β, γ, δ, ε, zu der gesuchten Fläche des zweiten Grades.

Denkt man sich nun sämmtliche Flächen dieses Grades F, F', F''..., welche durch die genannten acht Punkte gehen, so muss sich, weil, wie früher gezeigt, neun Punkte eine solche Fläche völlig bestimmen, eine jede derselben auf die hier mitgetheilte Weise konstruiren lassen, indem man sich noch irgend einen neunten Punkt derselben φ, φ', φ''... gibt. Hieraus folgt:

Alle Flächen des zweiten Grades, welche acht Punkte gemein haben, haben unzählige Punkte gemein, welche die Durchschnittslinie zweier einfacher Hyperboloide bilden.

Und:

Die Durchschnittslinie zweier Flächen des zweiten Grades ist durch acht ihrer Punkte völlig bestimmt.

Einer dieser Punkte ist offenbar auch B''_1 oder ($\mathfrak{s}_2$ $\mathfrak{a}'_2$) (Taf. II. Fig. 3.); denn der Strahl von D_1, welcher nach diesem Punkte geht, entspricht als Durchschnitt der Ebenen α_2 und σ_2 der Ebene $D\alpha\sigma$ von D, welche die entsprechenden Strahlen a und s verbindet. Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe:

Wenn von der Durchschnittslinie zweier Flächen des zweiten Grades acht Punkte gegeben sind, auf jeder Ebene, welche drei dieser Punkte verbindet, einen vierten Punkt jener Linie zu finden.

Geht dagegen eine Ebene nur durch zwei bekannte Punkte der in Rede stehenden Linie, so denke man sich dieselbe als eine der Ebenen β, γ..., z. B. β, des Ebenenbüschels A (oder A' in Taf. II. Fig. 3.), konstruire die entsprechende Ebene β_1 in A_1, welche die β in der Geraden $\mathfrak{L}$ schneide, denke sich in der Ebene β

beliebig viele Strahlen m, n, p... von D, welche der $\mathfrak{L}$ in den Punkten $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$... begegnen, und zu den Ebenen μ', ν', π'... des Ebenenbüschels A', welche durch jene Strahlen gehen, die entsprechenden μ_1', ν_1', π_1'... in A_1' gesucht, welche die Ebene β_1 in den Strahlen m_1, n_1, p_1... und die Gerade $\mathfrak{L}$ in den Punkten $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{p}_1$... schneiden mögen. Diess vorausgesetzt, so wird derjenige der Strahlen m_1, n_1, p_1... die Ebene β in einem neuen Punkte jener Durchschnittslinie treffen, welcher seinem entsprechenden Strahle m, n, p... begegnet, d. h. für welchen auf den zusammenliegenden proj. Geraden $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1$ zwei entsprechende Punkte, wie $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_1$, sich vereinigen. Solcher Punkte $(\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1)$, welche dann selbst die gesuchten Punkte der krummen Linie sind, gibt es entweder zwei der einen oder keinen, und sie werden auf die bekannte Weise mittels dreier Punktenpaare $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{p}_1$ und eines beliebigen festen Kreises in der Ebene β gefunden. Zu demselben Ergebniss und Verfahren übrigens würde man gelangen, wenn man sich die Aufgabe stellte: diejenigen zwei (eine oder keine) Geraden zu finden, welche in Einem zugleich der Geraden $\mathfrak{L}$ (des Hyp. $\mathfrak{p}$) und drei zu einerlei Schaar des Hyp. $\mathfrak{p}'$ gehörigen Geraden begegnen.

Liegen von den neun gegebenen Punkten einer Fläche des zweiten Grades viere in einerlei Ebene, so kann man diese letzteren wie die Punkte D, α, σ, B''_1 betrachten. Dann sind die Ebenen α_2, σ_2 unmittelbar gegeben, und die hierdurch bestimmten Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der Ebene $D\alpha\sigma$ sind bezüglich zwei Gerade der einfachen Hyperboloide $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$, welche die Geraden A' und A schneiden. Die Konstruktion dieser Hyperboloide wird also viel einfacher, indem sie sich auf die frühere Aufgabe 2 reducirt.

Sind in den reciproken Gebilden D, D_1 die entsprechenden Elementenpaare

$$a, s, b, c, d, e, f, g, m....$$

und

$$\alpha_2, \sigma_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2, \varphi_2, \chi_2, \mu_2....$$

ein für allemal bestimmt, so steht es allemal frei, festzusetzen, dass in der oben gegebenen Konstruktion die Strahlen a und s mit irgend zwei andern des Strahlbüschels D vertauscht werden, und gleichwol denselben Strahlen von D noch dieselben Ebenen von D_1 entsprechen sollen.

Denn bezeichnen jetzt in Taf. II. Fig. 3. a und s irgend zwei andere Strahlen von D, als durch welche oben die Konstruktion der Hyperboloide $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ sowie der Ebenen $\alpha_2, \sigma_2, \beta_2$... bewirkt wurde, und heissen auch jetzt α_2, σ_2 die denselben in D_1 entsprechenden Ebenen, welche die neue Ebene $D\alpha\sigma$ in den Geraden A_2 und A'_2 schneiden mögen, denkt man sich durch den Strahl a oder A und durch alle übrigen Strahlen s, b, c, d, f... von D die

Ebenen σ, β, γ, δ, φ..., und durch den Strahl s oder A' und durch die Strahlen a, b, c, d, f... die Ebenen α', β', γ', δ', φ'... gelegt, bezeichnet man endlich die Punkte, in welchen die Geraden A_2 und A'_2 von den jenen Strahlen entsprechenden Ebenen σ_2, α_2 β_2, γ_2, δ_2, φ_2... geschnitten werden, mit $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{f}_2$... und $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_2$, $\mathfrak{c}'_2$, $\mathfrak{d}'_2$, $\mathfrak{f}'_2$..., so ist, weil D, D_1 in Ansehung der Elementenpaare a, s, b, c, d, f.. und α_2, σ_2, β_2, γ_2, δ_2, φ_2... reciprok sind,

$$A(\sigma,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varphi\ldots) = A_2(\mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{f}_2\ldots)$$

und

$$A'(\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta',\ \varphi'\ldots) = A'_2(\mathfrak{a}'_2,\ \mathfrak{b}'_2,\ \mathfrak{c}'_2,\ \mathfrak{d}'_2,\ \mathfrak{f}'_2\ldots).$$

J[illegible] boloid p konstruirt, in wel- [illegible] Punkt D_1 und irgend drei- [illegible] hender Elementenpaare b, c, [illegible] li[illegible]n (na[illegible] abe 2), und es sei A_1 die du[illegible] D_1 gehende, mit A zu eine[illegible] Schaar gehörende Gerade von p, und B_1 der Punkt, in welchem dieselbe die Ebene $D\alpha\sigma$ (und die A_2') schneidet. Endlich seien σ_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1... die durch A_1 gehenden Ebenen, welche die Ebenen σ, β, γ, δ, φ... in Geraden schneiden, die im Hyperboloid p liegen, und s_1 (oder A_2'), b_1, c_1, d_1, f_1... die Durchschnittslinien dieser Ebenen σ_1, β_1... mit der Ebene $D\alpha\sigma$. Diess vorausgesetzt, so ist

$$A(\sigma,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varphi\ldots) = A_1(\sigma_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1,\ \varphi_1\ldots)$$
$$\equiv B_1(s_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ f_1\ldots),$$

aber auch

$$A(\sigma,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varphi\ldots) = A_2(\mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{f}_2\ldots),$$

also

$$B_1(s_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ f_1\ldots) = A_2(\mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{f}_2\ldots).$$

Denkt man sich also jetzt irgend einen der Punkte $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{d}_2'$, $\mathfrak{f}_2'$..., z. B. $\mathfrak{f}_2'$, mit den Punkten $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{f}_2$... durch Gerade verbunden, so entsteht um den Punkt $\mathfrak{f}_2'$ ein Strahlbüschel, welcher mit B_1 in Ansehung der gedachten Geraden und s_1, b_1, c_1, d_1, f_1... projektivisch und zwar perspectivisch ist, weil der gemeinschaftliche Strahl zwei entsprechende vereinigt. Es liegen also die Durchschnittspunkte $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{f}_3$ (φ_1)... der entsprechenden Strahlenpaare in einer geraden Linie f_1', welche die Gerade A_2 in einem Punkte B_1' schneiden wird.

Sofort sei $\mathfrak{f}_2$ der Mittelpunkt eines Strahlbüschels, dessen Strahlen nach den Punkten $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{c}_2'$, $\mathfrak{d}_2'$, $\mathfrak{f}_2'$... gehen und die Gerade f_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{b}_3'$, $\mathfrak{c}_3'$, $\mathfrak{d}_3'$, $\mathfrak{f}_3'$ (φ_1)... schneiden, und es sei B_1' mit diesen letzteren Punkten durch die Geraden a_1', b_1', c_1', d_1', f_1'... verbunden, so ist, wenn man sich noch die die Punkte D_1 und B_1' verbindende Gerade A_1' und die durch

A_1' und die Geraden a_1', b_1', c_1', d_1', f_1'... gehenden Ebenen α_1', β_1', γ_1', δ_1', φ_1'... denkt:

$$A_1'(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1', \varphi_1'...) \equiv B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1', f_1'...)$$

$$= A_2'(\mathfrak{a}_2', \mathfrak{b}_2', \mathfrak{c}_2', \mathfrak{d}_2', \mathfrak{f}_2'...) = A'(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varphi'...).$$

Hieraus folgt, dass

$$A_1'(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \delta_1', \varphi_1'...) = A'(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varphi'...),$$

also die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare sammt A' und A'_1 ein einfaches Hyperboloid $\mathfrak{p}'$ bilden u. s. w. u. s. w.

Denkt man sich also mittels dieser neuen zwei Hyperboloide $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ die den Strahlen von D entsprechenden Ebenen von D_1 konstruirt, so müssen dieselben mit den bereits gefundenen zusammenfallen, w. z. b. w.

Gleichwohl gibt es unzählige concentrische räumliche Strahlbüschel D_1, welche mit dem Strahlbüschel D reciprok sind und deren Systeme von Ebenen ihre entprechenden Strahlen a, s, b, c, d, e, f... in den nämlichen Punkten α, σ, β, γ, δ, ε, φ... schneiden.

Denn denken wir uns zur Konstruktion der Hyperboloide $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ die Geraden A, A' und die Punkte D_1, β, γ, δ in demselben Sinne wie oben gegeben, den Punkt ε jedoch mit φ oder irgend einem anderen Punkte der bereits konstruirten Fläche des zweiten Grades vertauscht, so werden an die Stelle der anfangs erhaltenen Hyperboloide jetzt nothwendig andere treten, wofern nur der neue Punkt nicht der Durchschnittslinie der anfänglichen Hyperboloide angehört. Dann werden also auch die Ebenen α_2 und σ_2, welche den Strahlen a und s entsprechen, andere werden, und ihre Durchschnittslinie die Ebene $Da\sigma$ in einem anderen Punkte B_1'' oder $(\mathfrak{s}_2\mathfrak{a}'_2)$ des Kegelschnittes, welchen diese Ebene mit der Fläche des zweiten Grades gemein hat, treffen.

Bezeichnet man nun die Ebenen α_2, σ_2, welche den verschiedenen Annahmen eines Punktes ε entsprechen, mit α, α_1, α_2, α_3... und σ, σ_1, σ_2, σ_3...., und die unveränderlichen Geraden $D_1\alpha$, $D_1\sigma$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$, so ist wegen des gedachten Kegelschnittes

$$\mathfrak{A}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3...) = \mathfrak{S}(\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3...).$$

Es werde jetzt der Strahl a mit irgend einem andern Strahle b von D vertauscht; so darf man festsetzen, dass die durch eine neue Konstruktion zu erhaltenden Ebenen α_2, σ_2, β_2 oder vielmehr

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3...; \quad \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3...; \quad \beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3...$$

mit den früheren identisch seien, und es wird auch jetzt wieder

$$\mathfrak{B}(\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots) = \mathfrak{S}(\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots)$$

sein, wenn $\mathfrak{B}$ die Gerade $D_1\beta$ bezeichnet. Und so überhaupt:

Sind im Raume irgend zwei reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1 gegeben, so gibt es unzählige, mit irgend einem von beiden concentrische, andere Strahlbüschel, welche mit dem anderen reciprok sind, und von denen allemal diejenigen Ebenen, die einerlei Strahle des anderen entsprechen, diesen Strahl in dems[illegible]en Punkte als die Ebenen des ursprünglichen S[illegible]hlbüschels schneiden; und zwar sind die versch[illegible]enen Ebenenbüschel, welche in den concentrisch[illegible]räumlichen Strahlbüscheln jedesmal von den, [illegible] räumlichen Strahlbü- [illegible]n gebildet werden, in [illegible]hlbüschel angehörigen [illegible]en.

Da aber die Fläche des zw[illegible] Grades, welche von den erstgedachten reciproken Strahlbüsc[illegible]erzeugt wird, in einem Punkte D_1 nur von Einer Ebene b[illegible]erden kann, so kann auch demjenigen Strahle von D, w[illegible]r [illegible]eiden Strahlbüscheln gemein ist, (p), auch nur einerlei Ebene [illegible] entsprechen d. h. sämmtliche Ebenen π, π_1, π_2, $\pi_3 \ldots$ fallen in [illegible]ne zusammen. Denken wir uns ferner, dass eine der Ebenen von D, welche durch den Strahl p gehen, wie es beim einfachen Hyperboloid und dem Kegel der Fall ist, durch den ihr in D_1 entsprechenden, in π_2 liegenden, Strahl gehe, und nun wieder denjenigen Strahl von D, welcher dieser Ebene, insofern sie zu D_1 gerechnet wird, entspricht und natürlich in dieser Ebene selber liegt, so wird auch diesem Strahle von D in D_1 und den damit concentrischen Strahlbüscheln nur eine einzige Ebene, nämlich die durch ihn selbst und durch p gehende, entsprechen können. Hieraus schliessen wir ferner:

Denkt man sich die unzähligen concentrischen räumlichen Strahlbüschel (D_1), welche mit einem und demselben anderen (D) reciprok sind, und deren einerlei Strahl entsprechende Ebenen diesen in einerlei Punkte schneiden, so gibt es in D allemal entweder drei oder zwei oder einen Strahl, welchen in den verschiedenen concentrischen Strahlbüscheln immer nur einerlei Ebene entspricht, jenachdem die durch jene Gebilde erzeugte Fläche ein einfaches Hyperboloid, oder ein Kegel des zweiten Grades oder eine vollkommen krumme Fläche ist; und zwar ist der eine dieser Strahlen allemal der den Strahlbüscheln gemeinschaftliche, während die beiden anderen oder der andere auf der betreffenden Berührungsebene liegen.

Die zuletzt erhaltenen Resultate, deren Entwickelung sich noch ziemlich eng an den Begriff der Fläche des zweiten Grades

ıschloss, werden sich auf eine freiere, von diesem Begriffe un-
ıhängigere Weise entwickeln lassen, sobald die geometrischen
erwandtschaften der höheren Art, welche von Steiner in
ziner „Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gest." —
ittels des einfachen Hyperboloids — und von dem Verf. im 7.
heile des Archivs zunächst nur für den Fall reeller Hauptpunkte,
auptlinien u. s. w. vorgetragen sind, eine umfassendere, auch
ıaginäre Hauptpunkte u. s. w. zulassende Darstellung ge-
nden haben. Diese Darstellung wird dann auch erst den rech-
n Einblick in den unerschöpflichen Reichthum der Steinerschen
eometrie verschaffen, welcher darin besteht, dass dieselbe Ver-
andtschaften der höheren Art immer durch Combination von Ge-
lden der vorhergehenden niederen erzeugt und so ins Unendli-
ıe von einfacheren zu verwickelteren Gebilden fortschreitet.

Unter andern wird dann auch dem Satze, welcher den Kegel-
:hnitt, so zu sagen, als den Durchschnitt projektivischer ebener
trahlbüschel hinstellt, der analogere zur Seite treten, wonach
wei räumliche Strahlbüschel, deren Mittelpunkte
ıf einer Fläche des zweiten Grades liegen, in An-
ɜhung der nach einerlei Punkte der Fläche gehenden
trahlenpaare geometrisch verwandt sind, und zwar
em gemeinschaftlichen Strahle beider Strahlbüschel,
ls Hauptstrahle, wechselsweise die Berührungsebene,
ls Hauptebene, entspricht.

VIII.

hagorischen zes.

dem

n Bernh. Möllmann

ück.

Es werden bei diesem Beweise folgende Sätze gebraucht:

1) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck den entsprechenden Stücken in dem anderen einzeln genommen gleich sind.

2) Ein Dreieck ist halb so gross als ein Parallelogramm, wenn beide gleiche Grundlinien und gleiche zugehörige Höhen haben.

3) Wird von zwei geraden Linien AB, CD (Taf. IV. Fig. 1.) die eine CD in beliebig viele Abschnitte CE, EF, FD getheilt: so ist das Rechteck aus den beiden Linien gleich den Rechtecken aus der ungetheilten Linie und jedem der gemachten Abschnitte.

4) Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich den Quadraten der beiden Linien nebst dem doppelten Rechtecke aus beiden Linien.

5) Das Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweier Linien ist gleich dem Unterschiede der Quadrate, welche die beiden Linien zu Seiten haben.

Beweis. Es sei AB (Taf. IV. Fig. 2.) die grössere und BC die kleinere Linie. Man beschreibe über AB das Quadrat

BHD, ziehe durch C eine Parallele CG mit AD, verlängere AD ıd CG um die der kleineren Linie BC gleichen Stücke DE, G und ziehe EF: so ist $ACFE$ das Rechteck aus der Summe ıd dem Unterschiede der beiden Linien. Macht man alsdann $J = AC$ und zieht durch J eine Parallele JK mit BC: so ist

$$CJKB = DEFG, \quad GJKH = BC^q.$$

un ist

$$ACFE = ABHD - BCJK - GJKH + DEFG$$
$$= ABHD - GJKH = AB^q - BC^q.$$

Es sei ABC (Taf. IV. Fig. 3.) ein bei B rechtwinkliges 'reieck. Halbirt man die Winkel BAC und ACB und fällt aus em Durchschnitt O der halbirenden Linien auf die Seiten des 'reiecks die Lothe DO, EO, FO: so ist (1)

$$\frac{\triangle AEO \cong \triangle ADO,}{\frac{EO = DO}{AE = AD,}} \qquad \frac{\triangle CEO \cong \triangle CFO}{\frac{EO = FO}{CE = CF;}}$$

olglich $DO = EO = FO$, $DBFO$ ein Quadrat und $AC = AD + CF$ der $AB + BC - AC = 2DB = 2BF = 2DO$, mithin das Rechteck us $AB + AC + BC$ und $AB + BC - AC$ gleich dem Rechtecke aus $AB + AC + BC$ und $2DO$. Nun ist aber das erstere Rechteck nach 5) gleich $(AB + BC)^q - AC^q$ und das letztere (nach 3) leich den drei Rechtecken aus AB und $2DO$, BC und $2FO$, AC und $2EO$ oder (nach 2) gleich dem vierfachen Dreieck ABC, nithin

$$(AB + BC)^q - AC^q = 4 \triangle ABC$$

der gleich dem doppelten Rechteck aus AB und BC. Nun ist erner (nach 4) $(AB + BC)^q$ gleich den Quadraten über AB und BC, nebst dem doppelten Rechtecke aus AB und BC, mithin

$$AB^q + BC^q - AC^q = 0,$$

$$AB^q + BC^q = AC^q, \text{ q. e. d.}$$

IX.

Zur Theilung des Dreiecks.

Von dem

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Die folgenden Aufgaben über die Theilung eines Dreiecks dürften nicht ohne Interesse sein, selbst in den Elementarunterricht in der Geometrie aufgenommen werden können. Sie mögen vom Einfachen zum Zusammengesetzten geordnet erscheinen.

(Die Figuren auf Taf. III. sind nach den Nummern der einzelnen Paragraphen im Folgenden geordnet, so dass z. B. Fig. 2. zu §. 2. gehört u. s. w.).

§. 1.

In dem Dreieck ABC ist

$$AD=\frac{m}{n}AC,\quad AE=\frac{r}{s}AB;$$

welcher Theil ist ADE vom ganzen Dreieck?

Man ziehe CE, so ist $AEC=\frac{r}{s}ABC$, und da $ADE=\frac{m}{n}AEC$, so ist

$$ADE=\frac{mr}{ns}ABC.$$

§. 2.

In dem Dreieck ABC ist

$$AD=\frac{m}{n}AC,\quad AE=\frac{r}{s}AB,\quad DF=\frac{u}{v}DE;$$

elches Verhältniss haben die drei Stücke ADE, DFC, $CFEB$ m ganzen Dreieck, dessen Fläche $=\Delta$ sei?

$$ADE=\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}\Delta \text{ (§. 1.)};$$

an ziehe nun CE, so ist $AEC=\frac{r}{s}\Delta$, also

$$DEC=\left(\frac{r}{s}-\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}\right)\Delta=\frac{(n-m)r}{ns}\Delta.$$

erner ist

$$DFC=\frac{u}{v}DEC=\frac{ur(n-m)}{vns}\Delta$$

ıd nun endlich

$$CFEB=\Delta-\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}-\frac{ur(n-m)}{vns}\right)\Delta=\frac{(vs-ur)(n-m)}{vns}\Delta.$$

emnach ist

$$ADE=\frac{mr}{ns}\Delta,\quad FDC=\frac{ur(n-m)}{vns}\Delta,\quad CFEB=\frac{(vs-ur)(n-m)}{vns}\Delta.$$

§. 3.

In dem Dreieck ABC ist

$$AD=\frac{m}{n}AC,\quad AE=\frac{r}{s}AB,\quad DF=\frac{u}{v}DE,\quad CG=\frac{a}{c}BC;$$

elches Verhältniss haben die drei Stücke zum Flächeninhalte Δ es ganzen Dreiecks?

Zunächst ist

$$ADE=\frac{mr}{ns}\Delta \text{ (§. 1.)}.$$

lan ziehe DG und BE, so ist

$$CDG=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{a}{c}\Delta,\quad BEG=\frac{c-a}{c}\cdot\frac{s-r}{s}\Delta,$$

lso

$$DEG=\Delta-\frac{mr}{ns}\Delta-\frac{n-m}{n}\cdot\frac{a}{c}\Delta-\frac{c-a}{c}\cdot\frac{s-r}{s}\Delta$$

$$=\frac{(mas-m\,r+nrc-nra)}{cs}\Delta.$$

Dessgleichen ist

$$DFG = \frac{u}{v}\, DGE = \frac{u(mas - mcr + nrc - nra)}{vncs}\,\Delta\,,$$

$$GFE = \frac{(v-u)(mas - mcr + nrc - nra)}{vncs}\,\Delta\,;$$

woraus nun

$$FDGC = FDG + DCG \text{ und } BEFG = BEG + FEG$$

leicht berechnet werden.

§. 4.

In dem Dreieck ABC ist

$$AD = \frac{m}{n}AC,\quad AE = \frac{r}{s}AB,\quad CF = \frac{a}{c}BC,\quad DG = \frac{u}{v}DF,$$

$$DH = \frac{x}{z}DE;$$

welches ist das Verhältniss der vier Theile zu Δ?

$$ACD = \frac{mr}{ns}\Delta,\quad CDF = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{a}{c}\Delta\,.$$

Man ziehe EF, so ist

$$BEF = \frac{s-r}{s}\cdot\frac{c-a}{c}\Delta\,,$$

also

$$DEF = \Delta - \frac{mr}{ns}\Delta - \frac{n-m}{n}\cdot\frac{a}{c}\Delta - \frac{s-r}{r}\cdot\frac{c-a}{c}\Delta\,,$$

woraus DEF gefunden wird. DGH ist sodann $\frac{u}{v}\cdot\frac{x}{z}DEF$, wodurch auch DGH gefunden ist. Endlich ist dann

$$FGHEB = \Delta - ADC - DCF - DGH,$$

so dass auch dieser Theil berechnet werden kann.

§. 5.

In dem Dreieck ABC ist

$$AD = \frac{m}{n}AC,\quad AE = \frac{r}{s}AB,\quad CF = \frac{a}{c}AC,\quad CG = \frac{b}{d}BC,$$

$$FH = \frac{e}{f} FG, \quad DJ = \frac{g}{h} DE;$$

ıan frägt nach dem Verhältnisse der Theile zum Ganzen.

Zunächst werden die Stücke ADE, CFG nach §. 1. gefunen. Zieht man sie vom Ganzen ab, so bleibt $DEBGF$ als beannt. Zieht man EG, so findet man eben so BEG; eben so lEF, wenn man EF zieht. Zieht man ADE von AEF ab, so at man DEF. Zieht man FJ, so ist $DFJ = \frac{g}{h} DEF$, also ist $)JF$ bekannt. Zieht man JG, so findet man $JGEB$ nach §. 3., lso, da EGB bekannt ist, hat man auch JGE. Zieht man nun $)JF$ und JGE von $DEGF$ ab, so bleibt FJG. Da aber $'JH = \frac{e}{f} FJG$, so sind endlich auch FJH und HJG bekannt. Iun ist

$$DJHF = JFH + DJF, \quad JHGBE = HJG + GJE + BEG,$$

ıo dass jetzt alle Stücke in ihrem Verhältniss zum Ganzen als ɔekannt angenommen werden können. Eine nähere Auseinandersetzung wird hier füglich unterbleiben können, da sie Nichts weiter enthielte, als die Bildung von Formeln, die keineswegs besondere Schwierigkeiten darbietet.

§. 6.

Seien bekannt die Verhältnisse von AE zu AB, AD zu AC, $'F$ zu AC, CJ zu BC, DH zu DE und man stellt dieselbe 'rage, wie früher.

Zunächst finden sich die Stücke ADE, CFG nach §. 1.; $'HEB$ nach §. 3. und sodann auch $DHJGF$ von selbst.

§. 7.

Seien bekannt die Verhältnisse von AD zu AC, CF zu AC, $'G$ zu BC, BL zu BC, FH zu FG, DJ zu DE, JK zu JH; ie Frage dieselbe wie oben.

Die Stücke ADE, CFG ergeben sich nach §. 1.; $DJHF$ ach §. 5.; eben so findet man $EJHGB$ nach §. 5. Dies letztere Stück ist aber durch KL wieder in zwei getheilt, die zu beechnen sind. Man ziehe LE, LJ, LH, so findet sich LEB ach §. 1., $LJEB$ nach §. 3., also, wenn man die letztern von inander abzieht, auch LJE. $DJLCD$ nach §. 6., also wenn ıan $DJHF$ und FGC abzieht, auch $JLGHJ$. Zieht man HB, o findet sich HBG nach §. 2., also, da das Verhältniss von GL ı GB bekannt ist, auch HLG. Zieht man das Letztere von

HGLJ ab, so bleibt *HLJ* als bekannt. Da man das Verhältniss von *HK* zu *HJ* kennt, so ergiebt sich daraus *HKL* und *HJL*. Nun ist

$$HGLK = HLG + HKL, \quad KLBEJ = KJL + JLE + ELB,$$

somit sind alle Stücke bekannt.

§. 8.

Man kennt die Verhältnisse von *AC* zu *AB*, *AD* zu *AC* *CF* zu *AC*, *DL* zu *DE*, *FH* zu *FG*, *JG* zu *FG*, *JK* zu *JL*

AED und *CFG* finden sich nach §. 1., *JGBEL* nach §. 5., und daraus auch *LDFJ*. Man ziehe *HL*, so findet sich *DLHF* nach §. 7., also jetzt auch *LHJ*. Da aber das Verhältniss von *JK* zu *JL* bekannt, so ergiebt sich *HKJ*, wodurch sämmtliche Stücke bekannt sind.

§. 9.

Es ist klar, dass man in ähnlicher Weise die Aufgabe immer verwickelter machen kann. Wir wollen jedoch hierin nicht fortfahren, da die Lösung Nichts weiter, als eine Wiederholung des Früheren ist; vielmehr wollen wir ein zusammengesetztes specielles Beispiel berechnen.

Sei

$$AB = \frac{1}{3}AF, \quad MF = \frac{1}{4}AF, \quad AC = \frac{1}{2}AD, \quad DE = \frac{2}{5}DF,$$

$$FJ = \frac{1}{5}DF, \quad CH = \frac{3}{4}CE, \quad CG = \frac{2}{3}CB,$$

$$HK = \frac{1}{2}HG, \quad JL = \frac{3}{5}JM,$$

und man ziehe die Hilfslinien:

$$FC,\ FG,\ FH,\ MG,\ MC,\ MK,\ MH,\ ME,$$
$$JB,\ JG,\ JK,\ JC,\ JH;$$

so erhält man:

$$ABC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\varDelta = \frac{1}{6}\varDelta.$$

$$CDE = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\varDelta = \frac{1}{5}\varDelta.$$

$$MJF=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\varDelta=\frac{1}{20}\varDelta.$$

$$BEF=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\varDelta=\frac{2}{5}\varDelta.$$

$$CBE=\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\right)\varDelta=\frac{7}{30}\varDelta.$$

$$CHG=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\,CBE=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{30}\varDelta=\frac{7}{60}\varDelta.$$

$$FCA=\frac{1}{2}\varDelta.$$

$$FBC=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\varDelta=\frac{1}{3}\varDelta.$$

$$FBG=\frac{1}{3}\,.\,FBC=\frac{1}{9}\varDelta.$$

$$FCE=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\varDelta=\frac{3}{10}\varDelta.$$

$$FEH=\frac{1}{4}\,FCE=\frac{3}{40}\varDelta.$$

$$GBM=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}\,BGF=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{9}\varDelta=\frac{5}{72}\varDelta.$$

$$HJE=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}\,FHE=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{40}\varDelta=\frac{1}{20}\varDelta.$$

$$BGHEJM=\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}-\frac{7}{60}\right)\varDelta=\frac{28}{60}\varDelta.$$

$$CDJ=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\varDelta=\frac{2}{5}\varDelta.$$

$$BJF=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\varDelta=\frac{2}{15}\varDelta.$$

$$CJB=\left(1-\frac{1}{6}-\frac{2}{5}-\frac{2}{15}\right)\varDelta=\frac{3}{10}\varDelta.$$

$$JGB = \frac{1}{3}\,CJB = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}\varDelta = \frac{1}{10}\varDelta.$$

$$JBM = JBF - JMF = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\right)\varDelta = \frac{1}{12}\varDelta.$$

$$HGJ = \left(\frac{28}{60} - \frac{1}{12} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right)\varDelta = \frac{14}{60}\varDelta.$$

$$HKJ = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{60}\varDelta = \frac{7}{60}\varDelta.$$

$$MCE = \left(1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{20} - \frac{1}{5}\right)\varDelta = \frac{11}{40}\varDelta.$$

$$MEH = \frac{1}{4}\cdot\frac{11}{40}\varDelta = \frac{11}{160}\varDelta.$$

$$MEJ = \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{20}\right)\varDelta = \frac{1}{10}\varDelta.$$

$$MGH = \left(\frac{28}{60} - \frac{1}{10} - \frac{11}{160} - \frac{5}{72}\right)\varDelta = \frac{329}{1440}\varDelta.$$

$$MGK = \frac{1}{2}\cdot\frac{329}{1440}\varDelta = \frac{329}{2880}\varDelta.$$

$$MKJ = \left(\frac{28}{60} - \frac{5}{72} - \frac{329}{2880} - \frac{7}{60} - \frac{1}{20}\right)\varDelta = \frac{335}{2880}\varDelta.$$

$$MKL = \frac{2}{5}\cdot\frac{335}{2880}\varDelta = \frac{67}{1440}\varDelta.$$

$$KLJ = \frac{3}{5}\cdot\frac{335}{2880}\varDelta = \frac{67}{960}\varDelta.$$

$$BMLKG = \left(\frac{5}{72} + \frac{329}{2880} + \frac{67}{1440}\right)\varDelta = \frac{663}{2880}\varDelta.$$

$$KLJEH = \left(\frac{67}{960} + \frac{7}{60} + \frac{1}{20}\right)\varDelta = \frac{681}{2880}\varDelta.$$

Demnach sind die sechs Stücke:

$$ABC = \frac{1}{6}\varDelta,\quad CGH = \frac{7}{60}\varDelta,\quad CDE = \frac{1}{5}\varDelta,$$

$$HEJLK = \frac{681}{2880}\varDelta,\quad KLMBG = \frac{663}{2880}\varDelta,\quad JMF = \frac{1}{20}\varDelta;$$

ıd wirklich ist auch

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{7}{60} + \frac{1}{5} + \frac{681}{2880} + \frac{663}{2880} + \frac{1}{20}\right)\varDelta = \varDelta.$$

10.

Eine weitere hieher gehörige Aufgabe wäre nun die umge- ːhrte, von der wir ein specielles Beispiel berechnen wollen, da ıran sich der allgemeine Gang erkennen lässt.

Der Punkt D liegt in AC so, dass $AD = \frac{2}{5}AC$. Man soll on D aus das Dreieck ABC in fünf Theile theilen, die sich ver- alten wie 2:3:5:6:8.

Die Theile sind also

$$\frac{2}{24}\varDelta,\quad \frac{3}{24}\varDelta,\quad \frac{5}{24}\varDelta,\quad \frac{6}{24}\varDelta,\quad \frac{8}{24}\varDelta.$$

lan wähle E so, dass

$$AE = \frac{\left(\frac{2}{24} + \frac{6}{24}\right)AB}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{6}AB,$$

ıd ziehe DE, so ist

$$ADE = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\varDelta = \frac{1}{3}\varDelta = \left(\frac{2}{24} + \frac{6}{24}\right)\varDelta.$$

immt man nun G so, dass $AG = \frac{1}{4}AE$, und zieht AG, so ist

$$ADG = \frac{1}{12}\varDelta = \frac{2}{24}\varDelta,\quad GDE = \frac{6}{24}\varDelta.$$

lan nehme nun H so, dass

$$CH = \frac{\left(\frac{3}{24} + \frac{8}{24}\right) BC}{\frac{3}{5}} = \frac{55}{72} BC$$

und ziehe DH, so ist

$$CDH = \frac{55}{72} \cdot \frac{3}{5} \varDelta = \frac{11}{24} \varDelta = \left(\frac{3}{24} + \frac{8}{24}\right) \varDelta.$$

Zieht man nun DJ so, dass $CJ = \frac{3}{11} CH$, so ist $DCJ = \frac{3}{24} \varDelta$, $DJH = \frac{8}{24} \varDelta$ und mithin noch $DEBH = \frac{5}{24} \varDelta$. Demnach is

$$ADG : DCJ : DEBH : GDE : DJH = 2 : 3 : 5 : 6 : 8.$$

Eine weitere Verfolgung dieses Gegenstandes erschein unnöthig, da die Art der Auflösung ähnlicher Aufgaben aus Gesagten deutlich erhellt.

X.

Die drei Grundgleichungen der körperlichen oder sphärischen Trigonometrie.

Von dem
Herrn Professor Franke
zu Hannover

Bei Lesung des Aufsatzes Theil XVI. Seite 194.:

„Neue einfache und leichte Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie"

vom Herrn Herausgeber des Archivs wurde ich an die Behandlung des körperlichen oder sphärischen Dreieckes erinnert, welche in meinem „Lehrbuch der descriptiven Geometrie". Erstes Heft, Seite 47. ff. sich vorfindet. Diese Behandlung ist aus der Ueberzeugung hervorgegangen, dass der Anfänger zur klaren Einsicht in die Natur körperlicher Gebilde dann gelangt, wenn ihm die analytische Entwicklung Schritt für Schritt neben der graphischen Darstellung vorgeführt wird. An dem eben bemerkten Orte sind die allgemeinen Eigenschaften der Dreiecke, sowie die sechs Constructionen derselben aus irgend drei Stücken mit Hülfe einer einzigen Figur entwickelt worden, während gewöhnlich die Construction des Dreieckes aus drei Kantenwinkeln eine andere Behandlung verlangt, als die aus zwei Kantenwinkeln und dem eingeschlossenen Flächenwinkel, und diese wieder eine andere Behandlung beansprucht, als die Construction aus zwei Kantenwinkeln und einem gegenüber liegenden Flächenwinkel, und während gewöhnlich die Construction des Dreieckes in den drei übrigen Fällen auf die Eigenschaft des Supplementar-Dreieckes verweisen muss. Aus derselben einzigen Figur erlangt man aber auch die

drei Grundgleichungen der körperlichen oder sphärischen Trigonometrie, wie folgende Betrachtungen bestätigen.

Wird das körperliche Dreieck $SMCN$ (Taf. IV. Fig. 4.) von einer Ebene MCN winkelrecht zur Kante SC, welche den Ebenen der Winkel $MSC=\alpha$ und $NSC=\beta$ gemeinschaftlich ist, geschnitten: so wird der Winkel $MCN=C$ der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen, oder der Gegenwinkel von γ sein, den die Kanten MS und NS bei S einschliessen. Führt man nun durch C zwei Ebenen, die eine zu MS, die andere zu NS winkelrecht, so erhält man die Winkel B und A, welche von den Ebenen der Winkel α und γ, sowie β und γ eingeschlossen werden. Die Ebene LBC, welche winkelrecht zur Kante MS steht, und die Ebene MCN aber sind zur α Ebene MSC winkelrecht, daher wird LC, der Durchschnitt beider, zu dieser α-Ebene, folglich zu CS, CB und CM winkelrecht liegen. Dieser Durchschnitt LC begegnet in L dem Durchschnitte MN der γ-Ebene MSN und der C-Ebene MCN, so dass Länge und Lage der LC bestimmt ist. Auch ist der Durchschnitt CB in der α-Ebene MSC bestimmt, weil er durch C geht und zur MS winkelrecht liegt. Hierdurch ist die Länge und Lage der BL gegeben, da BL die MN und MS in den bekannten Punkten L und B schneidet und zur MS winkelrecht liegt. Es lässt sich daher aus der B-Ebene CBL der Winkel $CBL=B$ leicht ermitteln.

Auf gleiche Weise erhält man aus der A-Ebene CAK den Winkel $CAK=A$, da diese Ebene und die C-Ebene MCN winkelrecht zur β-Ebene CSN stehen, folglich CK, der Durchschnitt derselben, der β-Ebene, und somit den Geraden CS, CA und CN im rechten Winkel begegnet, und da CK die MN in einem Punkte K schneidet, durch welchen die Hypotenuse AK des bei C rechtwinklichen Dreieckes und damit die Grösse des Winkels $CAK=A$ bestimmt ist.

Die B-Ebene und A-Ebene begegnen sich in der Geraden CF, welche die γ-Ebene winkelrecht schneidet, weil diese Ebenen derselben γ-Ebene unter dem rechten Winkel begegnen. Es ist daher CF eine Gerade, welche, in beiden Dreiecken CBL und CAK von dem rechten Winkel aus angelegt, die Hypotenusen BL und AK winkelrecht schneidet.

Eine Aenderung der Lage erleiden die Hülfslinien, wenn einer der Kantenwinkel α, β, oder einer der Flächenwinkel A, B ein rechter oder ein stumpfer ist, oder wenn beide es sind. Diese Aenderung ist an dem oben bezeichneten Orte näher erörtert.

Die eben erwähnte Betrachtungsweise der Figur ist es, aus welcher die Eigenschaften, die Constructionen und Grundgleichungen des körperlichen Dreieckes mit gleicher Leichtigkeit abgeleitet werden können. Was die Grundgleichungen

$$\sin\alpha\sin B=\sin\beta\sin A,$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos\gamma$$

anlangt, so erhält man, zur Herstellung der ersten, aus den bei F rechtwinklichen Dreiecken BFC und AFC für die CF:

$$CF = BC.\sin CBF, \quad CF = AC.\sin CAF,$$

daher

$$BC.\sin B = AC.\sin A.$$

Weil aber

$$BC = SC.\sin\alpha \text{ und } AC = SC.\sin\beta$$

ist, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{I.} \qquad \sin\alpha \sin B = \sin\beta \sin A.$$

Die Dreiecke MSN und MCN geben für die gemeinsame MN die Werthe

$$\overline{MN}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{NS}^2 - 2MS.NS.\cos\gamma$$
$$= \overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 - 2MC.NC.\cos C,$$

oder

$$2MS.NS.\cos\gamma = \overline{MS}^2 - \overline{MC}^2 + \overline{NS}^2 - \overline{NC}^2 + 2MC.NC.\cos C,$$

oder wenn die Linien MS und MC, NS und NC in den Winkeln α und β und in der SC ausgedrückt werden,

$$2\overline{SC}^2.\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma = \overline{SC}^2.(\sec^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha + \sec^2\beta - \mathrm{tg}^2\beta + 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\cos C),$$

das ist

$$2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma = 2 + 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\cos C,$$

und wenn man mit $\frac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta$ multiplicirt:

$$\text{II.} \qquad \cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

In dieser Gleichung II. erscheint die Projection C des Winkels γ durch den Winkel γ selbst und durch die Winkel α und β ausgedrückt, welche die Schenkel MS und NS von γ mit der zur Ebene MCN winkelrechten Geraden CS einschliessen.

An der Spitze C bilden die drei Geraden KC, FC und LC auch ein körperliches Dreieck, dessen Ebenen KCF und LCF zur Ebene KFL winkelrecht liegen. Es ist daher der Winkel KFL die Projection des Winkels KCL, und deshalb wird nach Gleichung II. statt finden:

1. $\cos KCL = \cos KCF . \cos LCF + \sin KCF . \sin LCF . \cos KFL$.

Aber KC ist der Durchschnitt der Ebenen MCN und ACK, welche zur α-Ebene winkelrecht liegen, und daher ist KC zu NC winkelrecht. Aus demselben Grunde ist LC zu MC winkelrecht. Man hat sonach für den Winkel KCL die Beziehung

$$KCL = R - MCK = R - NCL,$$

das ist

$$MCK = NCL,$$

und wenn MC nach M_1 verlängert wird,

$$MCL = M_1 CL,$$

folglich

$$KCL = NCM_1 = 2R - MCN,$$

oder

$$KCL = 2R - C.$$

Ferner ist in dem bei C rechtwinklichen Dreiecke KCA der Winkel $KCF = A$, und im Dreiecke LCB der Winkel $LCF = B$. Endlich hat man für den Winkel KFL die Beziehung

$$KFL = BFA = 2R - \gamma.$$

Werden nun die eben gefundenen Werthe der Winkel KCL, KCF LCF und KFL in die Gleichung 1. eingeführt, so entsteht

$$\cos(2R - C) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos(2R - \gamma)$$

oder

$$\text{III.} \quad \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos\gamma.$$

XI.

:ber die Quadratur elliptischer Sectoren.

Von

dem Herausgeber.

ın auch das Integral

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$$

n bekannt ist, so will ich dasselbe doch, weil man es ich aus einer allgemeineren Recursionsformel abzuleiten nter der Voraussetzung, dass $a^2 > b^2$ ist, hier nach einer ren Methode entwickeln.

anntlich ist

$$\sin\varphi = \frac{2\tang\frac{1}{2}\varphi}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi^2},\quad \cos\varphi = \frac{1-\tang\frac{1}{2}\varphi^2}{1+\tang\frac{1}{2}\varphi^2};$$

nn wir

$$x = \tang\frac{1}{2}\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{2x}{1+x^2},\quad \cos\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Differentiirt man die erste dieser beiden Gleichungen, so er man

$$\cos\varphi\partial\varphi=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\partial x=2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\partial x,$$

folglich vermöge der zweiten der beiden obigen Gleichungen:

$$\partial\varphi=2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{1+x^2}{1-x^2}\partial x=\frac{2\partial x}{1+x^2}.$$

Ferner ist

$$a+b\cos\varphi=\frac{a+b+(a-b)x^2}{1+x^2},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}=\frac{2(1+x^2)\partial x}{\{a+b+(a-b)x^2\}^2},$$

wodurch das Differential auf der linken Seite des Gleichheitsz chens rational gemacht ist.

Aus der vorstehenden Gleichung erhält man durch Integ tion:

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}=\frac{2}{(a+b)^2}\int\frac{(1+x^2)\partial x}{\{1+\frac{a-b}{a+b}x^2\}^2},$$

und da nun unter der Voraussetzung $a^2>b^2$ offenbar

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$$

positiv, also $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ reell ist, so kann man

$$x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=u,\quad x=u\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

setzen, welches

$$\frac{(1+x^2)\partial x}{\{1+\frac{a-b}{a+b}x^2\}^2}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\frac{(1+\frac{a+b}{a-b}u^2)\partial u}{(1+u^2)^2},$$

also

$$\int\frac{(1+x^2)\partial x}{\left\{1+\frac{a-b}{a+b}x^2\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\left\{\int\frac{\partial u}{(1+u^2)^2}+\frac{a+b}{a-b}\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\left\{\int\frac{(1+u^2-u^2)\partial u}{(1+u^2)^2}+\frac{a+b}{a-b}\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\left\{\int\frac{\partial u}{1+u^2}+\frac{2b}{a-b}\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\left\{\mathrm{Arctang}\,u+\frac{2b}{a-b}\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}\right\}$$

giebt, wo es nun bloss noch auf die Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}$$

ankommt.

Es ist aber nach einer allgemein bekannten Formel

$$\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}=u\int\frac{u\partial u}{(1+u^2)^2}-\int\partial u\int\frac{u\partial u}{(1+u^2)^2}.$$

Setzt man nun

$$u^2=v\text{, also } u\partial u=\frac{1}{2}\partial v;$$

so ist

$$\int\frac{u\partial u}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\partial v}{(1+v)^2},$$

und wenn man

$$1+v=w\text{, also } \partial v=\partial w$$

setzt:

$$\int\frac{\partial v}{(1+v)^2}=\int\frac{\partial w}{w^2}=\int w^{-2}\partial w=-\frac{1}{w}=-\frac{1}{1+v},$$

also

$$\int\frac{u\partial u}{(1+u^2)^2}=-\frac{1}{2(1+v)}=-\frac{1}{2(1+u^2)}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$\int\frac{u^2\partial u}{(1+u^2)^2}=-\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\partial u}{1+u^2}$$

$$=-\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\text{ Arctang}\,u,$$

und daher

$$\int\frac{(1+x^2)\partial x}{\{1+\frac{a-b}{a+b}x^2\}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\left\{\text{Arctang}\,u+\frac{b}{a-b}\text{Arctang}\,u-\frac{bu}{(a-b)(1+u^2)}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\left\{-\frac{bu}{(a-b)(1+u^2)}+\frac{a}{a-b}\text{Arctang}\,u\right\}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\text{Arctang}\,u=\text{Arctang}\left(\text{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

und

$$\frac{bu}{(a-b)(1+u^2)}=\frac{b\,\text{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{(a-b)\{1+\frac{a-b}{a+b}\text{tang}\frac{1}{2}\varphi^2\}}$$

$$=\frac{b\sin\varphi\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{2(a-b)\{\cos\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{a-b}{a+b}\sin\frac{1}{2}\varphi^2\}}$$

$$=\frac{b}{2}\cdot\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{\sin\varphi}{(a+b)\cos\frac{1}{2}\varphi^2+(a-b)\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$$

$$=\frac{b}{2}\cdot\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{\sin\varphi}{a+b\cos\varphi},$$

also

$$\int\frac{(1+x^2)\partial x}{\left\{1+\frac{a-b}{a+b}x^2\right\}^2}$$

$$=-\frac{b}{2}\cdot\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}+\frac{a}{a-b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\text{Arctang}\left(\text{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right).$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$1)\qquad\int\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$$

$$=-\frac{b}{a^2-b^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}$$

$$+\frac{2a}{(a+b)(a^2-b^2)}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\text{Arctang}\left(\text{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right).$$

Wenn $a+b$ positiv ist, kann man auch setzen:

$$2)\qquad\int\frac{\partial\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$$

$$=-\frac{b}{a^2-b^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}$$

$$+\frac{2a}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arctang}\left(\text{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right).$$

Hiervon wollen wir nun die folgende Anwendung auf die Qua-
atur elliptischer Sectoren machen.

Die allgemeine Polargleichung der Ellipse ist bekanntlich*)

$$r=\frac{1}{A+B\cos\varphi},$$

o A und B positiv sind, und

$$A>B$$

t. Der Winkel φ wird von der geraden Linie an, welche von
m als Pol angenommenen Brennpunkte aus nach dem diesem
rennpunkte zunächst liegenden Scheitel der Ellipse hin gerichtet
t, nach einer gewissen Richtung hin von 0 bis 360° gezählt.

Bezeichnet nun S den Flächeninhalt des dem Winkel φ und
m Vector r entsprechenden Sectors der Ellipse, so ist bekanntlich

$$S=\frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\partial\varphi,$$

*) M. s. den Aufsatz Nr. II. in diesem Theile.

also nach dem Vorhergehenden

$$S=\frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(A+B\cos\varphi)^2}.$$

Weil nun nach dem Obigen im vorliegenden Falle, wo $A^2>$ und $A+B$ positiv ist,

$$\int\frac{\partial\varphi}{(A+B\cos\varphi)^2}$$

$$=-\frac{B}{A^2-B^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{A+B\cos\varphi}$$

$$+\frac{2A}{(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}}\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

ist, so ist, wenn jetzt

$$\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, dessen Tangente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}$$

ist:

$$3)\quad S=-\frac{B}{2(A^2-B^2)}\cdot\frac{\sin\varphi}{A+B\cos\varphi}$$

$$+\frac{A}{(A^2-B^2)^2\sqrt{A^2-B^2}}\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

Dass man in dieser Formel für

$$\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

immer, wie vorher bestimmt worden ist, den kleinsten positi Bogen setzen muss, dessen Tangente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}$$

ist, wird aus der Natur der bestimmten Integrale auf der Stelle erhellen, und bedarf hier einer weiteren Erläuterung nicht.

Es ist aber nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\operatorname{tang} 2 \operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

$$=\frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}}{1-\frac{A-B}{A+B} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^{2}}=\frac{\sin \varphi \sqrt{A^{2}-B^{2}}}{(A+B) \cos \frac{1}{2} \varphi^{2}-(A-B) \sin \frac{1}{2} \varphi^{2}}$$

$$=\frac{\sin \varphi \sqrt{A^{2}-B^{2}}}{B+A \cos \varphi},$$

also

$$\left\{\sin 2 \operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)\right\}^{2}$$

$$=\frac{(A^{2}-B^{2}) \sin \varphi^{2}}{(A^{2}-B^{2}) \sin \varphi^{2}+(B+A \cos \varphi)^{2}}=\left\{\frac{\sin \varphi \sqrt{A^{2}-B^{2}}}{A+B \cos \varphi}\right\}^{2}.$$

Weil A, B positiv sind und $A>B$ ist, so ist $A+B\cos\varphi$ stets positiv. Wenn

$$0<\varphi<180^{0}$$

ist, so ist offenbar

$$0<\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)<\frac{1}{2} \pi,$$

also

$$0<2 \operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)<\pi,$$

folglich

$$\sin 2 \operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

eben so wie $\sin\varphi$ positiv; wenn dagegen

$$180^{0}<\varphi<360^{0}$$

ist, so ist offenbar

$$\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right) < \pi,$$

also

$$\pi < 2\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right) < 2\pi,$$

folglich

$$\sin 2\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

eben so wie $\sin\varphi$ negativ. Weil also $A+B\cos\varphi$ positiv ist, u

$$\sin 2\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right)$$

mit $\sin\varphi$ stets gleiches Vorzeichen hat, so ist nach dem Obig offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\sin 2\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right) = \frac{\sin\varphi\sqrt{A^2-B^2}}{A+B\cos\varphi},$$

also, wenn man dies mit der Formel

$$\operatorname{tang}2\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right) = \frac{\sin\varphi\sqrt{A^2-B^2}}{B+A\cos\varphi}.$$

verbindet, ebenfalls in völliger Allgemeinheit:

$$\cos 2\operatorname{Arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi.\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\right) = \frac{B+A\cos\varphi}{A+B\cos\varphi}.$$

Weil

$$r = \frac{1}{A+B\cos\varphi}$$

ist, so ist

$$\cos\varphi = \frac{1 - Ar}{Br},$$

so

$$A + B\cos\varphi = \frac{1}{r},$$

$$B + A\cos\varphi = \frac{A - (A^2 - B^2)r}{Br};$$

lglich

$$\frac{B + A\cos\varphi}{A + B\cos\varphi} = \frac{A - (A^2 - B^2)r}{B}.$$

Ferner ist

$$\tan\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{(A+B)r - 1}{1 - (A-B)r},$$

nd folglich

$$\tan\tfrac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\frac{(A+B)r - 1}{1 - (A-B)r}},$$

idem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^0 \text{ oder } 180^0 < \varphi < 360^0$$

t. Also ist mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens:

$$\tan\tfrac{1}{2}\varphi . \sqrt{\frac{A-B}{A+B}} = \pm\sqrt{\frac{A-B}{A+B} \cdot \frac{(A+B)r - 1}{1 - (A-B)r}}.$$

Setzt man nun, indem man immer Ω zwischen 0 und π, und is obere oder untere Vorzeichen nimmt, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^0 \text{ oder } 180^0 < \varphi < 360^0$$

:

$$4) \qquad \Omega = \operatorname{Arctang}\left\{\pm\sqrt{\frac{A-B}{A+B} \cdot \frac{(A+B)r - 1}{1 - (A-B)r}}\right\},$$

ist nach dem Obigen

$$\sin 2\Omega = \frac{\sin\varphi\sqrt{A^2 - B^2}}{A + B\cos\varphi},$$

o

$$\frac{\sin\varphi}{A + B\cos\varphi} = \frac{\sin 2\Omega}{\sqrt{A^2 - B^2}},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$5)\quad S=\frac{A\Omega-\frac{1}{2}B\sin 2\Omega}{(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}}=\frac{A\Omega-B\sin\Omega\cos\Omega}{(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}}$$

oder

$$6)\quad S=\frac{A\Omega-\frac{1}{2}B\sin 2\Omega}{\{(A-B)(A+B)\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{A\Omega-B\sin\Omega\cos\Omega}{\{(A-B)(A+B)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Auch ist nach dem Obigen

$$\cos 2\Omega=\frac{A-(A^2-B^2)r}{B}.$$

Weil für

$$\varepsilon=\frac{b}{a}$$

bekanntlich*)

$$A=\frac{2}{p},\quad B=\frac{2}{p}\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

ist, so ist

$$A^2-B^2=\frac{4\varepsilon^2}{p^2}=\frac{2}{p}\cdot\frac{2\varepsilon^2}{p}=\frac{2}{p}\cdot\frac{a}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{a},$$

also

$$\cos 2\Omega=\frac{1-\frac{r}{a}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Ist nun

$$\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

positiv, so ist entweder

$$0<2\Omega<\frac{1}{2}\pi \quad\text{oder}\quad \frac{3}{2}\pi<2\Omega<2\pi,$$

d. i. entweder

---

*) M. s. den Aufsatz Nr. II. in diesem Theile.

$$0<\Omega<\frac{1}{4}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4}\pi<\Omega<\pi.$$

enachdem nun

$$0<\varphi<180^0 \quad \text{oder} \quad 180^0<\varphi<360^0$$

st, ist nach dem Obigen

$$0<\Omega<\frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\pi<\Omega<\pi.$$

Wenn also

$$\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

positiv ist, so muss man

$$0<2\Omega<\frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2}\pi<2\Omega<2\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0<\varphi<180^0 \quad \text{oder} \quad 180^0<\varphi<360^0$$

ist.

Wenn ferner

$$\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

negativ ist, so ist entweder

$$\frac{1}{2}\pi<2\Omega<\pi \quad \text{oder} \quad \pi<2\Omega<\frac{3}{2}\pi,$$

d. i. entweder

$$\frac{1}{4}\pi<\Omega<\frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\pi<\Omega<\frac{3}{4}\pi.$$

enachdem nun

$$0<\varphi<180^0 \quad \text{oder} \quad 180^0<\varphi<360^0$$

t, ist nach dem Obigen

$$0<\Omega<\frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\pi<\Omega<\pi.$$

Wenn also

$$\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

negativ ist, so muss man

$$\frac{1}{2}\pi < 2\Omega < \pi \text{ oder } \pi < 2\Omega < \frac{3}{2}\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^0 \text{ oder } 180^0 < \varphi < 360^0$$

ist.

Bei Beachtung dieser Regeln lässt die Formel

$$\cos 2\Omega = \frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

keine Zweideutigkeit zu, wie man 2Ω zu nehmen hat, wenn man 2Ω mittelst derselben bestimmt.

Setzt man nun

$$2\Omega = \text{Arccos}\,\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \text{Arccos}\,\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

also

$$7) \qquad \Omega = \frac{1}{2}\,\text{Arccos}\,\frac{a-r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1}{2}\,\text{Arccos}\,\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}};$$

so lassen die vorhergehenden Regeln nie einen Zweifel, wie

$$\text{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \text{Arccos}\,\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

genommen werden muss. Wenn nämlich

$$\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

positiv ist, so muss man

$$0 < \text{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}} < \frac{1}{2}\pi \text{ oder } \frac{3}{2}\pi < \text{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}} < 2\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^0 \text{ oder } 180^0 < \varphi < 360^0$$

ist. Wenn dagegen

$$\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

egativ ist, so muss man

$$\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}} < \pi \text{ oder } \pi < \operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}} < \frac{3}{2}\pi$$

ehmen, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^0 \text{ oder } 180^0 < \varphi < 360^0$$

t.

Dies vorausgesetzt, ist nun nach dem Obigen

$$S = \frac{A \operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - B \sin \operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{2(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}}$$

ler

$$S = \frac{A \operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}} - B \sin \operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}}{2(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}}.$$

Aber

$$\frac{A}{(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}} = \frac{\frac{2}{p}}{\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = ab,$$

$$\frac{B}{(A^2-B^2)\sqrt{A^2-B^2}} = \frac{\frac{2}{p}\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{a}}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = ab\sqrt{1-\varepsilon^2};$$

lso

$$) \quad S = \frac{1}{2}ab\{\operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \sin\operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2}\},$$

der

$$) \quad S = \frac{1}{2}ab\{\operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}} - \sin\operatorname{Arc}\cos\frac{a-r}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\},$$

der auch, wenn wir

$$e = \sqrt{a^2-b^2}$$

etzen:

$$10)\quad S=\frac{1}{2}ab\left\{\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e}-\frac{e}{a}\sin\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e}\right\}^{*)}.$$

Wenn A, B gegeben sind, scheinen die beiden Formeln

$$\Omega=\text{Arc}\tang\left\{\pm\sqrt{\frac{A-B}{A+B}\cdot\frac{(A+B)r-1}{1-(A-B)r}}\right\},$$

$$S=\frac{A\Omega-\frac{1}{2}B\sin 2\Omega}{\sqrt{\{(A-B)(A+B)\}^3}}$$

oder

---

*) Man könnte sic[illegible] abe stellen, r zu finden, wenn S gegeben ist, was gew[illegible] mit dem Kepler'schen Probleme zusammenhängt, aber immer nur d[illegible] Näherung bewerkstelligt werden kann, weil die obige Gleichung transcendent ist. Ist aber $\frac{e}{a}$ ein sehr kleiner Bruch, so ist da[illegible] rccos $\frac{a-r}{e}$ immer sehr klein, und wenn man nun die o[illegible] ter der Form

$$\frac{2S}{ab}=\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e}-\frac{e}{a}\sin\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e}$$

schreibt, so sieht man, dass unter der gemachten Voraussetzung näherungsweise

$$\frac{2S}{ab}=\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e},$$

also näherungsweise

$$\frac{a-r}{e}=\cos\left(\frac{2S}{ab}\right),$$

folglich

$$r=a-e\cos\left(\frac{2S}{ab}\right)$$

ist. Hat man aber auf diese Weise einen ersten Näherungswerth gefunden, so wird es immer auch leicht sein, r so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{2S}{ab}=\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e}-\frac{e}{a}\sin\text{Arc}\cos\frac{a-r}{e}$$

genau erfüllt wird, was hier keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Der Bogen $\frac{2S}{ab}$ ist hier natürlich in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers ausgedrückt. Will man diesen Bogen, von welchem der Cosinus zu nehmen ist, gleich in Secunden ausgedrückt haben, so muss man den obigen Ausdruck von r auf folgende Art schreiben:

$$r=a-e\cos\left(\frac{2S}{ab\sin 1''}\right)$$

$$11)\quad \Omega = \text{Arctang}\left\{\pm\sqrt{\frac{r-\frac{1}{A+B}}{\frac{1}{A-B}-r}}\right\},$$

$$S = \frac{A\Omega - \frac{1}{2}B\sin 2\Omega}{\{(A-B)(A+B)\}^{\frac{3}{2}}}$$

immer die bequemsten zu sein. Man hat in diesen Formeln Ω stets zwischen 0 und π, und jenachdem

$$0 < \varphi < 180^0 \text{ oder } 180^0 < \varphi < 360^0$$

ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen.

Setzt man

$$12)\quad \begin{cases} M = (A+B)^{-1} = \frac{1}{A+B}, \\ N = (A-B)^{-1} = \frac{1}{A-B}; \end{cases}$$

so werden die obigen Formeln:

$$13)\quad \begin{cases} \Omega = \text{Arc tang}\left\{\pm\sqrt{\frac{r-M}{N-r}}\right\}, \\ S = (MN)^{\frac{3}{2}}\left\{A\Omega - \frac{1}{2}B\sin 2\Omega\right\}. \end{cases}$$

Auch ist

$$14)\quad S = \frac{A\Omega}{\{(A-B)(A+B)\}^{\frac{3}{2}}}\left\{1 - \frac{B}{A}\cdot\frac{\sin 2\Omega}{2\Omega}\right\}.$$

Berechnet man nun den Hülfswinkel u mittelst der Formel

$$15)\quad \cos u = \frac{B}{A}\cdot\frac{\sin 2\Omega}{2\Omega},$$

was immer möglich ist, so ist

$$16)\quad S = \frac{2A\Omega\sin\frac{1}{2}u^2}{\{(A-B)\ (A+B)\}^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$17)\qquad S=2A\Omega(MN)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}u^2;$$

und stellt man daher die zur Berechnung von S erforderlic Formeln für den Fall, wo die Grössen A, B unmittelbar als geben angesehen werden, wie dies immer der Fall ist, w man die Polargleichung der Ellipse benutzt, aus dem Obige der Kürze zusammen, so erhält man:

$$18)\quad\left\{\begin{array}{l} M=\dfrac{1}{A+B},\quad N=\dfrac{1}{A-B};\\[2mm] \Omega=\operatorname{Arc\,tang}\left\{\pm\sqrt{\dfrac{r-M}{N-r}}\right\},\\[2mm] \cos u=\dfrac{B}{A}\cdot\dfrac{\sin 2\Omega}{2\Omega},\\[2mm] S=2A\Omega(MN)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}u^2. \end{array}\right.$$

In diesen Formeln wird Ω immer zwischen 0 und π, und, nachdem $0<\varphi<180^0$ oder $180^0<\varphi<360^0$ ist, das obere c untere Zeichen genommen.

Vielleicht werde ich späterhin noch auf diesen Gegenst zurückkommen, in Bezug auf die Ausdehnung des Lambert'sc Satzes von der Parabel *) auf die Ellipse.

*) M. s. Theil XVI. Nr. XXXIX.

XII.

Ueber Asymptoten, Krümmungs-Verhältnisse und Singularitäten bei Flächen des zweiten und dritten Grades.

Von dem

Herrn Dr. Beer,
Privat-Docenten an der Universität zu Bonn.

I.

Flächen des zweiten Grades.

1) Wenn wir die allgemeine ganze Function des $n$ten Grades mit drei Veränderlichen durch F_n, sowie die allgemeine ganze und homogene Function desselben Grades und mit denselben Veränderlichen durch K_n bezeichnen, so erhalten wir für die allgemeine Gleichung der Flächen des zweiten Grades die folgende:

$$\text{I.} \quad F_2 \equiv K_2 + \mu F_1 = 0.$$

In dieser Gleichung treten unmittelbar zwei Flächen in Evidenz, nämlich diejenigen, deren Gleichungen

$$K_2 = 0 \text{ und } F_1 = 0$$

sind. Jene gehört einer Kegelfläche des zweiten Grades an, deren Singularität den Anfangspunkt der Coordinaten aufnimmt. Die zweite Gleichung stellt eine Ebene dar. Die Beziehungen zwischen den beiden so eben erwähnten Oertern und der Fläche F_2 ist nun folgende. Legen wir durch einen Punkt P der Fläche F_2 eine gerade Linie nach beliebig angenommener, aber fixirter Richtung, so trifft sie den Kegel K_2 in zwei Punkten, die wir

Q_1 und Q_2 nennen wollen. Ebenso wird die Ebene F_1 von einer durch P nach einer zweiten beliebigen, aber festen Richtung gezogenen Geraden in einem Punkte R geschnitten. Welchen Punkt der Fläche wir nun auch an die Stelle von P treten lassen mögen, immer behält der Quotient des Productes der Distanzen PQ_1 und PQ_2 und der Distanz PR ein und denselben Werth, so dass man hat:

$$\frac{PQ_1 . PQ_2}{PR} = \text{constans}.$$

Die Distanzen müssen hierbei immer nach derselben Seite hin gerechnet werden, so dass also das Product $PQ_1 . PQ_2$ negativ wird, wenn Q_1 und Q_2 auf entgegengesetzten Seiten von P liegen, sowie PR das eine oder das andere Vorzeichen annimmt, jenachdem P sich auf der einen oder anderen Seite der Ebene F_1 befindet. Die Richtigkeit des Obigen leuchtet aus dem Umstande ein, dass, wenn in K_2 und F_1 an die Stelle der Variabeln die entsprechenden Coordinatenwerthe des Punktes P gesetzt werden, K_2 und F_1 die Werthe $\varkappa . PQ_1 . PQ_2$ und $\lambda . PR$ annehmen, wo $\varkappa$ und λ Constanten bedeuten. Der Gleichung I. zufolge ist aber für einen jeden Punkt der Fläche F_2

$$\frac{K_2}{F_1} = \mu,$$

was denn zu der angegebenen Beziehung der drei in Rede stehenden Oerter führt, die wir als Grundeigenschaft der Flächen des zweiten Grades hinstellen können.

Eine Seite des Kegels K_2 schneidet ersichtlich die Fläche F_2 nur in einem Punkte, ihrem Durchschnitte mit der Ebene F_1. Hieraus schliessen wir, dass die Seiten des Kegels mit den Asymptoten der Fläche parallel laufen; wir wollen daher jenen einen asymptotischen Kegel nennen. Der asymptotische Kegel schneidet die Fläche F_2 in einer ebenen Curve, dem Kegelschnitte nämlich, welchen die Ebene F_1 aus K_2 herausschneidet; und zwei Flächen zweiten Grades mit demselben asymptotischen Kegel schneiden sich in ebenen Curven.

Wird das Coordinaten-System verschoben, wobei sich die Richtungen der Axen nicht ändern, so tritt an die Stelle der Gleichung I. die folgende:

$$\text{I}'. \quad K_2 + \mu' F'_1 = 0.$$

In ihr kommt ein zweiter asymptotischer Kegel zum Vorschein, der dem ersten gleich und ähnlich ist. Wir entnehmen hieraus, dass, wenn der Kegel K_2 verschoben wird, die Fläche F_2 von ihm immer in Kegelschnitten getroffen wird. Die Ebene dieser Kegelschnitte aber, und somit ihre Gestalt, ändert sich mit jeder neuen Lage des Kegels.

Der asymptotische Kegel kann dem Obigen gemäss als Attribut einer Fläche zweiten Grades betrachtet werden und liefert uns folglich in seiner Natur einen tauglichen Eintheilungsgrund für jene Flächen, bei dessen Annahme jedoch begreiflicherweise die Discussion eines Kegels zweiten Grades, welche sehr einfach ist, vorausgesetzt werden muss. Jenachdem K_2' einen eigentlichen Conus oder das System zweier Ebenen darstellt, gehört F_2 einer von zwei zunächst sich darbietenden Abtheilungen an. Die Flächen der ersten Abtheilung werden von ihrem asymptotischen Kegel im Allgemeinen in Curven des zweiten Grades geschnitten. Sie zerfallen weiter in zwei Gruppen, von denen der einen ein reeller, der andern ein imaginärer asymptotischer Conus zukommt; jene begreift die Hyperboloide mit dem reellen Conus als Grenze, diese die Ellipsoide mit dem ellipsoidischen Punkte als Grenze. Drehen wir das Coordinatensystem so, dass seine Ebenen in die Hauptschnitte des asymptotischen Kegels fallen, so nimmt die Gleichung der Flächen der ersten Abtheilung diese Gestalt an:

$$\text{A.} \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \mu F_1 = 0,$$

wo A, B und C von Null verschieden sind.

Die Flächen, welche die zweite Abtheilung ausmachen, werden von ihren asymptotischen Ebenen immer in geraden Linien geschnitten. Legen wir die z-Axe so, dass sie jenen zwei Ebenen gemein wird, so kann die Gleichung der hierher gehörigen Flächen durch eine Drehung des Systemes um die z-Axe in die folgende umgeformt werden:

$$\text{B.} \quad Ax^2 + By^2 + \mu F_1 = 0,$$

wo mindestens einer der beiden Coefficienten A und B von Null verschieden ist.

Die untergeordneten Gruppen heben sich auch in dieser Abtheilung durch die Natur der asymptotischen Fläche hervor. Besteht diese nämlich aus zwei reellen Ebenen, die sich schneiden, so ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. Die Grenze der hyperbolischen Paraboloide in Bezug auf eine Variation des Coefficienten μ ist das System zweier reeller sich schneidender Ebenen. Wenn die asymptotische Fläche aus zwei in einer reellen Geraden sich schneidenden imaginären Ebenen besteht, so entsprechen ihr elliptische Paraboloide, deren Grenze für die angegebene Variation die reelle gerade Linie ist. In dem Uebergangsfalle endlich, wenn die asymptotischen Ebenen reell sind und zusammenfallen, ergeben sich parabolische Cylinder, deren Grenze zwei zusammenfallende reelle Ebenen ausmachen.

Wir wollen uns jetzt die Frage stellen, ob sich nicht der asymptotische Kegel so verschieben lasse, dass seine sämmtli-

chen Seiten Asymptoten der Fläche werden, oder, was dasselbe besagt, ob in der Gleichung der Fläche die Function F_1 durch eine Verrückung des Coordinaten-Anfangspunktes auf eine Constante gebracht werden könne, da denn die Ebene F_1 unendlich weit wegrücken würde. Ein Blick auf die Gleichung A. zeigt, dass es für die Flächen der ersten Abtheilung immer einen und nur einen in endlicher Entfernung gelegenen Punkt von solcher Beschaffenheit gebe, dass der asymptotische Kegel, wenn seine Spitze in denselben fällt, die Fläche im Unendlichen berührt. Jener Kegel geht also in dieser besonderen Lage in einen Asymptoten-Kegel über, und der fragliche Punkt, seine Spitze, ist nichts Anderes als der Mittelpunkt der Fläche. Den übrigen, durch die Gleichung B. dargestellten Flächen geht im Allgemeinen ein solcher Mittelpunkt ab. Suchen wir ihn für das hyperbolische Paraboloid, so erhalten wir ihn bestimmt als den Durchschnitt einer gewissen mit dem Durchschnitt der asymptotischen Ebenen parallelen Geraden (der sogenannten Axe der Fläche) und einer auf dieser senkrechten Ebene, die im Allgemeinen unendlich weit entfernt liegt; der Mittelpunkt der Fläche liegt also im Unendlichen. Die letzterwähnte Ebene wird nur in dem besonderen Falle, wenn die Ebene F_1 der Singularität der asymptotischen Fläche parallel wird, unbestimmt, und alsdann ist ein jeder Punkt der Axe ein Centrum; die Fläche aber geht in diesem Falle in einen hyperbolischen Cylinder über. Der Mittelpunkt der elliptischen Paraboloide bestimmt sich ebenfalls als der Durchschnitt der in eine gewisse Lage gerückten Singularität der asymptotischen Ebenen (sie heisst in dieser Lage wiederum die Axe der Fläche) und einer auf ihr senkrechten Ebene, die im Allgemeinen unendlich weit abliegt. Verschwindet aber in F_1 der Coefficient von z, kommt also die Ebene F_1 mit der Singularität der asymptotischen Ebenen parallel zu liegen, so wird die Axe der Fläche Centrallinie; die Fläche ist ein elliptischer Cylinder. Bei dem parabolischen Cylinder endlich erhalten wir als Oerter des Mittelpunktes eine bestimmte mit den asymptotischen Ebenen parallele Ebene (die Axial-Ebene, welche die Fläche in der Scheitellinie schneidet), eine auf dieser senkrechte und mit der Scheitellinie parallele Ebene und eine auf der Scheitellinie senkrechte, übrigens aber unbestimmte Ebene. Die Fläche besitzt mithin eine Centrallinie; diese ist mit der Scheitellinie parallel und liegt in der Axial-Ebene unendlich weit weg. Nur wenn der parabolische Cylinder in zwei parallele Ebenen ausartet, — was eintritt, wenn die Ebene F_1 den asymptotischen Ebenen parallel läuft — wird auch der zweite der erwähnten Oerter unbestimmt, während der erste in eine von den beiden Theilen der Fläche gleichweit abstehende Ebene übergeht; diese ist eine Central-Ebene.

2) Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in irgend einen Punkt P der durch die Gleichung I. der vorigen Nummer dargestellten Fläche zweiten Grades, so geht jene über in:

$$\text{II.}\quad K_2 + \mu K_1 = 0.$$

Es tritt hier der mit seiner Singularität durch P gehende asym-

ptotische Kegel K_2 in Evidenz und ausserdem die ebenfalls durch P gehende Ebene K_1. Ziehen wir in letzterer eine gerade Linie durch P, so schneidet diese die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten, ihren Durchschnitten mit dem Kegel K_2; sie berührt also die Fläche und somit ist

$$K_1 = 0$$

die Gleichung der Tangential-Ebene im Punkte P. Diese Ebene K_1 schneidet die Fläche in zwei geraden Linien, den auf ihr gelegenen Seiten des Kegels. Drehen wir das Coordinaten-System bis seine Ebenen in die Hauptschnitte des letzteren fallen, so treten in der Function K_2 nur mehr die Quadrate der Veränderlichen auf. Es sei für diese Lage der Coordinaten-Axen

$$K_2 \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 \text{ und } \mu K_1 \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Projiciren wir alsdann den Durchschnitt der Ebene K_1 und des Kegels K_2 auf die xy-Ebene, so finden wir für die Gleichung dieser Projection die folgende:

$$x^2(a\gamma^2 + c\alpha^2) + y^2(b\gamma^2 + c\beta^2) + 2.c\alpha\beta xy = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellten beiden geraden Linien sind nun reell oder sie fallen zusammen oder sie sind imaginär, jenachdem der Ausdruck

$$M \equiv -\{ab\gamma^2 + ac\beta^2 + bc\alpha^2\}$$

bezüglich grösser als Null ist oder verschwindet oder negativ wird. Versetzen wir aber den Coordinaten-Anfangspunkt in einen anderen Punkt P' der Fläche, dessen Coordinaten in Bezug auf das alte System x', y', z' sind, so wird die Gleichung der Fläche in Bezug auf das neue System:

$$K_2 + \mu' K_1' \equiv K_2 + \mu K_1 + 2ax' + 2by' + 2cz' = 0.$$

Projiciren wir jetzt wiederum den Durchschnitt der Tangential-Ebene in P' und der Fläche auf die neue xy-Ebene, so erhalten wir für die Gleichung dieser Projection:

$$\begin{aligned} 0 = x^2\{a(\gamma+2cz')^2 + c(\alpha+2ax')^2\} + y^2\{b(\gamma+2cz')^2 + c(\beta+2by')^2\} \\ + 2c(\alpha+2ax')(\beta+2by')xy, \end{aligned}$$

und die Natur dieser beiden Geraden hängt ab von dem Vorzeichen des Ausdruckes

$$\begin{aligned} M' &\equiv -\{ab(\gamma+2cz')^2 + ac(\beta+2by')^2 + bc(\alpha+2ax')^2\} \\ &= -\{ab\gamma^2 + ac\beta^2 + bc\alpha^2 + 4abc(ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z')\}. \end{aligned}$$

Da nun aber der Punkt P' auf der Fläche liegt und somit seine Coordinaten-Werthe x', y', z' die alte Gleichung der Fläche befriedigen, so folgt, dass $M' \equiv M$ sei. Zu einem analogen Resul-

tate wären wir gelangt, wenn wir eine der beiden anderen Coordinaten-Ebenen zur Projections-Ebene genommen hätten. Wir ersehen hieraus, dass eine Fläche zweiten Grades von einer jeden ihrer Tangential-Ebenen entweder immer in zwei imaginären oder zwei zusammenfallenden oder zwei reellen Geraden geschnitten wird.

Mit Bezugnahme auf eine frühere Abhandlung erwähne ich hier, dass der Kegel, welcher sich durch die mit einem singulären Punkte versehene Durchschnitts-Curve zweier Flächen zweiten Grades legen lässt, den Durchschnitt der asymptotischen Kegel beider Flächen aufnimmt, wie sich leicht aus der Combination der auf die Form II. gebrachten Gleichungen der Flächen ergibt.

3) In dem Punkte P eines centrischen Kegelschnitts werde die Krümmung durch den Halbmesser ϱ des Krümmungskreises gemessen. Die reelle oder imaginäre Länge des Halbmessers der Curve, dessen Richtung mit derjenigen der Tangente in P parallel ist, sei r, und die Länge des aus dem Mittelpunkte auf die Tangenten gefällten Perpendikels sei p; alsdann hat man:

$$\varrho = \frac{r^2}{p}.$$

In einer ganz analogen Gleichung findet das Krümmungs-Gesetz bei Flächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte seinen Ausdruck. Es sei P ein Punkt einer solchen Fläche, T seine Tangential-Ebene. Durch den Mittelpunkt O und den Punkt P lege man eine Ebene E. Sie schneide die Fläche in dem Kegelschnitte K. Ein Durchmesser des letzteren ist OP, der diesem zugeordnete, welcher dem Durchschnitte t der Ebenen E und T parallel ist, habe die Länge r. Alsdann ist, wenn wir die Länge des aus O auf t gefällten Perpendikels mit π und den Krümmungshalbmesser des Schnittes K im Punkte P mit ϱ' bezeichnen:

$$\varrho' = \frac{r^2}{\pi}.$$

Bedeutet aber ϱ den Krümmungshalbmesser des durch die Tangente t gehenden Normalschnittes der Fläche und φ den von den Ebenen E und T eingeschlossenen Winkel, so hat man bekanntlich:

$$\varrho \sin\varphi = \varrho'.$$

Und wenn p die Länge eines Perpendikels ist, welches aus dem Mittelpunkte der Fläche auf die Tangential-Ebene T gefällt wird, so ist:

$$p = \pi \sin\varphi.$$

Aus den drei aufgestellten Gleichungen folgt nun:

$$\text{A}_1. \quad \varrho = \frac{r^2}{p}.$$

Das in dieser Gleichung ausgesprochene Theorem überträgt ch unmittelbar auch auf diejenigen Flächen zweiten Grades, elche mit einer in endlicher Entfernung gelegenen Central-Linie ler einer solchen Central-Ebene versehen sind. Bei diesen Flä-ıen tritt an die Stelle des Perpendikels p die Entfernung der angential-Ebene vom Central-Orte. Die Gleichung A_1. muss fer-:r auch noch für die nicht centrischen Flächen zweiten Grades re Gültigkeit behalten, insofern diese als centrische Flächen mit ıendlich weit liegenden Central-Oertern anzusehen sind. Da je-ɔch bei diesen Flächen die Grössen r und p unendlich werden, ı bedarf die Gleichung A., wenn sie anwendbar werden soll, ner Umformung, die wir in folgender Weise bewerkstelligen.

Wird die Gleichung eines centrischen Kegelschnittes auf ein oordinaten-System bezogen, dessen Ordinaten-Axe jenen berührt, ährend die Abscissen-Axe mit demjenigen Durchmesser zusam-enfällt, welcher im Berührungspunkte ausläuft, so erhält sie die orm:

$$y^2=-\frac{b^2}{a^2}.x^2+2\frac{b^2}{a}.x=\alpha.x^2+\lambda.x,$$

ıd der Krümmungshalbmesser des Berührungspunktes bestimmt ch durch die Gleichung

$$\varrho=\frac{b^2}{a\sin\varphi}=\frac{\lambda}{2\sin\varphi},$$

enn φ den Winkel der Coordinaten-Axen bedeutet. Denken wir ıs nun, dass der Mittelpunkt des Kegelschnittes auf der Ab-·issenaxe fortrücke, während sich gleichzeitig seine Axen in der .rt verändern, dass α sich der Null, $\varkappa$ der endlichen Grösse l ähert, immer aber die Curve von der Ordinaten-Axe im Anfangs-unkte berührt wird, so nähert sich gleichzeitig jene einer Para-el, deren Gleichung

$$y^2=l.x$$

t. An der Grenze, wenn der Mittelpunkt ins Unendliche ge-ickt ist, geht der Kegelschnitt in die Parabel über. Der Krüm-.ungshalbmesser der letzteren im Coordinaten-Anfangspunkte fin-et sich folglich durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\varrho=\frac{l}{2\sin\varphi}.$$

ezeichnen wir aber die Länge irgend einer mit der Ordinaten-ıxe parallelen Sehne der Parabel durch $2r$ und ihre Entfernung om Anfangspunkte durch p, so ist ersichtlich

$$r^2=l.\frac{p}{\sin\varphi},$$

folglich

$$A_2 . \varrho = \frac{r^2}{2p}$$

Eine der so eben angestellten ganz analoge Grenzbetrachtung führt uns bei den nicht centrischen Flächen zweiten Grades auf die Gleichung A_2. als den Ausdruck ihres Krümmungs-Gesetzes, wenn wir unter ϱ den Krümmungshalbmesser irgend eines Normalschnittes in einem Punkte P, unter p die Entfernung dieses Punktes von einem beliebigen Schnitte, dessen Ebene mit der Tangential-Ebene in T parallel ist, und unter r den Halbmesser dieses Schnittes verstehen, welcher dem Normalschnitte parallel lauft.

Aus den Gleichungen A. ersehen wir, dass die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte eines Punktes den Quadraten der den Tangenten jener Schnitte parallelen Halbmesser des Kegelschnittes proportional sind, in welchem die Fläche von einer mit der Tangential-Ebene des Punktes parallelen Ebene geschnitten wird. Aus diesem Satze fliessen fast unmittelbar die bekannten Theoreme über die einfacheren Krümmungs-Verhältnisse der Flächen, insbesondere das Euler'sche über die Beziehung des Krümmungshalbmessers irgend eines Normal-Schnittes zu dem grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser desselben Punktes. Jene lassen sich nämlich auf die bei Flächen des zweiten Grades zurückführen.

Die krummen Flächen des zweiten Grades werden von Ebenen, die ihren Tangential-Ebenen parallel sind, entweder in lauter Ellipsen oder in lauter Hyperbeln oder in lauter Parabeln oder endlich immer in zwei parallelen Geraden geschnitten. Im ersten Falle sind die Haupt-Krümmungshalbmesser (der grösste und kleinste), deren zugehörige Tangenten mit den Halbaxen eines der erwähnten Parallel-Schnitte gleich laufen, beide mit demselben Vorzeichen versehen und von endlicher Grösse. Dasselbe gilt von irgend zwei Krümmungshalbmessern. Die Fläche ist mithin in Bezug auf eine Seite ihrer Tangential-Ebene immer convex-convex oder concav-concav, also doppelt und in gleichem Sinne gekrümmt. Es gehören hierher die Ellipsoide und die elliptischen Hyperboloide und Paraboloide. Bestehen die mit den Tangential-Ebenen der Fläche parallelen Schnitte aus Hyperbeln, so erlangen die Haupt-Krümmungshalbmesser endliche Grössen und entgegengesetzte Vorzeichen; die Fläche ist convex-concav. Den Uebergang von den convexen zu den concaven Normalschnitten bilden die durch die beiden Geraden gehenden, welche in diesem Falle immer der Fläche und ihrer Tangential-Ebene gemein sind, und deren Krümmung unendlich klein ist. Hierher gehören das hyperbolische Hyperboloid und Paraboloid. Bei den cylindrischen Flächen zweiten Grades bestehen die Schnitte, welche den Tangential-Ebenen parallel sind, aus zwei mit der Berührungslinie parallelen Geraden. Wir ersehen hieraus, dass die Krümmung in jedem Punkte der Berührungslinie dieselbe und in gleichem Sinne gekehrt ist. In einem bestimmten Punkte nimmt der Krümmungshalbmesser von dem auf der Berührungslinie senkrechten Normal-

schnitte an stetig an Grösse zu und wird in dem durch jene gehenden Schnitt unendlich gross. Die einzige Fläche zweiten Grades, welche von Ebenen, die ihren Tangential-Ebenen parallel sind, in Parabeln geschnitten wird, ist der Conus. Wenn nun auch für diese centrische Fläche die Gleichung A_1 und die aus ihr gezogenen Consequenzen ihre Gültigkeit behalten, so muss man doch, um die absolute Krümmung in einem ihrer Punkte zu erhalten, sich auf die einfache directe Bestimmung einlassen, deren wir uns aber hier überheben wollen. Das Verhältniss der verschiedenen Krümmungshalbmesser in einem bestimmten Punkte des Kegels stellt sich ersichtlich als dasselbe heraus wie bei einem Cylinder zweiten Grades, welcher letztere sich von einem Kegel dadurch unterscheidet, dass die kleinsten Hauptkrümmungshalbmesser in den verschiedenen Punkten einer Seite dieselbe Grösse behalten, während sie beim Kegel von der Spitze an gerechnet zunehmen und zwar wie die Entfernungen der Punkte von der Spitze.

Bezeichnen wir den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser eines Punktes mit ϱ_1 und ϱ_2, so ist das Product $\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2}$ aus der kleinsten und grössten Krümmung, das von Gauss so genannte Krümmungsmaass der Fläche in jenem Punkte. Es wird dasselbe nur bei convex-convexen oder concav-concaven Flächen positiv und von Null verschieden, unter den Flächen zweiten Grades mithin beim Ellipsoide, dem elliptischen Hyperboloide und Paraboloide. Von den geradlinigen Flächen zweiten Grades besitzen die windschiefen (bei denen sich zwei auf einander folgende Geraden derselben Erzeugung nicht schneiden), welche zugleich concav-convex sind, ein Krümmungsmaass, das kleiner als Null ist, während dasselbe sich bei den abwickelbaren (bei denen sich zwei auf einander folgende Generatricen schneiden resp. mit einander parallel sind), welche plan-concav oder plan-convex genannt werden können, verschwindet. Windschiefe Flächen zweiten Grades sind das hyperbolische Hyperboloid und Paraboloid, developpable der Cylinder und der Conus. Ueber das Krümmungsmaass werden wir jetzt einige Bemerkungen folgen lassen, die sich nur auf die centrischen Flächen zweiten Grades, und unter ihnen den Kegel ebenfalls ausgeschlossen, beziehen, die sich aber leicht auch auf die übrigen Flächen zweiten Grades, nach gehörig angebrachter Modification übertragen lassen.

Indem wir die soeben angegebene Bedeutung von ϱ_1 und ϱ_2 beibehalten, bezeichnen wir die Halbaxen des Diametral-Schnittes, welcher mit der Tangential-Ebene des Punktes P parallel ist, auf den sich ϱ_1 und ϱ_2 beziehen, durch α und β. Alsdann haben wir für das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte P:

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2}=\frac{p^2}{\alpha^2\beta^2},$$

wenn p die senkrechte Entfernung des Punktes vom Diametral

schnitte oder des Mittelpunktes von der Tangential-Ebene be
tet. Für die verschiedenen Punkte ein und derselben Fläche
hält aber $\alpha\beta p$ denselben Werth. Das Krümmungsmaass ist s
der vierten Potenz von p, der Entfernung des Mittelpunktes
der Tangential-Ebene proportional.

Der Ort der Punkte eines Ellipsoides, deren Berührungs-E
nen von dem Centrum gleichweit entfernt sind, ist bekannt
die sogenannte Polodie, eine in der Theorie der Rotation
Sprache kommende Curve. Dem Obigen gemäss ist also die
lodie die Curve gleichen Krümmungsmaasses für ein Ellips
Die Polodien dieser Fläche zerfallen in zwei Gruppen, d
Uebergang die zwei Ellipsen bilden, in denen die beiden
Ellipsoide umschriebenen Rotations-Cylinder dieses berühren.
die eben erwähnten Ellipsen, die durch die Endpunkte der m
leren Axe der Fläche gehen, ist p der Hälfte dieser Axe gle
Den Polodien der einen Gruppe entsprechen Werthe von p,
zwischen der mittleren und kleinsten Halbaxe, denen der zwe
solche, die zwischen der mittleren und grössten Halbaxe
Fläche liegen. Das Krümmungsmaass nimmt von dem jenen
lipsen entsprechenden mittleren Werthe nach der einen und a
ren Richtung von einer Polodie zur nächst folgenden stetig
züglich zu oder ab bis zu einem Minimum und Maximum,
denen jenes in den Scheiteln der kleinsten, dieses in den E
punkten der grössten Axe des Ellipsoides erreicht wird.

Die beiden anderen centrischen Flächen zweiten Grades
sitzen ebenfalls ihre Polodien, die auch hier Curven gleic
Krümmungsmaasses sind. Bei dem einschaligen Hyperbol
zerfallen sie wiederum in zwei Gruppen, die durch die bei
Ellipsen von einander geschieden werden, in welchen die Flä
von zwei Kreis-Cylindern berührt wird. Diese Ellipsen ge
durch die Scheitel der kleineren reellen Axe. Indem wir von d
selben ausgehen, nimmt das Krümmungsmaass in der einen Gru
von einer Polodie zur anderen an absoluter Grösse zu, und
reicht im Scheitel der grösseren reellen Axe ein Maximum, w
rend es für die andere Gruppe jener Curven in's Unbegren
abnimmt. Das letztere tritt auch bei der einzigen Gruppe
Polodien der Schale eines elliptischen Hyperboloides ein, w
wir von deren Scheitel ausgehen, wo für das Krümmungsma
ein Maximum vorhanden ist.

Um ein Ellipsoid wollen wir uns diejenige Fläche constr
denken, die der Ort der Fusspunkte aller Perpendikel ist, wel
aus dem Mittelpunkte auf die Berührungs-Ebenen des Ellipsoi
herabgelassen werden können; diese Fläche heisst bekannt
Elasticitäts-Fläche und wird in der Lehre vom Lichte nä
betrachtet. Einem jeden Punkte P des Ellipsoides (als Berührun
punkt) entspricht alsdann ein Punkt P' der Elasticitäts-Flä
(als Fusspunkt), und es leuchtet ein, dass einer Polodie für e
gewisse Distanz p auf der Elasticitäts-Fläche eine Curve zu
ordnet ist, die der Durchschnitt jener Fläche mit einer Kugel v
Radius p ist.

Durch den Mittelpunkt O des Ellipsoides E legen wir eine Ebene mit der Tangential-Ebene in P parallel. Die Richtungen der Axen der Ellipse, in welcher E von dieser Ebene geschnitten wird, geben uns die Richtung der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte P an. Wir erhalten sie wie folgt. Durch die Normale des Schnittes und die Normalen der Kreisschnitte von E legen wir zwei Ebenen und halbiren hierauf die von diesen gebildeten Flächenwinkel. Die Halbirungs-Ebenen enthalten alsdann die Axen des Schnittes und zwei durch P mit ihnen parallel gezogene Tangenten geben die Richtung der grössten und kleinsten Krümmung in P an. Die Normalen aller derjenigen Diametralschnitte, welche eine Axe gleich haben, bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge einen Kegel des zweiten Grades, dessen Focallinien die Normalen der Kreisschnitte von E sind, und die Tangential- und Normal-Ebenen einer Kegelseite enthalten die Axen des dieser Seite entsprechenden Diametralschnittes. Für die Diametralschnitte ins Gesammt erhalten wir zwei Serien solcher Kegel, die einander senkrecht durchsetzen. Es sei nun K einer jener Kegel, C' sein Durchschnitt mit der Elasticitäts-Fläche und P' und P'_1 zwei nächst auf einander folgende Punkte dieser Curve. Der Curve C' entspreche auf dem Ellipsoide die Linie C, insbesondere den Punkten P' und P'_1 der ersten Linie die Punkte P und P_1 der zweiten. Da nun das Element $P'OP'_1$ des Kegels mit der einen Axe des dem Punkte P entsprechenden Diametralschnittes einen unendlich kleinen Winkel bildet, so folgt, dass das Element PP_1 der Curve C mit dem einen Hauptschnitte des Punktes P ebenfalls einen unendlich-kleinen Winkel einschliesst. Hieraus ersehen wir, dass die in der Tangential-Ebene von E im Punkte P durch diesen gezogene Tangente und Normale der Curve C die Richtung der grössten und kleinsten Krümmung angiebt. Der Diameter, welcher die Richtung der Normale hat, ist nach dem Mitgetheilten für alle Punkte der Curve C von gleicher Grösse, während derjenige, welcher die Richtung der Tangente hat, von einem Punkte zum andern grösser oder kleiner wird. Den beiden Serien der Kegel K entsprechend erhalten wir auf E zwei Gruppen von Curven C, die sich (ähnlich wie confocale sphärische Ellipsen um ihre Brennpunkte) um je zwei Kreispunkte herumziehen. Eine Curve des einen Systemes schneidet keine zweite zu demselben gehörige, dahingegen alle des anderen Systemes. Die beiden Curven, welche denselben Punkt der Fläche durchsetzen, stehen in diesem Punkte aufeinander senkrecht, und ihre Tangenten geben die Richtungen der beiden Hauptschnitte an. Die Curven C sind die sogenannten Krümmungslinien des Ellipsoides, die Aufeinanderfolge der Punkte, deren Normalen sich schneiden. Wie die auf der Elasticitäts-Fläche befindlichen Curven C', so liegen auch die entsprechenden Curven C auf Kegeln zweiten Grades, deren Hauptschnitte mit denen des Ellipsoides zusammenfallen. Dies ergiebt sich leicht aus den Gleichungen der Krümmungslinien, wie sie das gewöhnlich angewandte Verfahren bei der Betrachtung der Krümmungs-Verhältnisse von Flächen liefert. Auf unserem rein algebraischen Wege gelangen wir zu obigem Resultate, wie folgt.

Es sei $K=0$ die Gleichung eines der confocalen Kegel, dessen Durchschnitte mit der Fläche E' die Curve C' sei. Die Diametralschnitte, welche den Punkten der Curve C auf E (welche Linie der erst erwähnten entspricht) zugehören, stehen auf den Seiten von K senkrecht, umhüllen somit den Supplementkegel S des letzteren, indem sie ihn längs der gleichen Axen der Durchschnittscurven berühren. Man habe nun

$$1)\quad K \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

und es seien die Gleichungen einer Seite des Kegels K

$$2)\quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Die Gleichung der Berührungs-Ebene des Supplementkegels, welche auf jener Seite senkrecht steht, ist alsdann:

$$3)\quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Für die Plan-Coordinaten α, β, γ sämmtlicher Berührungs Ebenen des Supplement-Kegels ergiebt sich aber durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen 1) und 2) folgende Beziehung:

$$S \equiv A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0,$$

welches also die Gleichung des Supplement-Kegels in Plan-Coordinaten ist. Die Punkte der Curve C auf E liegen nun in den Endpunkten der Durchmesser des Ellipsoides, welche den Berührungs-Ebenen von S zugeordnet sind. Wenn aber

$$E \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

die Gleichung des Ellipsoides ist, so wird der der Ebene α, β, γ zugeordnete Diameter dargestellt durch diese Gleichungen:

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{z}{x} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{z}{y} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\gamma}{\beta}.$$

Der Ort sämmtlicher Durchmesser, die den Berührungs-Ebenen von S zugeordnet sind, wird durch eine Gleichung repräsentirt, die sich durch Elimination von α, β, γ aus den drei letzten Gleichungen und der des Kegels S ergiebt. Man findet für sie:

$$1')\quad K' \equiv Aa^2x^2 + Bb^2y^2 + Cc^2z^2 = 0,$$

woraus wir ersehen, dass jener Ort ein Kegel zweiten Grades ist, dessen Hauptschnitte mit denen des Ellipsoides zusammenfallen. Die Curven C, die Krümmungslinien des Ellipsoides, sind hiernach als die Durchschnitte der letzten Fläche mit zwei Gruppen von Kegeln K' zu betrachten, deren Verhältniss zu den Kegeln K eine Collation der Gleichungen 1) und 1') ergibt. Von den beiden Systemen der Krümmungslinien gehört das eine den Krümmungs-

laximis, das andere den Krümmungs-Minimis an. In allen Punkm einer Curve C des ersten Systemes z. B. findet das Maxium der Krümmung in der Richtung der Normal-Ebene der Curve tatt, und verhält sich umgekehrt wie die Entfernung der Tangenial-Ebene vom Mittelpunkte, oder wie die Radien der Elasticitätsfläche, welche in den entsprechenden Punkten der Curve C' ausaufen.

Aehnliche Resultate, wie wir für das Ellipsoid gefunden haen, ergeben sich für das Hyperboloid, die zweite centrische Fläche, welche wir hier zunächst im Auge hatten.

II.

Flächen des dritten Grades.

3) Die allgemeine Gleichung der Flächen dritten Grades hat in der von uns angenommenen Bezeichnungsart die Form:

$$\text{I.}\quad F_3 \equiv K_3 + \mu F_2 = 0$$

und drückt die Grundeigenschaft dieser Flächen aus, dass nämlich das Verhältniss des Productes der nach beliebiger, aber fester Richtung gerechneten drei Entfernungen eines Punktes der Fläche von einem Kegel dritten Grades (K_3) und des Productes der nach ebenfalls beliebiger, aber fester Richtung genommenen zwei Entfernungen desselben Punktes von einer Fläche zweiten Grades (F_2) ein constantes ist.

Eine Seite des Kegels K_3 schneidet die Fläche nur in zwei in endlicher Entfernung gelegenen Punkten, ihren Durchschnitten mit F_2, und ist sohin einer Asymptote der Fläche parallel. Wir nennen daher K_3 einen asymptotischen Kegel. Verschiebt man das Coordinaten-System, d. h. verrückt man den Anfangspunkt ohne die Axenrichtungen zu ändern, so tritt an die Stelle der Gleichung I. die folgende:

$$\text{I}'.\quad K_3 + \mu' F'_2 = 0.$$

Der zum Vorschein kommende Kegel ist dem ersterwähnten gleich und ähnlich liegend. Verschiebt man also den asymptotischen Kegel, so schneidet er die Fläche immer in einer Curve, durch die eine Fläche zweiten Grades gelegt werden kann.

Bringen wir auch den asymptotischen Kegel der Fläche F_2 in Evidenz, so erhalten wir:

$$F_3 \equiv K_3 + \mu K_2 + \nu F_1 = 0.$$

Die Kegel K_3 und K_2 schneiden sich in sechs geraden Linien, die paarweise imaginär werden, sowie theilweise oder sämmtlich

zusammenfallen können. Jede von ihnen trifft die Fläche im Allgemeinen nur in einem Punkte, ihrem Durchschnitte mit der Ebene F_1, und ist folglich eine Asymptote der Fläche. Die sechs Durchschnitte liegen auf einem Kegelschnitte. Wenn die Spitze des asymptotischen Kegels auf die Fläche gerückt wird, so können in besonderen Fällen die sechs Durchschnitte der Kegel K_3 und K_2 theilweise oder sämmtlich ganz in die Fläche fallen.

Analog wie bei Flächen zweiten Grades können wir uns auch hier die Frage stellen, ob sich der asymptotische Kegel so verschieben lasse, dass die seiner neuen Lage entsprechende Ebene F_1 in's Unendliche falle. Alsdann hätten die sechs Durchschnitte der Kegel K_3 und K_1 im Allgemeinen keinen in endlicher Entfernung gelegenen Punkt mit der Fläche gemein und gingen sonach in osculirende Asymptoten (die die Fläche in einem unendlich weiten Wendungspunkte berühren) über. Gleichzeitig fiele der Mittelpunkt der dem neuen asymptotischen Kegel zugeordneten Fläche F_2 in die Spitze jenes, sodass also die zwei Punkte, in denen die Fläche von einer Kegelseite getroffen wird, von der Spitze nach entgegengesetzten Richtungen gleichweit entfernt lägen. Jene Punkte, in welche die Spitze des asymptotischen Kegels zu liegen kommt, entsprechen, wie wir später sehen werden, den Cardinalpunkten ebener Curven, welchen Namen wir ihnen denn auch beilegen wollen.

Es sei nun:

$$K_3 \equiv Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dxyz + Ex^2z + Fy^2z + Gx^2y + Hy^2x + Jxz^2 + Kyz^2,$$

$$\mu K_2 \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

$$\nu F_1 \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta.$$

Wenn wir dann die Coordinaten eines Cardinalpunktes der Fläche F_3 mit ξ, η, ζ bezeichnen, so hat man, wie sich aus einer einfachen Entwicklung ergiebt:

$$F_2' \equiv 3A.\xi^2 + H.\eta^2 + J.\zeta^2 + 2G.\xi\eta + 2E.\xi\zeta + D.\eta\zeta + 2a.\xi + d.\eta + e.\zeta + \alpha = 0,$$

$$F_2'' \equiv G.\xi^2 + 3B.\eta^2 + K.\zeta^2 + 2H.\xi\eta + D.\xi\zeta + 2F.\eta\zeta + d.\xi + 2b.\eta + f.\zeta + \beta = 0,$$

$$F_2''' \equiv E.\xi^2 + F.\eta^2 + 3C.\zeta^2 + D.\xi\eta + 2J.\xi\zeta + 2K.\eta\zeta + e.\xi + f.\eta + 2c.\zeta + \gamma = 0$$

Die Cardinalpunkte einer Fläche dritten Grades werden uns hiernach geliefert als die Durchschnitte dreier Flächen zweiten Grades F_2', F_2'' und F_2'''. Je nach der Beschaffenheit der Durchschnitte dieser Flächen können wir nun die Flächen dritten Grades in Hauptgruppen eintheilen. In dem allgemeinsten Falle, wenn die Gleichungen $F_2' = 0$ etc. von einander unabhängig sind, existiren acht Cardinalpunkte. Diese können theilweise oder sämmtlich in's Unendliche rücken, sowie auch paarweise imaginär werden.

Die Gleichung einer Fläche dritten Grades in Bezug auf ein oordinaten-System, dessen Axen durch einen Cardinalpunkt ɜhen, hat die Form:

$$F_3 \equiv K_3 + \mu K_2 + \nu = 0.$$

adurch, dass wir dem constanten Gliede immer andere Werthe ɜilegen, erhalten wir immer andere Flächen, deren zugehörige lächen zweiten Grades einander ähnlich sind. In dem besonden Falle, wenn ν verschwindet, geht die Fläche zweiten Grades einen Kegel über. Jede Seite dieses Kegels schneidet die läche in drei mit dem Cardinalpunkte zusammenfallenden Punkn, diejenigen jedoch ausgenommen, welche den Kegeln K_3 und $_2$ gemein sind, denn diese fallen ganz in die Fläche. Der Carnalpunkt ist hiernach ein mehrfacher Punkt der Fläche und K_2 r Berührungs-Kegel für denselben. Die Cardinalpunkte sind also lche Punkte, die dadurch, dass man das constante Glied in der leichung der Fläche ändert, in mehrfache Punkte übergehen ɜnnen. Bei diesem Uebergange fallen die osculirenden Asymtoten ganz in die Fläche.

Bei einer Verschiebung des asymptotischen Kegels rückt, ie wir gesehen haben, sein Durchschnitt mit der Fläche dritten rades von der Fläche

$$F_2 \equiv \mu K_2 + \nu F_1$$

af eine neue desselben Grades

$$F_2' \equiv \mu' K_2' + \nu' F_1'.$$

s sei nun:

$$\mu' K_2' \equiv a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'xy + e'xz + f'yz,$$

hat man, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten der Spitze des asymtotischen Kegels in seiner neuen Lage sind:

$$a' = 3A.\xi + G.\eta + E.\zeta + a, \quad b' = A.\xi + 3B.\eta + F.\zeta + b,$$

$$c' = J.\xi + K.\eta + 3C.\zeta + c, \quad d' = 2G.\xi + 2H.\eta + D.\zeta + d,$$

$$e' = 2E.\xi + D.\eta + 2J.\zeta + e, \quad f' = D.\xi + 2F.\eta + 2K.\zeta + f..$$

le Natur des asymptotischen Kegels K_2' und somit der allgeeine Charakter der Fläche F_2' hängt nun, wie aus der Theorie r Flächen zweiten Grades bekannt ist, von der gegenseitigen ziehung und dem Werthe folgender Ausdrücke ab:

1) $f_1' = a'$, $f_1'' = b'$, $f_1''' = c'$;

2) $f_2' \equiv d'^2 - 4a'b'$, $f_2'' \equiv e'^2 - 4a'c'$, $f_2''' \equiv f'^2 - 4b'c'$;

3) $f_3 \equiv a'f'^2 - b'e'^2 - c'd'^2 - 4a'b'c' - d'e'f'$.

Denken wir uns aber ξ, η und ζ als laufende Coordinaten, so stellen die Gleichungen

$$1') \quad f_1'=0, \quad f_1''=0, \quad f_1'''=0$$

drei Ebenen dar und die Gleichungen:

$$2') \quad f_2'=0, \quad f_2''=0, \quad f_2'''=0$$

drei conische Flächen des zweiten Grades. Die erste von diesen wird von den Ebenen f_1' und f_1'' längs ihrer Durchschnitte mit der Ebene $d'=0$ berührt. Aehnliches gilt von den beiden anderen Flächen. Je zwei derselben besitzen als gemeinschaftliche Tangential-Ebene eine der Ebenen 1').

Es stellt endlich die Gleichung

$$3') \quad f_3=0$$

eine Fläche des dritten Grades dar. Auf ihr liegen nur solche Punkte, für deren Coordinatenwerthe wenigstens zwei der Functionen f_2', f_2'', f_2''' gleichzeitig grösser als Null oder gleichzeitig kleiner als Null oder endlich gleichzeitig der Null gleich sind. Letzteres findet für die den drei Flächen f_2' etc. gemeinsamen Punkte Statt, die in's Gesammt auf f_3 liegen.

1°. Wenn nun erstlich die Spitze des asymptotischen Kegels K_3 auf die eben erwähnte Fläche zu liegen kommt, so verschwindet f_3 und in Folge dessen geht der asymptotische Kegel K_2' in zwei Ebenen über, und die Fläche F_2' ermangelt eines in endlicher Entfernung gelegenen Mittelpunktes. Fällt die Spitze von K_3 hierbei in einen der von den Flächen 2') begrenzten Räume, für dessen Punkte wenigstens zwei der Functionen f_2' etc. positiv werden, so besteht K_1' aus zwei sich schneidenden Ebenen, und F_2' ist somit ein hyperbolisches Paraboloid. Werden aber für die Lage von K_3 wenigstens zwei jener Functionen kleiner als Null, so ist K_2' das System zweier imaginärer Ebenen, die sich in reeller Geraden schneiden: F_2' gehört zu den elliptischen Paraboloiden. Und wenn endlich die Spitze von K_3 in einen Punkt fällt, welcher den Flächen f_2 gemeinsam ist, so geht in diesem Uebergangsfalle K_2' in zwei zusammenfallende reelle Ebenen über, während F_2' ein parabolischer Cylinder wird.

2°. Fällt aber zweitens die Spitze des asymptotischen Kegels ausserhalb der Fläche f_3, so kommt der einer solchen Lage zugehörigen Fläche F_2' immer ein Centrum zu, indem K_2' ein eigentlicher Conus wird. Dieser wird imaginär und somit F_2' ein Ellipsoid, wenn die Spitze von K_3 in solche Punkte des Raumes, für welchen f_2', f_2'' und f_2''' gleichzeitig negativ werden, fällt, deren Coordinatenwerthe bei den Functionen f_1', f_1'', f_1''' einerseits und f_3 andrerseits entgegengesetzte Vorzeichen hervorrufen. Man überzeugt sich aber leicht davon, dass für die Punkte des

erwähnten, von den Flächen f_2 begrenzten Raumes die Functionen f_1 entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ werden. In allen übrigen Fällen wird der Kegel K_2' reell und die Fläche F_2' ein Hyperboloid.

Da wir uns hier nur die Gewährung eines allgemeinen Ueberblickes der Eigenschaften von Flächen dritten Grades zum Ziele gesteckt haben, so enthalten wir uns einstweilen der näheren Betrachtung der Oerter f_1, f_2 und f_3 und ihrer gegenseitigen Beziehung sowie einer specielleren Erörterung über die Natur der Fläche F_2'.

4) Unter den Flächen dritten Grades heben sich als die Glieder einer unteren Gruppe diejenigen heraus, die sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass ihre Ebenen F_1 in verschiedenen Entfernungen von einem im Raume festen Punkte liegen. Wie aus den Betrachtungen der vorigen Nummer ersichtlich, werden die einer bestimmten Lage des asymptotischen Kegels entsprechenden Flächen F_2' sämmtlich einander ähnlich, ähnlich liegend und concentrisch sein. Die Flächen besitzen mithin auch dieselben Cardinalpunkte. Keine Fläche der Gruppe schneidet eine zweite, womit zusammenhängt, dass eine von ihnen sich durch die Bedingung bestimmt, dass sie einen bestimmten Punkt aufnehme. In der That, es braucht zur Bestimmung einer der Flächen in ihrer allgemeinen Gleichungsform

$$K_3 + \mu K_2 + \nu K_1 + \pi = 0$$

dem Coefficienten π nur ein bestimmter Werth beigelegt zu werden, was durch die angegebene Bedingung geschieht.

Die soeben betrachteten Gruppen ordnen sich zu einer höheren zusammen, in deren allgemeiner Gleichung nur mehr die Function $K_3 + \mu K_2$ bestimmt ist, während sich die Ebene F_1 von Fläche zu Fläche ändert. Die Flächen F_2', welche einer bestimmten Lage des Kegels K_3 entsprechen, besitzen denselben Asymptotenkegel; ihre Axen sind folglich parallel und haben ein constantes Verhältniss. Da in der allgemeinen Gleichung der Gruppe vier willkürliche Coefficienten auftreten, so kann eine ihrer Flächen der Bedingung unterworfen werden, dass sie durch einen beliebig angenommenen Punkt gehe und einen zweiten zum Cardinalpunkte habe oder im Besonderen, dass sie einen Punkt als mehrfachen aufnehme. Wird dieser Punkt z. B. auf der Fläche f_3 angenommen, die sich, wie auch die Oerter f_1 und f_2 der vorigen Nummer vollständig bestimmt und für die ganze Gruppe dieselbe ist, so zerfällt der Berührungskegel des mehrfachen Punktes in zwei Ebenen u. s. f.

Die Abtheilung der Flächen dritten Grades, welche denselben asymptotischen Kegel K_3 besitzen, umfasst sämmtliche Gruppen der letzterwähnten Art. Während sich zwei Flächen einer dieser Gruppen in ebenen Curven schneiden, ist der Durchschnitt zweier Flächen dieser Abtheilung im Allgemeinen auf einer Fläche

zweiten Grades gelegen, wie sich aus der Combination zweier ihrer Gleichungen ergibt. Eine Fläche dieser Abtheilung kann 10 Bedingungen des ersten Grades unterworfen werden. Solche sind z. B. in dieser involvirt: in einem Punkte einen beliebig angenommenen Kegel zweiten Grades als Berührungsfläche zu besitzen. Werfen wir einen Blick auf die Gleichungen der Flächen F_2', F_2'', F_2''', welche die Cardinalpunkte einer Fläche dritten Grades liefern, so leuchtet ein, dass die den verschiedenen Flächen unserer Abtheilung entsprechenden Flächen F_2' denselben Asymptoten-Kegel besitzen; die Axen dieser Flächen sind mithin parallel und haben dasselbe Verhältniss. Die Flächen F_2', welche einer der vorher erwähnten Gruppe angehören, sind concentrisch, ähnlich liegend und ähnlich. Allen Flächen einer Gruppe der zuerst angeführten Art kommt nur eine einzige Fläche F_2' zu. Dasselbe, was von F_2' gesagt worden, gilt auch von den beiden anderen Flächen F_2'' und F_2'''.

5) Stellt V_n die allgemeine ganze Function des n-Grades mit drei Veränderlichen ohne constantes Glied dar, so tritt an die Stelle der ursprünglichen Gleichung $F_3=0$ einer Fläche dritten Grades, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in einen Punkt P der Fläche verlegt wird, die folgende:

$$V_3 \equiv K_3 + \lambda V_2 = 0.$$

Im Allgemeinen wird nun die Function V_2 nicht in zwei Factoren des ersten Grades zerfällt werden können und auch nicht homogen sein. Die Gleichung

$$\lambda V_2 \equiv \mu K_2 + \nu K_1 = 0$$

stellt daher eine krumme Fläche des zweiten Grades dar, eine Kegelfläche jedoch ausgenommen, deren Singularität den Punkt P aufnimmt. Es repräsentirt alsdann offenbar die Gleichung

$$K_1 = 0$$

eine Ebene, welche sowohl die Fläche V_2, als auch die Fläche V_3 in zweiter Ordnung berührt, d. h. so, dass eine in K_1 durch P gezogene Gerade V_2 und V_3 in je zwei mit P zusammenfallenden Punkten schneidet. Der Punkt P ist mithin ein Punkt gewöhnlicher Krümmung. Die Fläche V_2 hat ersichtlich in der Richtung einer jeden ihrer durch P gehenden Tangenten mit V_3 drei mit P zusammenfallende Punkte gemein; sie osculirt mithin die letztere Fläche in P, und ihre Krümmungsverhältnisse an diesem Punkte geben uns ein Bild von denen der Fläche V_3 ebendaselbst.

In Bezug auf ein in der Ebene K_1 gelegenes Coordinaten-System seien

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0$$

die Gleichungen der drei Geraden, in welchen K_3 von jener Ebene geschnitten wird, sowie

$$s=0, \quad t=0$$

die der Durchschnitte von K_2 und K_1. Die Curve dritten Grades, in welcher V_3 von der Tangential-Ebene K_1 geschnitten wird, hat dann eine Gleichung von der Form:

$$D \equiv pqr + \pi.st = 0.$$

Hieraus ersehen wir, dass jener Schnitt in P einen Doppelpunkt zeigt, dessen Tangenten die Geraden s und t sind, in welchen die Osculationsfläche V_2 von ihrer Tangential-Ebene K_1 geschnitten wird.

Die Asymptoten des Schnittes laufen mit den Geraden p, q und r parallel. Der singuläre Punkt P der Curve D wird nun erstlich ein eigentlicher Doppelpunkt (Durchschnitt zweier reellen Aeste), wenn V_2 oder dessen asymptotischer Kegel K_2 in zwei reellen, sich schneidenden Geraden von K_1 getroffen, d. i. also, wenn V_2 eine windschiefe Fläche zweiten Grades, ein hyperbolisches Hyperboloid oder Paraboloid wird. Die Fläche V_3 ist alsdann ebenfalls in P concav-convex. Die Tangenten ihrer Hauptschnitte halbiren die von den Tangenten des Doppelpunktes gebildeten Winkel. Der Sinn der Krümmung kehrt sich in den durch eben diese Tangenten gehenden Schnitten um; diese besitzen nämlich in P einen Wendungspunkt, wie daraus hervorgeht, dass die Geraden s und t, welche ganz in V_2 liegen, die Fläche V_3 in drei mit P zusammenfallenden Punkten schneiden.

Es werde zweitens V_2 von K_1 in zwei zusammenfallenden Geraden berührt, da denn V_2 ein Conus oder Cylinder ist. Die Curve D erlangt in P eine Spitze, deren Tangenten mit der geraden Berührungslinie von V_2 und K_1 zusammenfallen. Der Hauptschnitt der kleinsten Krümmung steht auf den Tangenten der Spitze senkrecht, während der zweite Hauptschnitt durch diese geht und in P eine Inflexion aufweist. Das Krümmungsmaass der Fläche verschwindet in diesem Falle für den Punkt P.

Werden endlich die beiden Geraden s und t imaginär, geht also V_2 in ein Ellipsoid oder ein elliptisches Hyperboloid oder Paraboloid über, so wird die Fläche in P concav-concav oder convex-convex. Ihr Durchschnitt D mit der Tangential-Ebene erlangt in P einen isolirten, elliptischen Punkt. Die Axen des letzteren geben die Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung an.

Aus den im I. Abschnitte mitgetheilten Bemerkungen über die Krümmung der Flächen zweiten Grades folgt, dass die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte in P den Quadraten der mit ihren Tangenten parallelen Durchmesser eines Kegelschnittes proportional sind, dessen Asymptoten die Geraden s und t sind.

Von den beiden letzterwähnten Geraden kann die eine oder es können beide der ganzen Länge nach mit der Fläche zusammenfallen. Im ersten Falle besteht jeder durch die in der Fläche liegende Gerade gehender Schnitt, und somit auch die Curve D aus dem Complex jener Geraden und eines durch P gehenden Kegelschnittes. Im letzten Falle besteht D aus den beiden Geraden, die durch P gehen und auf der Fläche liegen, und einer dritten geraden Linie, welche mit einem der Durchschnitte von K_3 und K_1 parallel ist (die beiden anderen Durchschnitte fallen in die angeregten Geraden).

Wie wir gesehen haben, osculirt die Fläche V_2 nach irgend einer Richtung hin die Fläche V_3 im Punkte P dreipunktig. Nach den durch die Geraden p, q und r bestimmten Richtungen jedoch fallen vier Durchschnittspunkte von V_3 und V_2 mit P zusammen. Wenn die Tangential-Ebene K_1 nicht bloss jene drei Geraden mit dem asymptotischen Kegel K_3 gemein hat, sondern ganz in diesen fällt (die Fläche K_3 besteht dann aus dem Systeme von K_1 und einem Kegel zweiten Grades), so wird V_3 nach jeder Richtung hin von V_2 in P vierpunktig osculirt. Unter besonderen Voraussetzungen, die leicht zu verfolgen sind, kann die Osculation der Flächen V_3 und V_2 bis zur sechsten Ordnung ansteigen.

So oft P ein Nabelpunkt der Fläche V_2 ist, ist er auch ein solcher für V_3, und umgekehrt. P tritt dann in dem Schnitte der Tangential-Ebene als Kreispunkt auf. Wie bei Flächen zweiten Grades, wo es sphärische, sphäroidische und ellipsoidische Nabelpunkte gibt, können diese auch hier sehr verschiedener Natur sein. Indem wir die genauere Betrachtung derselben einer späteren Untersuchung vorbehalten, wollen wir hier nur bemerken, dass sich die Flächen V_3 und V_2 auch in einem Nabelpunkte im Allgemeinen nach den drei oben angegebenen Richtungen hin vierpunktig osculiren. Im Besonderen kann dieses nach jeder Richtung hin eintreten, sowie die Osculation auch bis zur sechsten Ordnung ansteigen kann.

6) Wenn die Function V_2 der vorigen Nummer, ohne eine homogene Function des zweiten Grades zu werden, sich in zwei Factoren ersten Grades auflöst, so erlangt die Gleichung der Fläche diese Gestalt:

$$V_3 \equiv K_3 + \mu K_1 . F_1 = 0.$$

Die Gleichung

$$K_1 . F_1 = 0$$

stellt das System zweier Ebenen dar, von denen die eine K_1 durch den Punkt P geht, während dies die zweite, F_1, nicht thut. Letztere kann auch in's Unendliche rücken, da denn an die Stelle von F_1 eine Constante tritt. Zieht man in der Ebene K_1 durch P eine gerade Linie, so schneidet diese die Fläche in ihren drei Durchschnitten mit K_3, also in drei mit P zusammenfallenden

Punkten, sie osculirt folglich die Fläche, und ein durch die Gerade gehender Schnitt besitzt in P einen Inflexionspunkt. Die drei geraden Linien jedoch, in denen der asymptotische Kegel K_3 von K_1 getroffen wird, liegen ganz in der Fläche F_3. Die Ebene K_1 ist hiernach eine Osculations Ebene von F_3 in P, und sie schneidet diese Fläche in drei durch P gehenden geraden Linien. Diese Linien können einmal alle reell sein, und alsdann entweder eine die andere schneiden oder zwei von ihnen oder endlich alle zusammenfallen. Zweitens aber kann auch ein Paar derselben imaginär werden. Mindestens eine von ihnen bleibt jedoch in jedem Falle reell. Da die Krümmungshalbmesser bei der hier betrachteten Natur des Punktes P sämmtlich unendlich gross sind, so kann von einem Vergleiche der Krümmung mit der einer Fläche zweiten Grades nicht die Rede sein. Es ist aber klar, dass die Punkte der Fläche nach den verschiedenen Richtungen hin von P an sich ungleich hoch bei derselben in der Richtung von K_1 gemessenen Entfernung von P über die Osculations-Ebene K_1 erheben. Wir erhalten nun ein vollständigeres Bild der hierdurch bedingten Krümmung, wenn wir die Aufeinanderfolge derjenigen Punkte der Ebene K_1 bestimmen, für welche das Product der nach dem Perpendikel auf K_1 gemessenen drei Abstände von der Fläche F_3 einer constanten unendlich kleinen Grösse ε^2 gleichkommt. Sind aber wiederum p, q, r die drei Geraden, in welchen die Fläche von der Osculations-Ebene geschnitten wird, so ist die Aufeinanderfolge der fraglichen Punkte durch die zwei folgenden Gleichungen dargestellt:

$$W_1 \equiv pqr - \varepsilon^2 = 0, \quad W_2 \equiv pqr + \varepsilon^2 = 0.$$

Die eine Curve bezieht sich auf Punkte der Fläche, welche oberhalb, die andere auf solche, welche unterhalb der Ebene K_1 liegen; den Uebergang bilden die auf K_1 gelegenen Punkte der Geraden p, q und r. Die Curven W sind zwei conjugirte Linien dritten Grades einer einfachen Art, nämlich solche, deren Asymptoten p, q, r durch denselben Punkt P gehen und deren Grundlinie in's Unendliche gerückt ist. Die Krümmung der Fläche nach irgend einer durch P gehenden Richtung messen wir durch den reciproken Werth der Länge des in jene Richtung fallenden Leitstrahles der Curven. Wenn nun erstlich die drei Geraden p, q, r reell sind und eine die beiden andern schneidet, so findet längs derselben ein einfaches Schneiden der Flächen F_3 und K_1 statt. Wegen der Gestalt der Curven W, die in diesem Falle aus drei hyperbelartigen Zweigen bestehen, siehe Plücker's „System der analytischen Geometrie“ Taf. III. Fig. XVII. Fallen zwei Durchschnitte p und q der Osculations-Ebene und der Fläche zusammen, so wird letztere von ersterer längs jener Geraden berührt, gleichzeitig aber auch in dem Durchschnitte r einfach geschnitten. Die erwähnte Berührungslinie wird osculirende Asymptote der Curven W, welche hier aus zwei hyperbelartigen Zweigen bestehen. S. a. a. O. Taf. VI. Fig. LIV. Wenn endlich p, q und r zusammenfallen, so wird die Fläche F_3 längs der ganzen Geraden, in die jene fallen, gleichzeitig geschnitten und berührt; diese Gerade wird eine Inflexions-Linie der Fläche.

Die Curven W werden gerade Linien und laufen mit der Inflexions-Linie, zu beiden Seiten von ihr gleich weit abstehend, parallel. Es können endlich zwei der Geraden p, q, r imaginär werden. Jede der Curven W, die alsdann eine reelle Asymptote mit einem auf ihr gelegenen Asymptoten-Punkte besitzen, besteht aus einem einzigen Aste; dieser liegt ganz auf der einen Seite der reellen Asymptote und weist zwei Wendungspunkte auf. Die Fläche V_3 wird von der Ebene V_1 längs dieser Asymptote einfach geschnitten mit Ausnahme des Punktes P, in dem sie osculirt wird.

7) Der Punkt P einer Fläche dritten Grades ist ein vielfacher wenn die Gleichung der letzteren die Gestalt

$$F_3 = K_3 + \mu K_2 = 0$$

annimmt, sobald man den Coordinaten-Anfangspunkt in P verlegt. Die in der 5. Nummer eingeführte Function V_2 hat sich dann auf eine homogene Function des zweiten Grades zurückgezogen. Die Natur des vielfachen Punktes bestimmt sich durch den Charakter des in der Gleichung unmitetlbar in Evidenz tretenden Berührungs-Kegels K_2. Die Seiten und Tangential-Ebenen des letzteren schneiden und berühren gleichzeitig die Fläche im Punkte P. Der Berührungs-Kegel K_2 und der asymptotische Kegel K_3 schneiden sich im Allgemeinen in sechs durch den mehrfachen Punkt gehenden Geraden, die paarweise imaginär und somit auch paarweise reell werden können. Alle diese Geraden liegen auch auf der Fläche F_3. Im Allgemeinen geht die letztere von der einen Seite des Kegels K_2 zur anderen, indem sie beim Unbergange diesen längs einer der erwähnten Geraden schneidet. Eine klarere Vorstellung von der Beschaffenheit des Punktes P gewinnen wir durch folgendes Mittel. Wir denken uns in P diejenigen Krümmungshalbmesser der Fläche construirt, welche auf den einzelnen Seiten des Berührungs-Kegels senkrecht stehen. Der Ort derselben ist der Supplement-Kegel des Berührungs-Kegels und ihre Enden bilden eine auf diesem gelegene Curve, für welche die Seiten des Supplement-Kegels, welche auf den der Fläche und dem Berührungs-Kegel gemeinsamen Geraden senkrecht stehen, als Asymptoten auftreten. Wir wickeln ferner den Supplement-Kegel mit seiner Curve auf einer Ebene ab und erhalten so in der abgewickelten Figur ein Bild von der Krümmung der Fläche im singulären Punkte. Diese Bemerkung ist für die descriptive Geometrie nicht ohne Interesse. Wir wollen nun die verschiedenen Arten des singulären Punktes, wie sie bei Flächen dritten Grades auftreten, näher betrachten.

a) Es sei erstlich der Berührungs-Kegel ein eigentlicher Conus. Seine Gestalt giebt eine erste Vorstellung von der Fläche in der Nähe des Punktes P. die Ebene eines Schnittes S treffe den Kegel in den beiden Geraden s und t sowie den asymptotischen Kegel in den Geraden p, q und r. Alsdann hat die Gleichung des Schnittes diese Gestalt:

$$S \equiv pqr + \mu st = 0.$$

Sind die beiden Geraden s und t reell, so erlangt S im Punkte P einen eigentlichen Doppelpunkt. Wird K_2 von der Ebene des Schnittes berührt, so wird P ein Rückkehrpunkt der Curve S. Er wird endlich ein isolirter, der Curve S zugeordneter Punkt. wenn K_2 von S nur in seiner Spitze getroffen wird. Dieser Punkt ist im Allgemeinen ein elliptischer; er wird ein Kreispunkt, wenn die Ebene des Schnittes den Kreisschnitten des Berührungskegels parallel wird. In allen diesen Fällen sind s und t die Tangenten des singulären Punktes der Curve und ihre Asymptoten laufen mit p, q und r parallel.

Schneidet der Berührungs-Kegel die Fläche in einer der Geraden p, q, r, z. B. in r, so zerfällt jeder durch diese gelegte Schnitt in eben diese Gerade und einen Kegelschnitt, welcher den singulären Punkt durchsetzt, und dessen Asymptoten mit p und q parallel sind.

Ist auch noch die Gerade q beiden Flächen gemein, so trifft eine durch jene gelegte Ebene die Fläche noch in einer dritten Geraden, die mit p parallel ist. Wir enthalten uns der weiteren Specification der hier noch möglichen Fälle.

Ein einfaches Beispiel der soeben betrachteten Singularität bietet die Fläche dar, welche von der Curve, deren Gleichung die folgende ist:

$$(z+1)([z-1]^2+x^2)+(z-1)=0$$

bei einer Rotation um die z-Axe erzeugt wird. In Betreff der Gestalt jener Curve vergl. Plücker's System (Taf. IV. Fig. XXIX). Die Gleichung der erwähnten Fläche wird:

$$z(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2-z^2)=0.$$

Der singuläre Punkt liegt im Anfangspunkte der Coordinaten; sein Berührungs-Kegel ist, wie auch von vorneherein zu erwarten, ein Rotations-Kegel, dessen Axe mit der Rotations-Axe zusammenfällt. Im mehrfachen Punkte hängt an einer zugespitzten Schale ein tropfenförmiger ebenfalls zugespitzter und in sich abgeschlossener Theil der Fläche.

b) Wenn K'_2 ein imaginärer Kegel wird, so geht P in einen isolirten, der Fläche zugeordneten Punkt über. Er wird für jeden durch ihn gelegten Schnitt ein isolirter Punkt, der im Allgemeinen elliptisch und demjenigen Punkte gleich ist, in welchem der ellipsoidische Punkt, als welchen man den imaginären Kegel ansprechen kann, vom Schnitte getroffen wird. Ist die letztere einem Kreisschnitte des ellipsoidischen Punktes parallel, so wird dieser für den Schnitt ein Kreispunkt.

Als Beispiel für diese Singularität führen wir die Fläche an, welche durch eine Rotation um die z-Axe von der Curve, deren Gleichung

$$(z+2)([z+1]^2+x^2)-6\left(z+\frac{1}{3}\right)=0.$$

ist, beschrieben wird. Diese Fläche hat die Gleichung:

$$z(x^2+y^2+z^2)+2(x^2+y^2+2z^2)=0.$$

Ihr Einsiedler liegt im Anfangspunkte der Coordinaten und kann als ein verschwindendes Rotations-Ellipsoid betrachtet werden, dessen mit der z-Axe zusammenfallende Rotations-Axe sich zum Durchmesser des Aequators wie $\sqrt{\frac{1}{2}}:1$ verhält. Ausser dem isolirten Punkte weist die Fläche noch eine schildförmige Schale mit einem Inflexions-Kreise auf, für die eine Ebene, welche auf der z-Axe senkrecht steht und um die doppelte Linien-Einheit vom Anfangspunkte entfernt ist.

c) Wenn die Function K_2 in zwei reelle Factoren des ersten Grades zerfällt, so unterscheiden wir erstens den Fall, wo beide Factoren reell und verschieden sind. Alsdann besteht der Berührungs-Kegel aus zwei reellen, sich schneidenden Ebenen. Eine jede von ihnen trifft die Fläche in drei geraden Linien, von denen mindestens eine reell ist. Eine durch eine dieser Geraden gelegte Ebene schneidet die Fläche ausser in dieser Geraden noch in einem Kegelschnitte, welcher durch den Punkt P geht, und nimmt die Ebene noch einen der drei Durchschnitte der zweiten Berührungs-Ebene auf, so trifft sie die Fläche noch in einer dritten geraden Linie, welche dem Durchschnitte der Ebene und des asymptotischen Kegels parallel ist. Jeder andere Schnitt, dessen Ebene mit der Kante der Berührungs-Ebenen nur einen Punkt gemein hat, besteht aus einer Curve dritten Grades, die in diesem Punkte einen eigentlichen Doppelpunkt besitzt. Eine Ebene aber endlich, welche durch die Kante geht, schneidet die Fläche in einer Curve, für die P ein Rückkehrpunkt ist. Für keinen Schnitt, in dessen Ebene P liegt, kann dieser Punkt ein isolirter werden. Es ist leicht, in jedem der aufgeführten Fälle, die Tangenten des Doppelpunktes, so wie die Asymptoten und die Gleichung des Schnittes anzugeben. Ferner auch halten wir es für überflüssig die Modificationen anzugeben, welche eintreten, wenn von den Durchschnitten der Berührungs-Ebenen zwei oder alle drei gusammenfallen, wenn die Kante jener Ebenen ganz in die Fläche zu liegen kommt u. s. w.

Als Beispiel einer Singularität dieser Art führen wir die der sonderbar gestaltenen Fläche an, welche durch folgende Gleichung repräsentirt wird:

$$z^3-xy=0.$$

Der singuläre Punkt derselben liegt im Anfangspunkte der Coordinaten. Der asymptotische Kegel besteht aus drei mit der xy-Ebene zusammenfallenden Ebenen, während die Berührungs-Ebe-

nen die beiden anderen Coordinaten-Ebenen sind. Ebenen, die auf der z-Axe senkrecht stehen, schneiden die Fläche in gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten mit den beiden anderen Axen parallel sind, und Ebenen, die auf einer von den letzteren senkrecht stehen, liefern als Schnitte kubische Parabeln, deren Wendungspunkte auf der Axe liegen; die Tangenten dieser Punkte sind der z-Axe parallel. Die drei Durchschnitts-Linien der Berührungs-Ebenen fallen zusammen, und zwar die einen in die x-Axe, die anderen in die y-Axe; diese sind folglich Inflexions-Linien der Fläche. Eine Ebene, welche die z-Axe im Anfangspunkt trifft, liefert als Schnitt eine Curve dritten Grades, die in jenem einen eigentlichen Doppelpunkt aufweist; diese artet, wenn die Ebene mit der xy-Ebene zusammenfällt, in das System dreier Geraden aus, von denen zwei mit der x-Axe und der y-Axe zusammenfallen, die dritte aber im Unendlichen liegt. Der Schnitt einer durch die z-Axe gelegten Ebene ist eine Neil'sche Parabel, deren Axe eben jene Gerade ist, und deren Rückkehrpunkt in den mehrfachen Punkt fällt.

d) Sind die Factoren, in welche K_2 sich auflösen lässt, beide imaginär, so besteht die Berührungs Fläche aus zwei imaginären, in reellen Geraden sich schneidenden Ebenen, oder, was dasselbe besagt, aus dieser Geraden. Jeder Schnitt, dessen Ebene mit der letzteren nur den mehrfachen Punkt gemein hat, ist eine Curve dritten Grades, welcher der Punkt P als isolirter Punkt zugeordnet ist. Im Allgemeinen wird dieser elliptisch sein; in den beiden Schnitten jedoch, deren Ebenen mit dem Kreisschnitte des verschwindenden elliptischen Cylinders parallel sind, als welcher die berührende Gerade angesprochen werden kann, wird er ein Kreispunkt. Sämmtliche Schnitte, deren Ebenen durch die Kante der beiden imaginären Berührungs-Ebenen gehen, erlangen im Allgemeinen in P eine Spitze. Die Fläche selbst zeigt also in P eine Spitze. Eine Singularität dieser Art finden wir z. B. an der Fläche, welche beschrieben wird, wenn die Neil'sche Parabel um ihre Axe gedreht wird. Ihr Rückkehrpunkt wird die Spitze der Fläche, ihre Axe die berührende Gerade.

e) Es kann endlich K_2 in zwei reelle und gleiche Factoren des ersten Grades zerfallen, da denn die Berührungs-Fläche aus zwei zusammenfallenden Ebenen besteht. Von ihren sechs Durchschnitten mit der Fläche fallen je zwei zusammen. Eine durch einen solchen Durchschnitt gelegte Ebene schneidet die Fläche im Allgemeinen ausser in jenem noch in einem Kegelschnitte, welcher diese Gerade im singulären Punkte berührt. Jeder andere durch den singulären Punkt gehende Schnitt ist eine Curve dritten Grades, für die jener ein Rückkehrpunkt ist; die zusammenfallenden Tangenten des letzteren sind die Durchschnittslinien der Berührungs- und der Schnitt-Ebene. Die Gleichung

$$xy(x+y)-z^2=0$$

gehört einer Fläche an, für die der Coordinaten-Anfangspunkt ein mehrfacher Punkt der beschriebenen Art ist. Die Berühr---

Ebenen fallen mit der xy-Ebene zusammen, welche die Fläche in der x- und y-Axe und der Geraden $\{z=0,\ x+y=0\}$ schneidet. Ebenen, welche durch die z-Axe gehen, schneiden die Fläche im Allgemeinen in Neil'schen Parabeln, deren Rückkehrpunkt in dem Anfangspunkte, und deren Axe in der xy-Ebene liegt. Diese Parabeln arten in drei Gerade aus, von denen eine unendlich weit liegt, die beiden anderen aber in der xy-Ebene zusammenfallen, sobald die Schnitt-Ebene durch eine der drei näher angegebenen Geraden geht. Ebenen, die auf der z-Axe senkrecht stehen, entsprechen Schnitte, deren Gleichung

$$xy(x+y)=\text{const}^2.$$

ist. Sie bestehen aus drei hyperbelartigen Aesten, deren Asymptoten durch die z-Axe gehen und mit den erwähnten drei Geraden parallel laufen. Die Fläche, welche in Bezug auf die xy-Ebene symmetrisch ist, ist aus drei mit ihren Spitzen zusammenlaufenden kegelartigen Theilen zusammengesetzt, welche bezüglich in dem ersten, dritten und fünften der sechs von den drei Ebenen

$$x=0,\ y=0,\ x+y=0$$

gebildeten Räume liegen. Von diesen Ebenen berührt eine jede je zwei der kegelartigen Theile längs ihrem Durchschnitte mit der xy-Ebene.

Die Natur des Punktes P einer Fläche dritten Grades steht, wie leicht einzusehen, in engem Zusammenhange mit seiner Lage gegen die früher angeregten Oerter F_2, f_1, f_2 und f_3, deren Gleichungen sich ohne Weiteres aus der Fläche ableiten lassen. Ein Punkt z. B., welcher der Fläche und f_3 gemein ist, erlangt, wenn er gewöhnlicher Krümmung ist, als Osculations-Fläche eine solche, deren asymptotischer Kegel aus zwei Ebenen besteht. Die weiteren Verhältnisse der letzteren Fläche bestimmen sich aus der Lage des Punktes gegen die Flächen f_2, f_1, F_2.

Wir schliessen mit folgenden leicht zu begründenden Bemerkungen. Eine Fläche dritten Grades weist im Allgemeinen nur einen singulären Punkt auf, wie aus dem Umstande folgt, dass eine solche Fläche im Allgemeinen von einer Geraden nur in drei Punkten geschnitten werden kann. Besitzt eine Fläche dritten Grades zwei singuläre Punkte, so liegt nothwendig die Verbindungslinie der letzteren ganz in der Fläche, und entweder wird diese Linie eine Doppellinie oder es besteht die Fläche aus dem Complex einer durch die Verbindungslinie gehenden Ebene und einer Fläche zweiten Grades. In dem ersten Falle kann die Fläche eine eigentliche Fläche dritten Grades sein, und dann ist keine zweite Doppellinie vorhanden. Existirt eine zweite Doppellinie, so trifft diese nothwendig die erste, und die Fläche besteht aus einer durch beide Gerade gehenden Ebene und einer ebenfalls durch die Gerade gehenden Fläche zweiten Grades. Wenn endlich drei Doppellinien vorhanden sind, so müssen sich diese nothwendig in demselben Punkte schneiden und die Fläche besteht aus dem Systeme der drei Ebenen, welche sich durch je zwei der drei geraden Linien legen lassen. Keine eigentliche Fläche dritten Grades besitzt eine dreifache Linie, ebensowenig eine mehrfache Ebene.

XIII.

Miscellen.

Ueber das reguläre Siebeneck.
Von dem Herausgeber.

Ein gutes geometrisches Beispiel für die Lehre von den Gleichungen des dritten Grades scheint mir die Construction des regulären Siebenecks in den Kreis darzubieten, welches wohl Berücksichtigung bei dem mathematischen Elementar-Unterrichte verdienen dürfte. Ich entlehne dasselbe dem Wesentlichen nach aus Paulli Frisii Operum Tomus Primus. Algebram et Geometriam analyticam continens. Mediolani. 1782. 4. p. 177. Jedoch bemerkt der Verfasser selbst an diesem Orte: „Descriptio heptagoni ad resolutionem aequationis tertii gradus reducitur. Quod cum etiam ex praecedentibus possit colligi praestabit modo reductionem illam exponere, quam Cl. Agnesia secuta est in Probl. IV. Cap. IV. Instit.“ In der Vorrede zu seinem Werke p. 8. sagt er aber über diese berühmte italienische Dame: „Prodiit e Manfredii schola Ramirus Rampinellius Brixiensis, qui profundioris Algebrae studia apud nos detulit, et Rampinellio praeeunte Domina Maria Cajetana Agnesia Analyticas Institutiones edidit anno 1748, opus nitidissimum, ingeniosissimum, et maximum certe opus, quod hactenus ex faeminae alicuius calamo prodierit“ Nun wir wollen die berühmte Agnesi selbst hören, wie sie zur Beschreibung des regulären Siebenecks in den Kreis gelangt. Was wir noch etwa selbst hinzu gethan haben, würde einer Dame gegenüber ungalant sein zu bemerken.

Wir werden unsere Betrachtung an die ohne erforderliche weitere Erläuterung für sich verständliche Figur Taf. II. Fig. 5. anschliessen. Den Halbmesser des gegebenen Kreises bezeich-

nen wir durch r, die Linie OH, d. h. die Entfernung der des Siebenecks von dem Mittelpunkte des gegebenen Kı durch x, welches x wir also im Folgenden als die unbekannte G betrachten werden. Dass, wenn x gefunden, immer auch die Seite des regulären Siebenecks erhalten werden kann, steht sich von selbst.

I. Wir suchen zuerst die Linie AE durch die unbek Grösse x auszudrücken. Offenbar steht CK auf AE senk und es ist

$$AE=2.AK.$$

Augenscheinlich ist aber

$$\Delta ACK \backsim \Delta AOL.$$

Also

$$AO:LO=AC:AK,$$

woraus

$$AK=\frac{LO.AC}{AO}=\frac{LO.AC}{r}.$$

Suchen wir nun AC und LO. Offenbar ist

$$\Delta ABL \backsim \Delta DOH,$$

also

$$DO:OH=AB:AL=DE:AL,$$

d. i.

$$r:x=2\sqrt{r^2-x^2}:AL,$$

woraus

$$AL=\frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{r}, \quad AC=2.AL=\frac{4x\sqrt{r^2-x^2}}{r}.$$

Ferner ist in denselben ähnlichen Dreiecken

$$DO:DH=AB:BL=DE:BL,$$

d. i.

$$r:\sqrt{r^2-x^2}=2\sqrt{r^2-x^2}:BL,$$

woraus

$$BL=\frac{2(r^2-x^2)}{r}.$$

h

$$LO = BO - BL = r - \frac{2(r^2 - x^2)}{r} = \frac{2x^2 - r^2}{r}.$$

tuiren wir die gefundenen Ausdrücke von AC und LO in
ɔen gefundenen Ausdruck

$$AK = \frac{LO.AC}{r},$$

ıalten wir

$$AK = \frac{4x(2x^2 - r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^3},$$

h

$$AE = 2.AK = \frac{8x(2x^2 - r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^3}.$$

. Wir suchen ferner die Linie AD durch die unbekannte
e x auszudrücken. Das Dreieck MON hat offenbar an der
MN gleiche Winkel NMO und MNO; also ist

$$\Delta\, MON \backsim \Delta\, AOB,$$

ɔlglich

$$AO : AB = MO : MN,$$

s

$$MN = \frac{AB.MO}{AO} = \frac{2.MO\sqrt{r^2 - x^2}}{r}.$$

weil offenbar $BL = LM$ ist:

$$MO = BO - BM = BO - 2.BL,$$

nach I.

$$MO = r - \frac{4(r^2 - x^2)}{r} = \frac{4x^2 - 3r^2}{r}.$$

ist nach dem Vorhergehenden

$$MN = \frac{2(4x^2 - 3r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2}.$$

ɔr ist

$$AM = DN = AB = 2\sqrt{r^2 - x^2},$$

also

$$AD = AM + MN + DN$$

$$= 4\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{2(4x^2 - 3r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2}$$

$$= \frac{2(4x^2 - r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2}.$$

III. Weil nun offenbar

$$AD = AE$$

ist, so ergiebt sich aus I. und II. zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{2(4x^2 - r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2} = \frac{8x(2x^2 - r^2)\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2},$$

d. i. die Gleichung

$$r(4x^2 - r^2) = 4x(2x^2 - r^2),$$

und hieraus mittelst gehöriger Entwickelung die Gleichung

$$8x^3 - 4rx^2 - 4r^2x + r^3 = 0.$$

Ueber diese Gleichung bemerkt P. Frisi a. a. O. tadelnd: „quae (aequatio) apud Agnesiam inverso secundi et quarti termini signo legitur“ was freilich der galante Italiener immerhin hätte mit Stillschweigen übergehen können.

Um nun die Gleichung

$$8x^3 - 4rx^2 - 4r^2x + r^3 = 0$$

oder

$$x^3 - \frac{1}{2}rx^2 - \frac{1}{2}r^2x + \frac{1}{8}r^3 = 0$$

aufzulösen, wollen wir aus derselben zuerst das zweite Glied wegschaffen, wenn dies auch nach dem, was früher in diesem Archive über die cubischen Gleichungen bemerkt worden ist, gerade nicht unbedingt nöthig wäre. Zu dem Ende setzen wir in bekannter Weise

$$x = u + \frac{1}{6}r,$$

und erhalten hierdurch leicht:

$$0 = u^3 + \frac{1}{2}ru^2 + \frac{1}{12}r^2u + \frac{1}{216}r^3$$
$$-\frac{1}{2}ru^2 - \frac{1}{6}r^2u - \frac{1}{72}r^3$$
$$-\frac{1}{2}r^2u - \frac{1}{12}r^3$$
$$+\frac{1}{8}r^3,$$

d. i.

$$u^3 - \frac{7}{12}r^2u + \frac{7}{216}r^3 = 0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$u^3 - au - b = 0,$$

so ist

$$a = \frac{7}{12}r^2, \quad b = -\frac{7}{216}r^3;$$

folglich

$$\frac{4}{27}a^3 = \frac{343}{11664}r^6, \quad b^2 = \frac{49}{46656}r^6.$$

Weil hiernach

$$\frac{4}{27}a^3 > b^2$$

ist, so hat die Gleichung

$$u^3 - \frac{7}{12}r^2u + \frac{7}{216}r^3 = 0$$

drei sämmtlich unter einander ungleiche reelle Wurzeln, zwei negative und eine positive*), und es frägt sich nun, welche dieser drei reellen Wurzeln im vorliegenden Falle genommen werden muss, was sich leicht etwa auf folgende Art entscheiden lässt.

Für das reguläre Sechseck im Kreise ist bekanntlich

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{3},$$

so offenbar $OH > \frac{1}{6}r$. Folglich ist um so mehr für das reguläre Siebeneck

*) M. s. z. B. Archiv. Thl. VI. S. 7.

$$OH > \frac{1}{6}r, \text{ d. i. } x > \frac{1}{6}r;$$

und wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$x = u + \frac{1}{6}r$$

muss also jedenfalls u positiv sein, woraus sich ergiebt, d
man für u immer die eine positive Wurzel der Gleichung

$$u^3 - \frac{7}{12}r^2u + \frac{7}{216}r^3 = 0$$

nehmen muss, welche dieselbe überhaupt hat. Ist aber auf di
Weise u gefunden, so ist

$$x = u + \frac{1}{6}r,$$

und die Seite des regulären Siebenecks dann auch leicht zu fin

Weil die Gleichung

$$u^3 - \frac{7}{12}r^2u + \frac{7}{216}r^3 = 0$$

zu dem sogenannten irreduciblen Falle der cubischen Gleich
gen gehört, und sich daher bei dem gegenwärtigen Zustande
Analysis bloss mit Hülfe der goniometrischen Functionen und
ren Tafeln auflösen lässt, so hat freilich die obige Bestimm
der Seite des regulären Siebenecks einen eigentlichen wiss
schaftlichen Werth gar nicht, da man ja trigonometrisch die S
ten aller regulären Vielecke im Kreise bekanntlich sehr leicht
andere Weise berechnen kann. Als ein Uebungsbeispiel in
Lehre von den cubischen Gleichungen für Anfänger scheint
indess die obige Methode der Agnesi immerhin recht zweckm
sig zu sein, und verdiente daher wohl an diesem Orte geleg
lich mitgetheilt zu werden. Als etwas Anderes wünsche ich
Obige auch durchaus nicht betrachtet zu sehen.

XIV.

Ueber die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke.

Von

dem Herausgeber.

In einem kürzlich erschienenen Schulprogramm: Die Ent-
ernungsörter geradliniger Dreiecke. Eine geometri-
che Abhandlung von C. F. A. Jacobi, Professor in
'forta. Naumburg. 1851., hat Herr Professor C. F. A. Ja-
obi in Schul-Pforta die sogenannten Entfernungsörter gerad-
iger Dreiecke einer sehr ausführlichen geometrischen Betrach-
ng unterworfen. Man versteht unter den Entfernungsörtern
eradliniger Dreiecke die geometrischen Oerter derjenigen
'unkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks, für welche die
lgebraische) Summe ihrer Entfernungen von den drei Seiten des
reiecks eine constante Grösse ist. Denselben Gegenstand hat
ch schon Herr Timmermanns in einer: Problèmes et thé-
rèmes sur les polygones et sur les polyèdres über-
chriebenen Abhandlung, die man in den Annales de Mathé-
atiques pures et appliqués, ouvrage periodique,
edigé par M. J. D. Gergonne. T. XVIII. p. 217. (Nismes.
828.) findet, kurz betrachtet, und Herr Professor Jacobi hat,
rie er auch selbst sagt, seinen Auslauf von den von Herrn
'immermanns gefundenen Sätzen genommen. So gern ich
uch anerkenne, dass namentlich in dem genannten Schulprogramm
urch sinnreiche Combinationen viele bemerkenswerthe geometri-
che Relationen aufgefunden worden sind, so muss ich doch auf
er anderen Seite gestehen, dass es mir scheint, man erhalte
urch die bisherigen Behandlungen doch keine recht deutliche und
estimmte Einsicht in die eigentliche Natur dieses an sich in der
hat höchst einfachen und leichten Gegenstandes. Ich will mir da-
er erlauben, in diesem Aufsatze kurz zu zeigen, wie man nach

meiner Ansicht denselben behandeln muss, wenn man mit wenigen Zügen sogleich zu völliger Klarheit über seine eigentliche Natur kommen will. Indem ich nun bemerke, dass ich im Folgenden die Entfernung eines Punktes von einer Seite des vorliegenden Dreiecks jederzeit als positiv oder als negativ betrachten werde, jenachdem dieselbe, von der in Rede stehenden Seite an gerechnet, nach dem inneren Raume des Dreiecks oder nach ausserhalb hin liegt, lässt sich die Aufgabe, auf deren Auflösung es hier ankommt, in folgender Weise aussprechen:

Aufgabe.

Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu finden, für welche die Summe ihrer Entfernungen von den drei Seiten eines gegebenen geradlinigen Dreiecks eine constante Grösse ist.

Um diese Aufgabe sogleich in völliger Allgemeinheit aufzulösen, wollen wir das gegebene Dreieck durch ABC bezeichnen; A und C seien die inneren Winkel desselben an den gleichnamigen Spitzen, B sei der Aussenwinkel desselben an der dritten Spitze; die Seiten werden wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet.

Wir wollen nun die drei Seiten des Dreiecks als die positiven Theile der ersten Axen dreier rechtwinkliger Coordinatensysteme, und die positiven Theile der zweiten Axen der betreffenden Systeme immer nach dem inneren Raume des gegebenen Dreiecks hin annehmen. Der positive Theil der ersten Axe des ersten Systems sei also AB, und A sei der Anfangspunkt dieses Systems; die Coordinaten in diesem Systeme wollen wir durch x_c, y_c bezeichnen. Der positive Theil der ersten Axe des zweiten Systems sei BC, und B sei der Anfangspunkt dieses Systems; die Coordinaten in diesem Systeme mögen durch x_a, y_a bezeichnet werden. Der positive Theil der ersten Axe des dritten Systems sei AC, und A sei der Anfangspunkt dieses Systems; die Coordinaten in diesem Systeme wollen wir durch x_b, y_b bezeichnen. Dies vorausgesetzt, liefern uns, wenn die Coordinaten x_a, y_a; x_b, y_b; x_c, y_c sich jetzt sämmtlich auf denselben Punkt in der Ebene des gegebenen Dreiecks beziehen, die allgemein bekannten Formeln der Coordinatenverwandlung sogleich die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x_c = c + x_a \cos B - y_a \sin B, \\ y_c = \phantom{c+{}} x_a \sin B + y_a \cos B \end{cases}$$

und

$$2)\quad \begin{cases} x_c = x_b \cos A + y_b \sin A, \\ y_c = x_b \sin A - y_b \cos A; \end{cases}$$

wobei man sich zu erinnern hat, wie nach den vorher gegebenen

Bestimmungen die positiven y genommen werden sollen. Aus vorstehenden Gleichungen ergiebt sich:

$$x_c \sin B - y_c \cos B = c \sin B - y_a,$$
$$x_c \sin A - y_c \cos A = y_b;$$

also

$$y_a = c \sin B - x_c \sin B + x_c \cos B,$$
$$y_b = \qquad x_c \sin A - y_c \cos A,$$
$$y_c = \qquad y_c;$$

folglich

$$y_a + y_b + y_c = c \sin B + x_c(\sin A - \sin B) + y_c(1 - \cos A + \cos B).$$

Soll nun die Summe $y_a + y_b + y_c$, d. h. eben die Summe der Entfernungen des Punktes, auf welchen sich alle Coordinaten im Vorhergehenden beziehen, von den drei Seiten des gegebenen Dreiecks, eine gegebene constante Grösse sein, die wir durch k bezeichnen wollen, so muss

$$y_a + y_b + y_c = k,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$3) \quad k = c \sin B + x_c(\sin A - \sin B) + y_c(1 - \cos A + \cos B)$$

sein, d. h. der in Rede stehende Punkt, den wir durch $(x_c\, y_c)$ bezeichnen können, muss in der durch diese Gleichung in dem Systeme der x_c, y_c charakterisirten geraden Linie liegen, und obige Gleichung ist also die Gleichung des gesuchten Orts in so allgemeiner Form, wie man nur wünschen kann. Auf diese höchst einfache Weise ist aber nach meiner Meinung in der That die ganze Sache in ihrem wesentlichen Theile erledigt, und alle übrige Zuthat macht im Ganzen gar keine Schwierigkeit mehr. Ich will mir indess erlauben, doch noch einige Schritte weiter zu gehen, ohne diesem Aufsatze, der Einfachheit des Gegenstandes wegen, eine grössere Ausdehnung geben zu dürfen.

Bringt man die Gleichung 3) auf die Form

$$4) \quad y_c = -\frac{\sin A - \sin B}{1 - \cos A + \cos B} x_c + \frac{k - c \sin B}{1 - \cos A + \cos B},$$

oder, weil

$$\sin A - \sin B = -2 \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \cos \tfrac{1}{2}(A + B),$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2}(A + B)$$

und

$$A-B=-C$$

ist, auf die Form

$$5)\quad y_c=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C}{1-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C}x_c-\frac{k-c\sin B}{1-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C};$$

so erhellet, weil in dieser Gleichung der Coefficient

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C}{1-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C}$$

von x_c von der constanten Grösse k ganz unabhängig ist, dass für alle Werthe dieser Constanten die Entfernungsörter des gegebenen Dreiecks unter einander parallel sind.

Herr Timmermanns und nach ihm Herr Professor Jacobi lehren folgende Construction eines Entfernungsorts, und namentlich hat der Letztere auch nur vorzugsweise diesen Entfernungsort betrachtet: Auf jeder der beiden Seiten AC und BC des Dreiecks ABC schneide man respective von den Punkten A und B aus ein der Seite AB gleiches Stück ab, und ziehe durch die Endpunkte der abgeschnittenen Stücke eine gerade Linie, welche ein Entfernungsort sein wird. Wir wollen diesen Entfernungsort jetzt etwas genauer betrachten.

Die Endpunkte der auf den Seiten AC und BC abgeschnittenen, der Linie AB gleichen Stücke werden im Systeme der x_c, y_c durch die folgenden Coordinaten bestimmt:

$$c\cos A,\ c\sin A \text{ und } c(1+\cos B),\ c\sin B.$$

Also ist die Gleichung der durch die Endpunkte der abgeschnittenen Stücke gezogenen geraden Linie:

$$y_c-c\sin A=-\frac{\sin A-\sin B}{1-\cos A+\cos B}(x_c-c\cos A),$$

oder, wie man leicht findet:

$$y_c=-\frac{\sin A-\sin B}{1-\cos A+\cos B}x_c+\frac{\sin A-\sin(B-A)}{1-\cos A+\cos B}c,$$

$$6)\quad y_c = -\frac{\sin A - \sin B}{1 - \cos A + \cos B}\, x_c + \frac{\sin A - \sin C}{1 - \cos A + \cos B}\, c.$$

gleichen wir nun diese Gleichung mit der allgemeinen Glei-
ıg 4) der Entfernungsörter, so erhalten wir zur Bestimmung
k die Gleichung

$$k - c\sin B = c(\sin A - \sin C),$$

$$7)\qquad k = c(\sin A + \sin B - \sin C),$$

:hes also für den von Herrn Timmermanns und Herrn
:. Jacobi vorzugsweise betrachteten Entfernungsort der Werth
Constanten k ist.

Man kann die vorhergehende Construction in Bezug auf jede
drei Seiten des Dreiecks ABC ausführen. Bezeichnet man
in Rücksicht auf die Seiten a, b, c die Constanten der durch
vorhergehende Construction sich ergebenden Entfernungsörter
h k_a, k_b, k_c; so ist

$$k_a = a(\sin B + \sin C - \sin A),$$

$$k_b = b(\sin C + \sin A - \sin B),$$

$$k_c = c(\sin A + \sin B - \sin C);$$

$$8)\qquad \frac{k_a}{a} + \frac{k_b}{b} + \frac{k_c}{c} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

$$\sin A + \sin B = \frac{1}{2}\sin(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\sin C = 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C;$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\{\sin\frac{1}{2}(A+B) + \sin\frac{1}{2}C\}\cos\frac{1}{2}C$$

$$= 2\{\sin\frac{1}{2}(A+B) - \sin\frac{1}{2}(A-B)\}\cos\frac{1}{2}C$$

$$= 4\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C,$$

oder, wenn man jetzt B den entsprechenden inneren Winkel d[es] Dreiecks ABC bezeichnen lässt,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C,$$

also

$$9) \quad \frac{k_a}{a} + \frac{k_b}{b} + \frac{k_c}{c} = 4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt auch:

$$10) \quad \begin{cases} c + x_a\cos B - y_a\sin B = x_b\cos A + y_b\sin A, \\ x_a\sin B + y_a\cos B = x_b\sin A - y_b\cos A. \end{cases}$$

Ferner ist

$$x_a = \frac{y_c - y_a\cos B}{\sin B}, \quad x_b = \frac{y_c + y_b\cos A}{\sin A}.$$

Dies, in die erste der Gleichungen 10) gesetzt, giebt:

$$c + \frac{y_c - y_a\cos B}{\sin B}\cos B - y_a\sin B = \frac{y_c + y_b\cos A}{\sin A}\cos A + y_b\sin A,$$

d. i.

$$c + \frac{y_c\cos B - y_a}{\sin B} = \frac{y_c\cos A + y_b}{\sin A},$$

folglich

$$y_a\sin A + y_b\sin B + y_c\sin(B-A) = c\sin A\sin B,$$

d. i.

$$11)\qquad y_a\sin A+y_b\sin B+y_c\sin C=c\sin A\sin B.$$

Bezeichnet man aber die drei den Seiten a, b, c entsprechenden Höhen des Dreiecks ABC durch h_a, h_b, h_c; so ist

$$h_a=c\sin B,\quad h_b=c\sin A.$$

Nun ist $h_c=b\sin A$ und

$$b:c=\sin B:\sin C,\ b=c\frac{\sin B}{\sin C};$$

also

$$h_c=c\frac{\sin A\sin B}{\sin C}.$$

Weil nun nach 11)

$$\frac{y_a}{c\sin B}+\frac{y_c}{c\sin A}+\frac{y_c\sin C}{c\sin A\sin B}=1$$

ist, so ist

$$12)\qquad \frac{y_a}{h_a}+\frac{y_b}{h_b}+\frac{y_c}{h_c}=1.$$

Ist aber Δ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, so ist

$$h_a=\frac{2\Delta}{a},\quad h_b=\frac{2\Delta}{b},\quad h_c=\frac{2\Delta}{c};$$

also nach 12):

$$13)\qquad ay_a+by_b+cy_c=2\Delta.$$

Im gleichseitigen Dreiecke ist $a=b=c$, also

$$y_a+y_b+y_c=\frac{2\Delta}{a},$$

d. i.

$$14)\qquad y_a+y_b+y_c=h,$$

wenn wir in diesem Falle die Höhe des Dreiecks durch h bezeichnen.

Für $k=0$ ist nach 4) die Gleichung des Entfernungsorts:

$$15)\quad y_c=-\frac{\sin A-\sin B}{1-\cos A+\cos B}x_c-\frac{c\sin B}{1-\cos A+\cos B}.$$

Für $k=c\sin B$ ist nach 4) die Gleichung des Entfernungsorts:

$$16)\quad y_c=-\frac{\sin A-\sin B}{1-\cos A+\cos B}x_c,$$

und dieser Entfernungsort geht also durch A. Ueberhaupt wird es drei durch die drei Spitzen des Dreiecks gehende Entfernungsörter geben, über die sich auch mancherlei Betrachtungen anstellen lassen würden.

Ich will indess diese Sache jetzt nicht weiter ausspinnen, glaube aber, dass eine ähnliche Methode wie die obige, bei welcher man die bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung zu Hülfe nimmt, sich auch bei der Entwickelung der Theorie der Entfernungsörter des Tetraeders in Anwendung bringen lassen dürfte, worüber ich vielleicht bei einer anderen Gelegenheit späterhin den Lesern des Archivs einige Mittheilungen machen werde. Das Vorhergehende bitte ich übrigens nur als eine kurze Skizze zu betrachten, die noch weiterer Ausführung bedarf, und soll es mir lieb sein, wenn ein anderer als ich nach der im Obigen vorgezeichneten Methode mittelst der bekannten allgemeinen Formeln zur Coordinatenverwandlung die Entfernungsörter des Tetraeders betrachtet, was, bei einiger analytischen Fertigkeit, wie ich wenigstens glaube, einer besonderen Schwierigkeit nicht unterliegen wird.

XV.

Bemerkung über das Zeichnen von Krystallen u. s. w.

Von

Herrn Doctor Julius Hartmann,

Gymnasiallehrer zu Rinteln.

Eine für stereometrische Körper, Krystalle u. s. w. sehr gefällige Projectionsart ist die sogenannte isographische, bei welcher z. B. das Auge in unendlicher Entfernung von der verticalen Tafel so steht, dass das Bild einer 15 Theile langen zur Tafelspur senkrecht stehenden Linie im Horizontalplan, als die 5 Theile lange Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete$=4$ (in der Tafelspur) und der zweiten Kathete$=3$ erscheint.*)

Dadurch werden im Bilde alle Dimensionen parallel zur Tafel in natürlicher Grösse und Lage; senkrecht zur Tafel in $\frac{1}{3}$ der wirklichen Länge, unter dem Winkel arc tg$=\frac{3}{4}$($=36^0\,52'\,12''$) gegen die Horizontale dargestellt.

Zur Entwerfung eines Gegenstandes mit den Punkten M, N, O... zeichnet man nun bekanntlich die Horizontalprojection mit den entsprechenden Puncten m, n, o..., fällt von diesen Punkten Senkrechte auf die Tafelspur, die diese in μ, ν, o treffen, zieht von letztereren Punkten und unter dem Winkel arc tg$\frac{3}{4}$ mit der Tafel-

---

*) Die Tangente des Erhebungswinkels des Auges (des Winkels, den eine durchs Auge und die Tafelspur gehende Ebene mit dem Horizontalplan macht) $=\frac{1}{5}$.

Tangente der Drehung $=\frac{4}{15}$.

spur — unter sich parallele Linien, macht diese $=\frac{1}{3}$ von $m\mu$, $n\nu$ u. s. w. wodurch man die Punkte m', n', o' erhält, und zieht endlich durch diese Punkte zur Tafelspur senkrechte Linien, auf die man von m', n', o' aus die wahre Höhe der Punkte M, N, O über dem Horizontalplan aufträgt, um die Punkte M', N', O' des Bildes zu gewinnen.

Um die Linien $\mu m'$, $\nu n'$.... in richtiger Lage und Länge zu erhalten, zeichnet man wohl zur Seite ein Dreieck ABC mit den Seiten $AB=4$ (in der Horizontallinie) $BC=3$ und $AC=5$, die $AD=15$ senkrecht zu BA und zieht DC. — wodurch

$$\text{Winkel } CAD = 90 + \text{arctg}\frac{3}{4}; \quad CDA = 12^{0}31'44''$$

wird — um jene Linien durch [illegible]arallelziehen mit AC in ihrer richtigen Lage, durch [illegible]llele m[illegible]t DC, durch die betreffende Punkte m, n, o, gezoge[illegible]chtiger Länge begrenzt zu erhalten. — Statt dieses Dreieck [illegible] zu zeichnen, bedient man sich auch wohl eines dreieckige[illegible]ttchens mit den Winkeln $36^{0}\,52'\,12''$ und dem W[illegible]lement zu CDA) das man an einem in de[illegible]ntalen (Tafelspur) liegenden Lineal hersc[illegible]inkel der Lage, mit letzteren Winkel der La[illegible]ie[illegible]halten.

Diese rein zeichnende Methode hat unter Umständen einiges Unangenehme, z. B. dass man ein grösseres Blatt anwenden muss, als zur Zeichnung selbst nothwendig wäre, weil die ganze Horizontalprojection auch darunter stehen muss, an deren Platze man vielleicht eine andere Figur lieber hätte; — dann wird die Zeichnung durch die Menge Linien, die man wohl hier noch wieder wegwischt, mehr oder weniger verdorben, — und endlich muss die Zwischenzeichnung mit grosser Sorgfalt ausgeführt werden, wenn das Bild einigermassen genau werden soll.

Zur Vermeidung dieser Uebelstände habe ich mich mit Vortheil einer gemischten Methode bedient, nach welcher ich, statt der vorbereitenden Zeichnung, durch die sicherere Rechnung die rechtwinkligen Coordinaten des Bildes ermittelte, und diese dann auftrug.

Nimmt man nämlich die Tafelspur zur Abscissenaxe und nennt

die Abscissen der Punkte m, n... . . . . a
die Ordinaten - - - - . . . . b
die Höhe der Punkte M, N... über dem Horizontalplan h
die Abscissen der Bilder M', N',... x
die Ordinaten - - - - . . . . y

so ist, wie leicht zu sehen:

$$1) \qquad x = a + \frac{4}{15} b$$

$$2) \qquad y = h + \frac{1}{5} b.$$

Sind die Coordinatenzahlen a, b, h, x, y nach einem tausendtheiligen Maassstab in den meisten Fällen höchstens dreiziffrig (Zoll, Linien und Zehntellinien) und rechnet man statt $\frac{1}{5} b$ nur $\frac{2}{10} b$, (d. h. 2. b ohne die letzte Stelle), statt $\frac{4}{15} b$ aber etwa

$$\frac{2}{10} b + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{10} b \right),$$

so wird die ganze Rechnung höchst einfach und kann ohne die geringste Mühe im Kopfe gemacht werden.*)

Um ein ganz einfaches Beispiel anzuführen, sei ein Würfel $MNOPM_1N_1O_1P_1$ von der Seite 225 (d. h. 2 Zoll, 2 Linien, 5 Zehntellinien) zu projiciren, dessen Grundfläche $MNOP$ parallel zum Horizontalplan in einer Höhe $=147$, und dessen Vorderfläche MNN_1M_1 parallel zur Tafel sei;

so hat man:

Punkt	a	b	h	$\frac{2}{10} b$	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{10} b\right)$	Punkt	x	y
m	0	114	147	22.8	7.6	M'	030	170
n	225	114	147	22.8	7.6	N'	255	170
o	225	339	147	67.8	22.6	O'	315	215
p	0	339	147	67.8	22.6	P'	090	215
m_1	0	114	372	22.8	7.6	M'	030	395
n_1	225	114	372	22.8	7.6	N'	255	395
o_1	225	339	372	67.8	22.6	O'	315	440
p_1	0	339	372	67.8	22.6	P'	090	440

*) Zuweilen wählt man, (z. B. weil Punkte im Bilde sonst zu nahe zusammenfallen) statt der obigen Zahl 15, die Zahl 20; dann wird

$$x = a + \frac{1}{5} b$$

$$y = h + \frac{3}{20} b$$

was ebenso leicht zu rechnen ist.

Zum Auftragen dieser berechneten rechtwinkligen Coordinaten bediene ich mich der zwei Lineale, des gewöhnlichen und des rechtwinkligen, deren ersteres an einer langen Seite, das Dreieck an der grösseren Kathete einen in Zoll und Linien getheilten Maassstab hat. Um die Zehntellinien abzumessen, ist an der kleinen Kathete des Dreiecks ein Nonius aufgetragen, ebenso verschiebt sich an der grösseren Kathete ein besonderes Plättchen mit Nonius und eine Oeffnung, durch welche gerade die Spitze einer Copirnadel geht.

Befestigt man das lange Lineal auf dem Zeichnenblatte gehörig, verschiebt mit der linken Hand Dreieck und Plättchen bis zu den verlangten Punkten und sticht mit der rechten Hand die Nadel durch, so erhält man die Punkte des Bildes sehr schnell, sauber und genau, ohne fremde Hülfslinien u. s. w.

Das Anbringen von Maassstab und Nonius an den beiden Linealen, die man doch beim Reisszeug haben muss, leistet übrigens noch bei vielen anderen Arbeiten gute Dienste, unter andern z. B. kann man eine gezeichnete Figur durch Aussmessen ihrer rechtwinkligen Coordinaten und nachheriges Auftragen genau copiren u. s. w. Auch ersetzt ein solcher Maassstab mit seinem Nonius vollkommen einen tausendtheiligen, der also dadurch entbehrlich wird.

XVI.

Einige Bemerkungen über das geradlinige Dreieck.

Von dem
Candid. der Mathematik Herrn Bernh. Möllmann,
Lehrer am Gymnasium zu Osnabrück.

§. 1.

Ich schicke einige bekannte Sätze voraus, welche im Folgenden angewendet werden.

1) Ist im Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 5.) die Seite AB in D halbirt und DE parallel mit BC gezogen, so ist

$$AE = CE, \quad DE = \frac{BC}{2}.$$

Denn zieht man aus E mit AB die Parallele EF, so ist $EF = BD = AD$ als Parallelen zwischen Parallelen und, nach Annahme, Winkel $FEC =$ Winkel BAC, Winkel $ECF =$ Winkel AED nach Construction und Annahme; mithin $\triangle CEF \cong \triangle ADE$, folglich

$$AE = CE, \quad CF = DE = BF \text{ oder } DE = \frac{BC}{2}, \text{ q. e. d.}$$

Zusatz. Wird im Trapez $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 6.) dessen parallele Seiten AB, CD sein mögen, durch den Halbirungspunkt E von BC mit AB und CD eine Parallele gezogen, so geht dieselbe durch den Halbirungspunkt der Seite AD. Denn zieht man AC, so halbirt EF die Linie AC, also auch die Seite AD.

2) Verbindet man (Taf. IV. Fig. 5.) die Mitte D von AB mit der Mitte E von AC, so ist diese Verbindungslinie der Seite BC parallel und die Hälfte derselben.

§. 2.

1) Sind im spitzwinkligen Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 11.) die Höhen AD, BE, CF gezogen und die Fusspunkte D, E und F derselben mit einander verbunden, so ist (nach §. 1. 5))

Winkel ABC = Winkel AEF, Winkel ABC = Winkel CED;

folglich

Winkel AEF = Winkel CED,

mithin

Winkel BEF = Winkel BED;

ebenso

Winkel ADE = Winkel ADF, Winkel CFD = Winkel CFE.

Die Höhen des Dreiecks ABC halbiren die Winkel des Dreiecks DEF und müssen sich daher (nach §. 1. 7)) in einem Punkte O schneiden.

Sind im stumpfwinkligen Dreieck ABC (Taf. IV. Fig. 12.) die Höhen AD, BE, CF gezogen, so müssen sich doch zwei derselben, z. B. die aus den spitzen Winkeln gefällten Höhen AD und CF, in einem Punkte O schneiden und sie bilden das spitzwinklige Dreieck AOC, in welchem AF und CD zwei Höhen sind. Dann muss nach Oben das aus O auf AC gefällte Loth durch den Punkt B gehen und mit der Höhe BE zusammenfallen. Beim stumpfwinkligen Dreieck schneiden sich daher gleichfalls die drei Höhen in einem Punkte.

Verbindet man auch hier die Fusspunkte D, E, F, so werden, wie sich leicht ergiebt, die Winkel des Dreiecks DEF durch EO, AF, CD halbirt.

Im rechtwinkligen Dreieck schneiden sich auch die Höhen in einem Punkte und es geht alsdann das Dreieck DEF in das Loth über, welches aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gefällt ist.

2) Vergleicht man die hier hergeleiteten Sätze mit §. 1. 7)., so erhellet sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

Die drei Spitzen eines spitzwinkligen Dreiecks sind die Mittelpunkte der dem neuen Dreiecke, welches durch die Verbindung der Fusspunkte seiner Höhen entsteht, angeschriebenen Kreise und der Durchschnitt der Höhen ist der Mittelpunkt des dem neuen Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

Die Spitze eines stumpfwinkligen Dreiecks, welche den Scheitel des stumpfen Winkel bildet, ist der Mittelpunkt des dem neuen Dreiecke, welches durch die Verbindung der Fusspunkte seiner Höhen entsteht, eingeschriebenen Kreises und der Durchschnitt der Höhen und die beiden anderen Spitzen sind die Mittelpunkte der dem neuen Dreiecke angeschriebenen Kreise.

§. 3.

Es seien im Dreieck ABC (Taf. V.) die Winkel $2x$, $2y$, $2z$ bei A, B, C halbirt, die halbirenden Linien über ihren Durchschnitt O hinaus bis zu den Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 der angeschriebenen Kreise verlängert und aus O, O_1, O_2, O_3 die Lothe OM_1, OM_2, OM_3, O_1N_1, O_1N_2, O_1N_3, O_2P_1, O_2P_2, O_2P_3, O_3S_1, O_3S_2, O_3S_3 auf die Seiten des Dreiecks gefällt, so ist, wenn wir die Seiten des Dreiecks a, b, c nennen, wie sich auf der Stelle ergiebt:

1) $BM_1 = BM_3 = \frac{a+c-b}{2}$,

2) $CM_1 = CM_2 = \frac{a+b-c}{2}$,

3) $AM_2 = AM_3 = \frac{b+c-a}{2}$,

4) $AN_2 = AN_3 = \frac{AN_2 + AN_3}{2} = \frac{a+b+c}{2}$, etc.

5) $CN_1 = CN_2 = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2} = BM_1$, etc.

6) $BN_1 = BN_3 = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} = CM_1$, etc.

7) $BP_1 = \frac{a+b+c}{2}$, $CS_1 = \frac{a+b+c}{2}$;

8) $BS_1 = CP_1$, etc.

Das in der Mitte F_1 der Linie BC errichtete Loth geht also auch durch die Mitte der Linie P_1S_1, mithin (§. 1. Zus. I.) durch die Mitte E_3 der Linie O_2O_3. Zugleich geht dieses Loth durch den Mittelpunkt O_4 des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, halbirt den unterhalb BC liegenden Bogen desselben und muss desshalb mit der Linie AO_1, welche gleichfalls diesen Bogen halbirt, auf dem Kreise in D_1 zusammentreffen. Da D_1AE_3 ein rechter Winkel ist, so muss auch (§. 1., 4 Zus.) E_3 auf der

Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises liegen. Nun ist, wenn man BD_1, BE_3 zieht,

$$\text{Winkel } OBD_1 = y + x, \quad BD_1 O = 2z;$$

mithin

$$BOD_1 = 2\text{R} - (y + x + 2z) = y + x;$$

$$\text{Winkel } D_1 B O_1 = \text{R} - (y + x), \quad \text{Winkel } BD_1 O_1 = 2R - 2z;$$

also

$$\text{Winkel } BO_1 D_1 = 2\text{R} - [\text{R} - (y + x) + 2\text{R} - 2z] = \text{R} - (y + x).$$

Es sind daher $BD_1 O$ und $BD_1 O_1$ gleichschenklige Dreiecke, mithin

$$OD_1 = BD_1 = O' D_1.$$

Ferner ist (§. 1., 4.)

$$BE_3 = O_3 E_3 = O_2 E_3.$$

Ebenso erhellt, dass der Kreis durch die Mitten E_1, E_2, D_2, D_3 der Linien $O_1 O_2$, $O_1 O_3$, OO_2, OO_3 geht.

Nennen wir nun die Radien der um, in und an das Dreieck ABC aus O_4, O, O_1, O_2, O_3 beschriebenen Kreise R, r, r_1, r_2, r_3, so folgt auf der Stelle

$$9) \quad r_1 - r = O_1 N_1 - OM_1 = 2D_1 F_1,$$

$$10) \quad r_2 + r_3 = O_2 P_1 + O_3 S_1 = 2E_3 F_1,$$

$$11) \quad r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R.$$

Subtrahirt man (9) von (10), so ergiebt sich die Gleichung

$$r_2 + r_3 - (r_1 - r) = 2(E_3 F_1 - D_1 F_1).$$

Nun ist, wenn man das vom Mittelpunkte O_4 auf die Seiten gefällte Loth positiv oder negativ nimmt, je nachdem es von Innen oder von Aussen auf die Seiten fällt,

$$E_3 F_1 - D_1 F_1 = O_4 D_1 + O_4 F_1 - D_1 F_1 = 2O_4 F_1,$$

mithin

$$12) \quad O_4 F_1 = \frac{1}{4}(r_2 + r_3 - (r_1 - r))$$

und ebenso, wenn man die Lothe $O_4 F_2$, $O_4 F_3$ zieht:

$$13)\quad O_4F_2=\frac{1}{4}(r_1+r_3-(r_2-r)),$$

$$14)\quad O_4F_3=\frac{1}{4}(r_1+r_2-(r_3-r)).$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$15)\quad O_4F_1+O_4F_2+O_4F_3=\frac{1}{4}(r_1+r_2+r_3+3r)=R+r,$$

$$16)\quad O_4F_1+O_4F_2-O_4F_3=\frac{1}{4}(4r_3-(r_1+r_2+r_3-r))=r_3-R;$$

ebenso

$$17)\quad O_4F_1+O_4F_3-O_4F_2=r_2-R,$$

$$18)\quad O_4F_2+O_4F_3-O_4F_1=r_1-R.$$

Auf die leichteste Weise ergeben sich, wenn wir den Inhalt des Dreiecks mit Δ bezeichnen, die bekannten Formeln

$$19)\quad r=\frac{2\Delta}{a+b+c},\qquad 20)\quad r_1=\frac{2\Delta}{b+c-a},$$

$$21)\quad r_2=\frac{2\Delta}{a+c-b},\qquad 22)\quad r_3=\frac{2\Delta}{a+b-c}.$$

Nun ist Dreieck $BOM_1 \backsim$ Dreieck BO_1N_1, mithin

$$BM_1:M_1O=N_1O_1:BN_1$$

oder (Gleichung 1) und 6)):

$$\frac{a+c-b}{2}:r=r_1:\frac{a+b-c}{2},$$

$$23)\quad rr_1=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4};$$

ebenso

$$24)\quad rr_2=\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4},$$

$$25)\quad rr_3=\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4}.$$

Ferner ist Dreieck $AO_1N_2 \backsim$ Dreieck AO_2P_2, mithin

$$AN_2:O_1N_2=O_2P_2:AP_2$$

oder (Gleichung 4) und 6)):

$$\frac{a+b+c}{2}:r_1=r_2:\frac{a+b-c}{2},$$

$$26)\quad r_1 r_2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4};$$

ebenso

$$27)\quad r_1 r_3 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4},$$

$$28)\quad r_2 r_3 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4}.$$

Aus (19) und (20) folgt

$$r r_1 = \frac{4\Delta^2}{(a+b+c)(b+c-a)};$$

mithin nach (23):

$$\frac{4\Delta^2}{(a+b+c)(b+c-a)} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4},$$

$$\Delta^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16},$$

$$29)\quad \Delta = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}.$$

Aus (19), (20), (21), (22) folgt

$$30)\quad r r_1 r_2 r_3 = \frac{16\Delta^4}{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \Delta^2$$

Aus (19) und (20) folgt:

$$r : r_1 = b+c-a : a+b+c$$

oder

$$r_1 - r : r = 2a : b+c-a,$$

$$31)\quad r_1 - r = \frac{2ar}{b+c-a} = \frac{2ar}{\left(\frac{2\Delta}{r_1}\right)} = \frac{a r r_1}{\Delta}.$$

Da nun $r r_1 = \frac{\Delta^2}{r_2 r_3}$ ist, so ist auch

$$32)\quad r_1 - r = \frac{a\Delta}{r_2 r_3},$$

und ebenso

$$33)\quad r_2 - r = \frac{brr_2}{\Delta},\qquad 34)\quad r_2 - r = \frac{b\Delta}{r_1 r_3},$$

$$35)\quad r_3 - r = \frac{crr_3}{\Delta},\qquad 36)\quad r_3 - r = \frac{c\Delta}{r_1 r_2}.$$

Aus (20) und (21) folgt

$$r_1 : r_2 = a + c - b : b + c - a,$$

$$r_1 + r_2 : r_1 = 2c : a + c - b,$$

$$37)\quad r_1 + r_2 = \frac{2cr_1}{a + c - b} = \frac{2cr_1}{\left(\frac{2\Delta}{r_2}\right)} = \frac{cr_1 r_2}{\Delta},$$

oder auch (Gleichung 30)):

$$38)\quad r_1 + r_2 = \frac{c\Delta}{rr_3},$$

und ebenso

$$39)\quad r_1 + r_3 = \frac{br_1 r_3}{\Delta},\qquad 40)\quad r_1 + r_3 = \frac{b\Delta}{rr_2},$$

$$41)\quad r_2 + r_3 = \frac{ar_2 r_3}{\Delta},\qquad 42)\quad r_2 + r_3 = \frac{a\Delta}{rr_1}.$$

Aus (31), (33), (35) folgt

$$43)\quad (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = \frac{abcr^2 rr_1 r_2 r_3}{\Delta^3} = \frac{abc}{\Delta} r^2 = 4Rr^2 \text{ (§ 1., 8).}$$

Aus (31), (37), (39) folgt

$$44)\quad (r_1 - r)(r_1 + r_2)(r_1 + r_3) = 4Rr_1^2;$$

aus (33), (37), (41)

$$45)\quad (r_2 - r)(r_2 + r_1)(r_2 + r_3) = 4Rr_2^2;$$

aus (35), (39), (41)

$$46)\quad (r_3 - r)(r_3 + r_1)(r_3 + r_2) = 4Rr_3^2;$$

aus (37), (39), (41) folgt

$$47)\quad (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3) = \frac{abc(r_1 r_2 r_3)^2}{\Delta^3} = \frac{4Rr_1 r_2 r_3}{r} = R(a + b + c)^2;$$

aus (31), (33), (37) folgt

48) $(r_1-r)(r_2-r)(r_1+r_2)=\frac{abc(rr_1r_2)^2}{\Delta^3}=\frac{4Rrr_1r_2}{r_3}=R(a+b-c)^2$

aus (31), (35), (39)

49) $(r_1-r)(r_3-r)(r_1+r_3)=\frac{abc(rr_1r_3)^2}{\Delta^3}=\frac{4Rrr_1r_3}{r_2}=R(a-b+c$

aus (33), (35), (41) folgt

50) $(r_2-r)(r_3-r)(r_2+r_3)=\frac{abc(rr_2r_3)^2}{\Delta^3}=\frac{4Rrr_2r_3}{r_1}=R(-a+b+c$

Aus (31) und (42) folgt

51) $(r_1-r)(r_2+r_3)=a^2;$

aus (33) und (40) folgt

52) $(r_2-r)(r_1+r_3)=b^2;$

aus (35) und (38) folgt

53) $(r_3-r)(r_1+r_2)=c^2.$

Diese drei letzten Formeln können auch aus (9) und (
abgeleitet werden. Es ist nämlich

$$(r_1-r)(r_2+r_3)=4D'F'.E_3F_1=BC^2=a^2, \text{ etc.}$$

Aus (31) und (41) folgt

$$r_1-r+r_2+r_3=\frac{a}{\Delta}(rr_1+r_2r_3);$$

nun ist (11):

$$r_1-r+r_2+r_3=4R,$$

mithin

$$4R\Delta=a(rr_1+r_2r_3)$$

oder

54) $rr_1+r_2r_3=bc;$

ebenso aus (33) und (39)

55) $rr_2+r_1r_3=ac;$

aus (35) und (37)

$$56)\qquad rr_3+r_1r_2=ab.$$

Aus (51), (52), (53) ergiebt sich durch Addition

$$57)\quad 2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)-2r(r_1+r_2+r_3)=a^2+b^2+c^2.$$

Aus (19), (20), (21), (22) folgt

$$58)\qquad \frac{2\Delta}{r}=a+b+c,$$

$$59)\qquad \frac{2\Delta}{r_1}=b+c-a,$$

$$60)\qquad \frac{2\Delta}{r_2}=a+c-b,$$

$$61)\qquad \frac{2\Delta}{r_3}=a+b-c;$$

mithin

$$\frac{2\Delta}{r_1}+\frac{2\Delta}{r_2}+\frac{2\Delta}{r_3}=a+b+c=\frac{2\Delta}{r},$$

also

$$62)\qquad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$$

oder

$$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\frac{r_1r_2r_3}{r}=\frac{\Delta^2}{r^2},$$

und hieraus

$$63)\qquad \frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_3}$$

oder

$$r_1r_2-rr_1-rr_2=\frac{rr_1r_2}{r_3}=\frac{\Delta^2}{r_3^2},$$

$$64)\qquad \frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}$$

oder

$$r_1r_3-rr_1-rr_3=\frac{rr_1r_3}{r_2}=\frac{\Delta^2}{r_2^2},$$

$$65)\qquad \frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_1}$$

oder

$$r_2r_3-rr_2-rr_3=\frac{rr_2r_3}{r_1}=\frac{\Delta^2}{r_1^2},$$

folglich

$$66)\qquad \frac{\Delta^2}{r^2}+\frac{\Delta^2}{r_1^2}+\frac{\Delta^2}{r_2^2}+\frac{\Delta^2}{r_3^2}=2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)-2r(r_1+r_2+r$$
$$=a^2+b^2+c^2 \text{ (Gl. 57)).}$$

Ferner ist nach (11)

$$r_1+r_2+r_3-r=4R,$$

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r^2+2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)-2r(r_1+r_2+r_3)=16R^2,$$

mithin (nach 57))

$$67)\qquad r_1^2+r_2^2+r_3^2+r^2+a^2+b^2+c^2=16R^2.$$

Es ist für jeden beliebigen Werth von A, B, C, D

$$(A+B+C+D)^3=A^3+B^3+C^3+D^3+3A^2(B+C+D)+3B^2(A+C+$$
$$+3C^2(A+B+D)+3D^2(A+B+C)$$
$$+6ABCD\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$
$$=-2(A^3+B^3+C^3+D^3)+3(A^2+B^2+C^2+D^2)(A+B+C+$$
$$+6ABCD\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right),$$

$$A^3+B^3+C^3+D^3=\frac{1}{2}\Big[-(A+B+C+D)^3$$
$$+3(A^2+B^2+C^2+D^2)(A+B+C+D)$$
$$+6ABCD\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)\Big].$$

Setzt man nun erstlich

$$A=r_1,\quad B=r_2,\quad C=r_3,\quad D=-r;$$

so ergiebt sich

$$+r_2^3+r_3^3-r^3=\frac{1}{2}\Big[-(r_1+r_2+r_3-r)^3$$

$$+r_2^2+r_3^2+r^2)(r_1+r_2+r_3-r)-6r_1r_2r_3r\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}[-64R^3+3(16R^2-a^2-b^2-c^2).4R]$$

$$=64R^3-6R(a^2+b^2+c^2);$$

…n ferner

$$A=\frac{1}{r_1},\ B=\frac{1}{r_2},\ C=\frac{1}{r_3},\ D=-\frac{1}{r}:$$

$$\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}+\frac{1}{r_3^2}-\frac{1}{r^3}=\frac{1}{2}\Big[-\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)^3$$

$$+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\Big)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)-6\frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{r_3}\cdot\frac{1}{r}(r_1+r_2+r_3-r)]$$

$$=-\frac{24R}{2\Delta^2}=-\frac{12R}{\Delta^2}$$

$$\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_3^3}=\frac{12R}{\Delta^2}.$$

ist (nach 11))

$$r_1+r_2+r_3=4R+r,$$

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=(4R+r)^2-\frac{2\Delta^2}{r^2},$$

$$r^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=(r(4R+r))^2-2\Delta^2,$$

(nach 62))

$$\frac{\Delta^4}{r^4}=r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2+2(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3;$$

$${}^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2=\left(\frac{\Delta^2}{r^2}-(4R+r)r\right)^2-((4R+r)r)^2,$$

$$r^2r_1^2+r^2r_2^2+r^2r_3^2+r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2$$
$$=\left(\frac{\Delta^2}{r^2}-(4R+r)r\right)^2-2\Delta^2;$$

nun ist aber (nach 57))

$$\left(\frac{\Delta^2}{r^2}-(4R+r)r\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2,$$

folglich

$$r^2r_1^2+r^2r_2^2+r^2r_3^2+r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2-2\Delta^2$$

oder auch

$$\frac{\Delta^4}{r^2r_1^2}+\frac{\Delta^4}{r^2r_2^2}+\frac{\Delta^4}{r^2r_3^2}+\frac{\Delta^4}{r_1^2r_2^2}+\frac{\Delta^4}{r_1^2r_3^2}+\frac{\Delta^4}{r_2^2r_3^2}$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2-2\Delta^2.$$

Nun, ist

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r^2=16R^2-(a^2+b^2+c^2),$$

folglich

$$70)\quad r_1^4+r_2^4+r_3^4+r^4=256R^4-32(a^2+b^2+c^2)R^2$$
$$+(a^2+b^2+c^2)^2-\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}+4$$
$$=256R^4-32(a^2+b^2+c^2)R^2$$
$$+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}+4\Delta^2;$$

ferner

$$\left(\frac{\Delta^2}{r^2}+\frac{\Delta^2}{r_1^2}+\frac{\Delta^2}{r_2^2}+\frac{\Delta^2}{r_3^2}\right)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

oder

$$71)\quad \frac{\Delta^4}{r^4}+\frac{\Delta^4}{r_1^4}+\frac{\Delta^4}{r_2^4}+\frac{\Delta^4}{r_3^4}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}+4\Delta^2.$$

§. 4.

Ich betrachte jetzt die Figur auf Taf. VI. Dieselbe weicht von derFig. auf Taf. V. nur darin ab, dass einige nicht mehr gebrauchte Linien weggelassen und einige später näher zu bestimmende Linien hinzugefügt sind. Es sind AO_1, BO_2, CO_3 die Höhen des Dreiecks $O_1O_2O_3$; AO_2, BO_1, CO die Höhen des Dreiecks OO_1O_2. Die Gerade, welche D_2 mit E_2 verbindet, geht durch O_4. Zieht man nun OO_4 und verlängert diese Gerade, bis sie las in E_2 auf O_1O_3 errichtete Loth in O_5 trifft, so ist

$$\text{Dr. } OO_4D_2 \cong \text{Dr. } O_5O_4E_2,$$

ithin

$$OO_4 = O_4O_5, \quad OD_2 \# O_5E_2$$

der, da $OD_2 = O_2D_2$ ist, $O_2D_2 \# O_5E_2$, folglich, wenn man O_2O_5 zieht,

$$O_2O_5 \# D_2E_2, \quad O_2O_5 = 2R.$$

Daraus folgt nun auf die leichteste Weise, dass O_5 der Mittelunkt und $2R$ der Radius des um das Dreieck $O_1O_2O_3$ beschriebenen Kreises ist.

Auf dieselbe Weise wird sich ergeben, dass, wenn man O_3O_4 eht und diese Gerade um ihre eigene Grösse verlängert, der ndpunkt alsdann der Mittelpunkt und $2R$ der Radius des um OO_1O_2 beschriebenen Kreises ist. Ebenso verhält es sich rückchtlich des Punktes O_1 und des Dreiecks OO_2O_3 und rückchtlich des Punktes O_2 und des Dreiecks OO_1O_3.

Da D_2E_2 auf AC senkrecht steht, so steht auch die ihr Parallele O_2O_5 auf AC senkrecht. Die Lothe also, welche von O_1, O_2, O_3 resp. auf BC, AC, AB d. h. die Lothe, welche aus den pitzen des Dreiecks $O_1O_2O_3$ auf die Verbindungslinien der usspunkte der Höhen gefällt werden, welche zu den die jedesalige Spitze bildenden Seiten gehören, schneiden sich im Mittelınkte des um $O_1O_2O_3$ beschriebenen Kreises.

Der aus dem Mittelpunkte des um das Dreieck OO_1O_2 behriebenen Kreises nach O_2 gezogene Radius ist parallel D_1E_2. a nun D_1E_2 auf BC senkrecht steht, so muss auch der gennte Radius diese Eigenschaft haben und wir erhalten auch für s Dreieck OO_1O_2 den im vorigen Absatze ausgesprochenen itz.

Dasselbe Resultat ergiebt sich offenbar für die Dreiecke O_1O_3 und OO_2O_3.

Schneidet die O_2 und E_2 verbindende Gerade OO_5 in O_6, so ist, wie sich aus §. 1. 3) auf der Stelle ergiebt, $OO_6 = 2O_5O_6$. Hieraus folgt, dass sich die Geraden, welche O_1, E_3; O_2, E_2 und O_3, E_1 verbinden, in einem Punkte O_6 auf der Geraden OO_5 schneiden.

Dasselbe Resultat ergiebt sich auf dieselbe Weise für die Dreiecke OO_1O_2, OO_1O_3 und OO_2O_3.

Ich fasse die hier gefundenen Resultate kurz zusammen:

1. Die Mittelpunkte der um das Dreieck $O'O_2O_3$ und in und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreise liegen in einer geraden Linie.

2. Der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist vom Mittelpunkte des in dasselbe beschriebenen Kreises so weit entfernt wie vom Mittelpunkte des um das Dreieck $O_1O_2O_3$ beschriebenen Kreises.

3. Der Radius des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist halb so gross wie der Radius des um das Dreieck $O_1O_2O_3$ beschriebenen Kreises.

4. Der Mittelpunkt eines an das Dreieck ABC angeschriebenen Kreises, der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen und der Mittelpunkt des Kreises, welcher um das von dem Mittelpunkte des ein und den Mittelpunkten der beiden anderen angeschriebenen Kreise gebildete Dreieck beschrieben wird, liegen in einer geraden Linie und der zweite Punkt liegt in der Mitte der beiden anderen.

Der Radius des letzteren Kreises ist wiederum das Doppelte von dem Radius des um das ursprüngliche Dreieck beschriebenen Kreises.

5. Das Loth, welches von einem Mittelpunkte der vier durch die Mittelpunkte der ein- und angeschriebenen Kreise gebildeten Dreiecke auf eine der Seiten gefällt wird, ist halb so gross wie die Verbindungslinie zweier dieser Punkte, durch welche die Seite, auf die das Loth gefällt ist, nicht geht.

6. Die drei Geraden O_1E_3, O_2E_2, O_3E_1 schneiden sich in einem Punkte O_6 auf der Geraden OO_5 und es ist

$$OO_5 : OO_4 = O_5O_6 : O_4O_6,$$

die Linie OO_5 also in O_4 und O_6 harmonisch getheilt. Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für die Dreiecke OO_1O_2, OO_1O_3, OO_2O_3.

7. Der um ein Dreieck beschriebene Kreis halbirt die sechs Geraden, welche die vier Mittelpunkte der demselben ein- und angeschriebenen Kreise verbinden.

§. 5.

Ich will jetzt die im dritten und vierten Paragraphen gefundenen Resultate anwenden zur Herleitung von Grössenbeziehungen in den Dreiecken ABC, $O_1O_2O_3$, OO_1O_2, OO_1O_3, OO_2O_3.

Im Anfange des dritten Paragraphen habe ich gezeigt, dass

$$O_1D_1 = OD_1 = BD_1\,,\quad 2D_1F' = r_1 - r$$

ist. Hieraus ergiebt sich leicht

$$1)\quad OO_1^2 = 4BD_1^2 = 4D_1F'.D_1E_3 = 4R(r_1 - r),$$

und ebenso folgt

$$2)\quad OO_2^2 = 4R(r_2 - r),$$

$$3)\quad OO_3^2 = 4R(r_3 - r).$$

Da ferner

$$BE_3 = \frac{O_2O_3}{2}$$

ist, so folgt

$$4)\quad O_2O_3^2 = 4BE_3^2 = 4E_3F_1.E_3D_1 = 4R(r_2 + r_3);$$

ebenso ist

$$5)\quad O_1O_3^2 = 4R(r_1 + r_3),$$

$$6)\quad O_1O_2^2 = 4R(r_1 + r_2).$$

Nun ist

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 + 2AO.OO_1\,,$$

folglich

$$7)\quad AO.OO_1 = \frac{1}{2}(4R(r_1 + r_2) - 4R(r_1 - r) - 4R(r_2 - r)) = 4Rr,$$

ebenso

$$8)\quad BO.OO_2 = 4Rr,$$

$$9)\quad CO.OO_3 = 4Rr.$$

Ferner ist

10) $AO_1.OO_1 = AO.OO_1 + OO_1^2 = 4Rr + 4R(r_1 - r) = 4Rr_1$;

ebenso

$$11)\quad BO_2.OO_2 = 4Rr_2,$$

$$12)\quad CO_3.OO_3 = 4Rr_3.$$

Da $AO.OO_1 = 4Rr$ ist, so folgt

$$AO^2 = \frac{16R^2r^2}{4R(r_1-r)} = \frac{4Rr^2}{r_1-r},$$

mithin (§. 3., 43))

$$13)\quad AO^2 = \frac{(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)}{r_1-r} = (r_2-r)(r_3-r);$$

ebenso

$$14)\quad BO^2 = (r_1-r)(r_3-r),$$

$$15)\quad CO^2 = (r_1-r)(r_2-r).$$

Aus $AO_1.OO_1 = 4Rr_1$ folgt

$$AO_1^2 = \frac{16R^2r_1^2}{4R(r_1-r)} = \frac{4Rr_1^2}{r_1-r} = \frac{(r_1-r)(r_1+r_2)(r_1+r_3)}{r_1-r} \text{(§. 3. Gl.4}$$

folglich

$$16)\quad AO_1^2 = (r_1+r_2)(r_1+r_3);$$

eben so ist

$$17)\quad BO_2^2 = (r_2+r_1)(r_2+r_3),$$

$$18)\quad CO_3^2 = (r_3+r_1)(r_3+r_2).$$

Es ist

$$19)\quad BO_1^2 = OO_1^2 - BO^2 = (r_1+r_2+r_3-r)(r_1-r) - (r_1-r)(r_3-$$
$$= (r_1-r)(r_1+r_2);$$

ebenso

$$20)\quad CO_1^2 = (r_1-r)(r_1+r_3),$$

$$21)\quad AO_2^2 = (r_2-r)(r_2+r_1),$$

$$22)\quad CO_2^2 = (r_2-r)(r_2+r_3),$$

$$23)\quad AO_3^2 = (r_3-r)(r_3+r_1),$$

$$24)\quad BO_3^2 = (r_3-r)(r_3+r_2).$$

Die Formeln 13), ..., 24) lassen sich noch in einer anderen ·m darstellen. Es ist

$$)^2=(r_2-r)(r_3-r)=r_2r_3-r(r_2+r_3-r)=rr_1+r_2r_3-r(r_1+r_2+r_3-r),$$

;lich

$$25)\quad AO^2=bc-4Rr \text{ (§ 3. 11), 54));}$$

nso ist

$$26)\quad BO^2=ac-4Rr,$$

$$27)\quad CO^2=ab-4Rr;$$

ıer

$$28)\quad AO_1^2=(r_1+r_2)(r_1+r_3)=r_2r_3+r_1(r_1+r_2+r_3)$$
$$=rr_1+r_2r_3+r_1(r_1+r_2+r_3-r)=bc+4Rr_1,$$

$$29)\quad BO_2^2=ac+4Rr_2,$$

$$30)\quad CO_3^2=ab+4Rr_3,$$

$$31)\quad BO_1^2=-ac+4Rr_1,$$

$$32)\quad CO_1^2=-ab+4Rr_1,$$

$$33)\quad AO_2^2=-bc+4Rr_2,$$

$$34)\quad CO_2^2=-ab+4Rr_2,$$

$$35)\quad AO_3^2=-bc+4Rr_3,$$

$$36)\quad BO_3^2=-ac+4Rr_3.$$

ist

$$BO_1^2+BO_3^2=-2ac+4R(r_1+r_3)=-2ac+(BO_1+BO_3)^2,$$

;lich

$$37)\quad BO_1.BO_3=ac,$$

ınso

$$38)\quad CO_1.CO_2=ab,$$

$$39)\quad AO_2.AO_3=bc.$$

ıs (1), (2) und (3) folgt

$$)_1^2.OO_2^2.OO_3^2=64R^3(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=256R^4r^2 \text{ (§ 3. 43)),}$$

glich

40) $OO_1 . OO_2 . OO_3 = 16R^2r$;

aus (5), (4), (3) folgt

$O_1O_3^2 . O_2O_3^2 . OO_3^2 = 4R(r_1+r_3) . 4R(r_3+r_2) . 4R(r_3-r) = 256R$

(nach § 3. 46)),

41) $O_1O_3 . O_2O_3 . OO_3 = 16R^2r_3$;

ebenso folgt aus (4), (6), (2) mit Hülfe des § 3.

42) $O_1O_2 . O_2O_3 . OO_2 = 16R^2r_2$;

aus (6), (5), (1)

43) $O_1O_2 . O_1O_3 . OO_1 = 16R^2r_1$.

Ferner ist nach (13), (14), (15)

$AO^2 . BO^2 . CO^2 = (r_1-r)^2(r_2-r)^2(r_3-r)^2 = (4Rr^2)^2$ (§ 3. 43)),

44) $AO . BO . CO = 4Rr^2$;

ebenso folgt aus (23), (24), (18) mit Hülfe des dritten Paragrap

45) $AO_3 . BO_3 . CO_3 = 4Rr_3^2$,

aus (21), (22), (17)

46) $AO_2 . CO_2 BO_2 = 4Rr_2^2$,

aus (19), (20), (16)

47) $BO_1 . CO_1 . AO_1 = 4Rr_1^2$.

Aus (4), (5), (6) folgt

$$O_1O_2^2 . O_1O_3^2 . O_2O_3^2 = 64R^3(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3)$$
$$= \frac{256R^4r_1r_2r_3}{r} = 64R^4(a+b+c)^2 \text{ (vergl. § 3. 47)),}$$

48) $O_1O_2 . O_1O_3 . O_2O_3 = 8R^2(a+b+c)$;

ebenso folgt aus (1), (2), (6)

49) $OO_1 . OO_2 . O_1O_2 = 8R^2(a+b-c)$,

aus (1), (3), (5)

50) $OO_1 . OO_3 . O_1O_3 = 8R^2(a-b+c)$,

aus (2), (3), (4)

51) $OO_2 . OO_3 . O_2O_3 = 8R^2(-a+b+c)$.

Aus (16), (17), (18) folgt

$$AO_1^2.BO_2^2.CO_3^2=(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2(r_2+r_3)^2,$$

folglich

52) $AO_1.BO_2.CO_3=(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3)=R(a+b+c)^2$ (§. 3. 47)),

ebenso aus (21), (19), (15) und §. 3. 48)

53) $AO_2.BO_1.CO=(r_2-r)(r_1-r)(r_1+r_2)=R(a+b-c)^2$;

aus (20), (23), (14) und §. 3. 49)

54) $CO_1.AO_3.BO=(r_1-r)(r_3-r)(r_1+r_3)=R(a-b+c)^2$;

aus (24), (22), (13) und §. 3. 50)

55) $BO_3.CO_2.AO=(r_2-r)(r_3-r)(r_2+r_3)=R(-a+b+c)^2$.

§. 6.

Es ist von Interesse noch folgende Relationen zu bemerken:

1) $O_1O_2^2+O_1O_3^2+O_2O_3^2=8R(r_1+r_2+r_3)=8R(4R+r)$ (§ 5.4),5),6)),

2) $OO_1^2+OO_2^2+O_1O_2^2=8R(r_1+r_2-r)=8R(4R-r_3)$,

3) $OO_1^2+OO_3^2+O_1O_3^2=8R(r_1+r_3-r)=8R(4R-r_2)$,

4) $OO_2^2+OO_3^2+O_2O_3^2=8R(r_2+r_3-r)=8R(4R-r_1)$,

5) $OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2=4R(r_1+r_2+r_3-3r)=4R(4R-2r)$,

6) $O_1O_3^2+O_2O_3^2+OO_3^2=4R(r_1+r_2-r+3r_3)=4R(4R+2r_3)$,

7) $O_1O_2^2+O_2O_3^2+OO_2^2=4R(r_1+r_3-r+3r_2)=4R(4R+2r_2)$,

8) $O_1O_2^2+O_1O_3^2+OO_1^2=4R(r_2+r_3-r+3r_1)=4R(4R+2r_1)$.

(2)–(8) nach dems. §.

Der Inhalt des Dreiecks $O_1O_2O_3$ ist gleich

$$\frac{O_1O_2 . O_1O_3 . O_2O_3}{8R},$$

mithin (§ 5. 48))

9) $$\Delta O_1O_2O_3=\frac{8R^2(a+b+c)}{8R}=R(a+b+c);$$

ebenso (§ 5. 49))

10) $\Delta OO_1O_2 = R(a+b-c)$, (§ 5. 50));

11) $\Delta OO_1O_3 = R(a-b+c)$, (§ 5. 51));

12) $\Delta OO_2O_3 = R(-a+b+c)$.

Zieht man (Taf. V.) M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3, so ist, weil u Viereck BM_1OM_3 ein Kreis beschrieben werden kann,

$$M_1M_3.BO = BM_1.MO + BM_3.M_1O,$$

folglich (§ 3. 1); § 5. 14); § 3. 21)):

$$M_1M_3^2 = \frac{\frac{4(a+c-b)^2r^2_2}{2}}{(r_1-r)(r_3-r)} = \frac{4\Delta^2r^2}{r_2^2(r_1-r)(r_3-r)},$$

ebenso

$$M_1M_2^2 = \frac{4\Delta^2r^2}{r_3^2(r_1-r)(r_2-r)},$$

$$M_2M_3^2 = \frac{4\Delta^2r^2}{r_1^2(r_2-r)(r_3-r)};$$

mithin

$$(M_1M_2.M_1M_3.M_2M_3)^2 = \frac{64\Delta^6r^6}{(r_1r_2r_3)^2(r_1-r)^2(r_2-r)^2(r_3-r)^2},$$

$$M_1M_2.M_1M_3.M_2M_3 = \frac{8\Delta^3r^3}{r_1r_2r_3(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)};$$

folglich (nach § 3. 43))

$$= \frac{8r^3\Delta^3}{r_1r_2r_3.4Rr^2} = \frac{2\Delta}{R}.r^2.$$

Da nun der Radius des um $\Delta M_1M_2M_3$ beschriebenen Kreises ist, so folgt

$$\Delta M_1M_2M_3 = \frac{2\Delta}{R}.\frac{r^2}{4r} = \frac{\Delta}{2R}.r,$$

mithin nach (9)

$$\Delta M_1M_2M_3 \times \Delta O_1O_2O_3 = \frac{r\Delta}{2R}.R(a+b+c) = \frac{r}{2}(a+b+c)\Delta,$$

folglich

13) $\Delta M_1 M_2 M_3 \times \Delta O_1 O_2 O_3 = \Delta^2$.

Zieht man $N_1 N_2$, $N_1 N_3$, $N_2 N_3$, so ist

$$N_1 N_3{}^2 = \frac{r_1{}^2(a+b-c)^2}{(r_1-r)(r_1+r_2)},$$

$$N_1 N_2{}^2 = \frac{r_1{}^2(a+c-b)^2}{(r_1-r)(r_1+r_3)},$$

$$N_2 N_3{}^2 = \frac{r_1{}^2(a+b+c)^2}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)};$$

ithin

$$N_1 N_2 . N_1 N_3 . N_2 N_3 = \frac{r_1{}^3(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)}{(r_1-r)(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

$$= \frac{16 r_1{}^3 \Delta^2}{(b+c-a).4 R r_1{}^2} = \frac{4\Delta^2 r_1}{R(b+c-a)},$$

so

$$\Delta N_1 N_2 N_3 = \frac{\Delta^2}{R(b+c-a)} = \frac{\Delta}{2R} . r_1,$$

glich

14) $\Delta N_1 N_2 N_3 . \Delta O O_2 O_3 = \Delta^2$.

Auf dieselbe Weise wird sich ergeben, wenn man $P_1 P_2$, P_3; $P_2 P_3$ und $S_1 S_2$, $S_1 S_3$, $S_2 S_3$ zieht, dass

$$\Delta P_1 P_2 P_3 = \frac{\Delta}{2R} r_2;$$

15) $\Delta P_1 P_2 P_3 . \Delta O O_1 O_3 = \Delta^2$,

$$\Delta S_1 S_2 S_3 = \frac{\Delta}{2R} r_3;$$

16) $\Delta S_1 S_2 S_3 . \Delta O O_1 O_2 = \Delta^2$

Es ist auch

17) $\Delta N_1 N_2 N_3 + \Delta P_1 P_2 P_3 + \Delta S_1 S_2 S_3 - \Delta M_1 M_2 M_3$

$$= \frac{\Delta}{2R}(r_1 + r_2 + r_3 - r)$$

$$= 2\Delta.$$

Da der Inhalt der Dreiecke $M_1M_2M_3$ etc. gleich dem Producte aus einem constanten Factor $\frac{\Delta}{2R}$ und dem Radius des eingeschriebenen oder der angeschriebenen Kreise ist, so werden hier noch manche Sätze aus den Eigenschaften der Grössen r, r_1, r_2, r_3 abgeleitet werden können. Es ist z. B.

$$\Delta M_1M_2M_3 \times \Delta N_1N_2N_3 \times \Delta P_1P_2P_3 \times \Delta S_1S_2S_3$$
$$= \left(\frac{\Delta}{2R}\right)^4 rr_1r_2r_3 = \frac{\Delta^6}{(2R)^4},$$

$$M_1M_2 \; M_1M_3 . M_2M_3 . AO_1 . BO_2 . CO_3 = \frac{2\Delta}{R} r^2 . R\left(\frac{2\Delta}{r}\right)^2 = (2\Delta)^3,$$

$$\frac{1}{\Delta N_1N_2N_3} + \frac{1}{\Delta P_1P_2P_3} + \frac{1}{\Delta S_1S_2S_3} - \frac{1}{\Delta M_1M_2M_3} = 0, \text{ etc.}$$

Aus (9), (10), (11), (12) lassen sich noch einige bemerkenswerthe Resultate herleiten. Es ist nach diesen Gleichungen

$$2R . \frac{\Delta}{\Delta O_1O_2O_3} = r,$$

$$2R . \frac{\Delta}{\Delta OO_1O_2} = r_3,$$

$$2R . \frac{\Delta}{\Delta OO_1O_3} = r_2,$$

$$2R . \frac{\Delta}{\Delta OO_2O_3} = r_1;$$

mithin

$$2R\left[\frac{\Delta}{\Delta OO_1O_2} + \frac{\Delta}{\Delta OO_1O_3} + \frac{\Delta}{\Delta OO_2O_3} - \frac{\Delta}{\Delta O_1O_2O_3}\right]$$
$$= r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R,$$

$$\frac{\Delta}{\Delta OO_1O_2} + \frac{\Delta}{\Delta OO_1O_3} + \frac{\Delta}{\Delta OO_2O_3} - \frac{\Delta}{\Delta O_1O_2O_3} = 2;$$

ferner

$$\Delta O_1O_2O_3 . \Delta OO_1O_2 . \Delta OO_1O_3 . \Delta OO_2O_3 = 16R^4\Delta^2, \text{ etc.}$$

§. 7.

Denken wir uns (Taf. VI.) den Radius AO_4 gezogen, so ist ΔAO_4D_1 gleichschenklig, mithin (§. 1. 9))

$$R^2 = OO_4^2 + AO.OD_1 = OO_4^2 + 2Rr \quad (§. 5. 7)),$$

folglich

$$1) \quad OO_4^2 = R(R-2r),$$

mithin auch

$$2) \quad OO_5^2 = 4R(R-2r).$$

Denken wir uns gleichfalls O_1O_4 gezogen, so ist, weil im Dreieck OO_1O_5 die Linie O_1O_4 die Seite OO_5 halbirt,

$$OO_1^2 + O_1O_5^2 = 2O_1O_4^2 + 2OO_4^2$$

oder

$$2O_1O_4^2 = 4R(r_1-r) + 4R^2 - 2R(R-2r),$$

$$3) \quad O_1O_4^2 = R(R+2r_1).$$

Da nun aus dem Anfange des vierten Paragraphen erhellt, dass O_1O_4 die Hälfte der Linie ist, welche O_1, den Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks OO_2O_3, mit dem Mittelpunkte des um dasselbe beschriebenen Kreises verbindet: so folgt, dass das Quadrat dieser letztern Linie gleich $4R(R+2r_1)$ ist.

Es ist ferner

$$4) \quad O_2O_4^2 = R(R+2r_2),$$

$$5) \quad O_3O_4^2 = R(R+2r_3).$$

Auch hier lässt sich dieselbe Bemerkung machen.

Addirt man die Gleichungen (1), (3), (4), (5), so ergiebt sich

$$6) \quad OO_4^2 + O_1O_4^2 + O_2O_4^2 + O_3O_4^2 = R(4R + 2(r_1+r_2+r_3-r)) = 12R^2.$$

Aus (2) folgt

$$7) \quad OO_5^2 = 4R(9R - 2(4R+r)) = 36R^2 - (O_1O_2^2 + O_1O_3^2 + O_2O_3^2) \quad (§. 6. 1)).$$

Es ist mithin das Quadrat der Linie, welche den Durchschnit der Höhen des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ mit dem Mittelpunkte des um schriebenen Kreises verbindet, gleich dem Quadrate des dreifa chen Radius, weniger der Summe der Quadrate der Seiten.

Aus (3) folgt

$$4O_1O_4^2 = 4R(9R-2(4R-r_1)),$$

mithin (§. 6. 4))

$$8)\quad 4O_1O_4^2 = 36R^2 - (OO_2^2 + OO_3^2 + O_2O_3^2).$$

Hieraus ergiebt sich, dass das Quadrat der Linie, welche den Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks OO_2O_3 mit dem Mittelpunkte des um dasselbe beschriebenen Kreises verbindet, gleich dem dreifachen Quadrate des Halbmessers, weniger den Quadraten der Seiten ist. Der in der Gleichung (7) für das Dreieck $O_1O_2O_3$ ausgedrückte Satz gilt also auch für die Dreiecke OO_1O_2, OO_1O_3, OO_2O_3.

Es lässt sich OO_5^2 noch auf eine andere Weise darstellen

Es ist nach (§. 6. 5))

$$OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2 = 4R(4R-2r) = 12R^2 + 4R(R-2r),$$

mithin (2)

$$9)\quad OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2 - (O_1O_5^2 + O_2O_5^2 + O_3O_5^2) = OO_5^2.$$

Ferner ist (§. 6. 8)):

$$OO_1^2 + O_1O_2^2 + O_1O_3^2 = 4R(4R+2r_1) = 12R^2 + 4R(R+2r_1);$$

mithin (3)

$$10)\quad OO_1^2 + O_1O_2^2 + O_1O_3^2 - 3(2R)^2 = 4O_1O_4^2.$$

Diese Gleichung giebt für das Dreieck $O_1O_2O_3$ denselben Satz, den die Gleichung (9) für das Dreieck $O_1O_2O_3$ giebt, und die analogen Sätze sind bei den Dreiecken OO_1O_2 und OO_1O_3 zu bemerken.

Nach §. 6. 5) ist:

$$OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2 = 4R(4R-2r),$$

nach (6) und (1):

$$O_1O_4^2+O_2O_4^2+O_3O_4^2+5OO_4^2=12R^2+4R(R-2r),$$

$$\text{11)}\quad OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2-(O_1O_4^2+O_2O_4^2+O_3O_4^2)=5OO_4^2.$$

Aehnliche Sätze ergeben sich für $5O_1O_4^2$, $5O_2O_4^2$, $5O_3O_4^2$.

Es ist, wie sich leicht ergiebt,

$$O_2E_2^2=\frac{O_1O_2^2+O_2O_3^2}{2}-\frac{O_1O_3^2}{4},$$

olglich

$$O_2O_6^2=\frac{4}{9}\left(\frac{O_1O_2^2+O_2O_3^2}{2}-\frac{O_1O_3^2}{4}\right),$$

ithin

$$O_1O_6^2+O_2O_6^2+O_3O_6^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}(O_1O_2^2+O_1O_3^2+O_2O_3^2)$$

$$=\frac{1}{3}(O_1O_2^2+O_1O_3^2+O_2O_3^2)$$

$$=12R^2-\frac{OO_5^2}{3};$$

$$O_1O_5^2+O_2O_5^2+O_3O_5^2-(O_1O_6^2+O_2O_6^2+O_3O_6^2)=\frac{OO_5^2}{3}$$

$$=3O_5O_6^2;$$

ich ist

$$OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2-(O_1O_6^2+O_2O_6^2+O_3O_6^2)$$

$$=\frac{4}{3}OO_5^2=3OO_6^2.$$

Aehnliche Sätze ergeben sich für die Dreiecke OO_1O_2, OO_1O_3, OO_2O_3.

Bemerkung. Die letzten Sätze werden leicht abgeleitet wer-en können, wenn man berücksichtigt, dass O_6 der Punkt der ittleren Entfernung für O_1, O_2, O_3 ist und die Lehrsätze über esen Punkt in Anwendung bringt.

§. 8.

In diesem Paragraphen will ich einige bekannte trigono trische Relationen herleiten, weil sie sich mit grosser Leicl keit aus dem Frühern ergeben.

Die Winkel des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ sind $y+z$, $x+z$, $x+y$ ($90-x$, $90-y$, $90-z$. Es ist mithin

$$BO_2{}^2 = O_1 O_2{}^2 . \sin^2(y+z)$$

oder (§. 5., 17,6))

$$(r_2+r_1)(r_2+r_3) = 4R(r_1+r_2)\sin^2(y+z) = 4R(r_1+r_2)\cos^2 x,$$

$$1)\quad \cos^2 x = \sin^2(y+z) = \frac{r_2+r_3}{4R} = \frac{r_2 r_3}{bc};$$

ebenso

$$2)\quad \cos^2 y = \sin^2(x+z) = \frac{r_1+r_3}{4R} = \frac{r_1 r_3}{ac},$$

$$3)\quad \cos^2 z = \sin^2(x+y) = \frac{r_1+r_2}{4R} = \frac{r_1 r_2}{ab}.$$

Hieraus folgt leicht

$$4)\quad \sin^2 x = \frac{r_1-r}{4R} = \frac{rr_1}{bc},$$

$$5)\quad \sin^2 y = \frac{r_2-r}{4R} = \frac{rr_2}{ac},$$

$$6)\quad \sin^2 z = \frac{r_3-r}{4R} = \frac{rr_3}{ab}.$$

Ferner ist

$$\mathrm{tgs}^2 x = \frac{r_1-r}{r_2+r_3} = \frac{rr_1}{r_2 r_3} = \frac{\Delta^2}{(r_2 r_3)^2},$$

mithin

$$7)\quad \mathrm{tgs}\, x = \frac{\Delta}{r_2 r_3} = \frac{rr_1}{\Delta},\quad \mathrm{cotgs}\, x = \frac{r_2 r_3}{\Delta} = \frac{\Delta}{rr_1}.$$

[Dies ergiebt sich auch leicht auf andere Weise. Es ist

$$r=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tgs}x,$$

lich

$$\operatorname{tgs}x=\frac{2r}{b+c-a}=\frac{rr_1}{\Delta}.]$$

$$8)\quad \operatorname{tgs}y=\frac{\Delta}{r_1 r_3}=\frac{rr_2}{\Delta},\quad \operatorname{cotgs}y=\frac{r_1 r_3}{\Delta}=\frac{\Delta}{rr_2},$$

$$9)\quad \operatorname{tgs}z=\frac{\Delta}{r_1 r_2}=\frac{rr_3}{\Delta},\quad \operatorname{cotgs}z=\frac{r_1 r_2}{\Delta}=\frac{\Delta}{rr_3}.$$

die leichteste Weise erhellt ferner, dass

$$10)\quad \sin 2x=\frac{a}{2R},$$

$$11)\quad \sin 2y=\frac{b}{2R},$$

$$12)\quad \sin 2z=\frac{c}{2R}$$

Auch ist, da

$$O_4T_1=\pm\frac{r_2+r_3+r-r_1}{4}$$

$$13)\quad \cos 2x=\frac{r_2+r_3+r-r_1}{4R},$$

$$14)\quad \cos 2y=\frac{r_1+r_3+r-r_2}{4R},$$

$$15)\quad \cos 2z=\frac{r_1+r_2+r-r_3}{4R}.$$

s (1), (2), (3) folgt:

$$\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z\,\frac{(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3)}{64R^3}=\frac{(a+b+c)^2}{64R^2},$$

$$16)\quad \cos x\cos y\cos z=\frac{a+b+c}{8R}=\frac{\Delta}{4Rr};$$

s (4), (5), (6) folgt

$$17)\quad \sin x \sin y \sin z = \sqrt{\left[\frac{(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)}{64R^3}\right]} = \frac{r}{4R};$$

aus (1), (2) und (6) folgt

$$18)\quad \cos x \cos y \sin z = \sqrt{\left[\frac{(r_3+r_1)(r_3+r_2)(r_3-r)}{64R^3}\right]} = \frac{r_3}{4R};$$

ebenso folgt

$$19)\quad \cos x \cos z \sin y = \frac{r_2}{4R},$$

$$20)\quad \cos y \cos z \sin x = \frac{r_1}{4R}.$$

Aus (1), (5) und (6) folgt

$$21)\quad \cos x \sin y \sin z = \sqrt{\left[\frac{(r_2+r_3)(r_2-r)(r_3-r)}{64R^3}\right]}$$

$$= \frac{b+c-a}{8R} = \frac{\Delta}{4Rr_1};$$

ebenso ergiebt sich

$$22)\quad \cos y \sin x \sin z = \frac{a+c-b}{8R} = \frac{\Delta}{4Rr_2},$$

$$23)\quad \cos z \sin x \sin y = \frac{a+b-c}{8R} = \frac{\Delta}{4Rr_3}.$$

Aus (10), (11), (12) und (16) folgt

$$24)\quad \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \frac{a+b+c}{2R} = 4\cos x \cos y \cos z;$$

ebenso ergiebt sich

$$25)\quad \sin 2x + \sin 2y - \sin 2z = \frac{a+b-c}{2R} = 4\sin x \sin y \cos z,$$

$$26)\quad \sin 2x + \sin 2z - \sin 2y = \frac{a+c-b}{2R} = 4\sin x \sin z \cos y,$$

$$27)\quad \sin 2y + \sin 2z - \sin 2x = \frac{b+c-a}{2R} = 4\sin y \sin z \cos x.$$

Aus (13), (14), (15), (17), (18), (19), (20) folgt:

28) $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + 3r}{4R} = 1 + \frac{r}{R}$
$= 1 + 4 \sin x \sin y \sin z,$

29 $\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z = \frac{r_2 + r_3 + r - r_1 + r_1 + r_3 + r - r_2 - r_1 - r_2 - r + r_3}{4R}$
$= -1 + \frac{r_3}{R} = -1 + 4 \cos x \cos y \sin z,$

30) $\cos 2x + \cos 2z - \cos 2y = -1 + 4 \cos x \cos z \sin y,$

31) $\cos 2y + \cos 2z - \cos 2x = -1 + 4 \cos y \cos z \sin x.$

Aus (7), (8), (9) folgt:

32) $\operatorname{tgs} x + \operatorname{tgs} y + \operatorname{tgs} z = \frac{r}{\Delta}(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{4Rr}{\Delta} + \frac{r^2}{\Delta},$

33) $\operatorname{tgs} x + \operatorname{tgs} y - \operatorname{cotgs} z = \frac{rr_1 + rr_2 - r_1 r_2}{\Delta} = -\frac{\Delta}{r_3^2},$

34) $\operatorname{tgs} x + \operatorname{tgs} z - \operatorname{cotgs} y = \frac{rr_1 + rr_3 - r_1 r_3}{\Delta} = -\frac{\Delta}{r_2^2},$

35) $\operatorname{tgs} y + \operatorname{tgs} z - \operatorname{cotgs} x = \frac{rr_2 + rr_3 - r_2 r_3}{\Delta} = -\frac{\Delta}{r_1^2},$

36) $\operatorname{tgs} x - \operatorname{cotgs} y - \operatorname{cotgs} z = \frac{r_1}{\Delta}(r - r_3 - r_2)$
$= \frac{r_1^2}{\Delta} - \frac{r_1}{\Delta}(r_1 + r_2 + r_3 - r) = \frac{r_1^2}{\Delta} - \frac{4Rr_1}{\Delta},$

37) $\operatorname{tgs} y - \operatorname{cotgs} x - \operatorname{cotgs} z = \frac{r_2^2}{\Delta} - \frac{4Rr_2}{\Delta},$

38) $\operatorname{tgs} z - \operatorname{cotgs} x - \operatorname{cotgs} y = \frac{r_3^2}{\Delta} - \frac{4Rr_3}{\Delta},$

39) $\operatorname{cotgs} x + \operatorname{cotgs} y + \operatorname{cotgs} z = \frac{\Delta}{r}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = \frac{\Delta}{r^2},$

40) $\operatorname{tgs} x \operatorname{tgs} y \operatorname{tgs} z = \frac{r^2 r r_1 r_2 r_3}{\Delta^3} = \frac{r^2}{\Delta},$

41) $\operatorname{tgs} x \operatorname{tgs} y \operatorname{cotgs} z = \frac{(rr_1 r_2)^2}{\Delta^3} = \frac{\Delta}{r_3^2},$

42) $\operatorname{tgs} x \operatorname{tgs} z \operatorname{cotgs} y = \frac{\Delta}{r_2^2}$,

43) $\operatorname{tgs} y \operatorname{tgs} z \operatorname{cotgs} x = \frac{\Delta}{r_1^2}$,

44) $\operatorname{tgs} x \operatorname{cotgs} y \operatorname{cotgs} z = \frac{r_1^2}{\Delta}$,

45) $\operatorname{tgs} y \operatorname{cotgs} x \operatorname{cotgs} z = \frac{r_2^2}{\Delta}$,

46) $\operatorname{tgs} z \operatorname{cotgs} x \operatorname{cotgs} y = \frac{r_3^2}{\Delta}$,

47) $\operatorname{cotgs} x \operatorname{cotgs} y \operatorname{cotgs} z = \frac{\Delta}{r^2}$,

48) $\operatorname{tgs} x + \operatorname{tgs} y + \operatorname{tgs} z = \frac{1}{\cos x \cos y \cos z} + \operatorname{tgs} x \operatorname{tgs} y \operatorname{tgs} z$,

49) $\operatorname{tgs} x + \operatorname{tgs} y - \operatorname{cotgs} z = -\operatorname{tgs} x \operatorname{tgs} y \operatorname{cotgs} z$,

50) $\operatorname{tgs} x + \operatorname{tgs} z - \operatorname{cotgs} y = -\operatorname{tgs} x \operatorname{tgs} z \operatorname{cotgs} y$,

51) $\operatorname{tgs} y + \operatorname{tgs} z - \operatorname{cotgs} x = -\operatorname{tgs} y \operatorname{tgs} z \operatorname{cotgs} x$,

52) $\operatorname{tgs} x - \operatorname{cotgs} y - \operatorname{cotgs} z$
$= \operatorname{tgs} x \operatorname{cotgs} y \operatorname{cotgs} z - \frac{1}{\cos x \sin y \sin z}$,

53) $\operatorname{tgs} y - \operatorname{cotgs} x - \operatorname{cotgs} z$
$= \operatorname{tgs} y \operatorname{cotgs} x \operatorname{cotgs} z - \frac{1}{\cos y \sin x \sin z}$,

54) $\operatorname{tgs} z - \operatorname{cotgs} x - \operatorname{cotgs} y$
$= \operatorname{tgs} z \operatorname{cotgs} x \operatorname{cotgs} y - \frac{1}{\cos y \sin x \sin z}$,

55) $\operatorname{cotgs} x + \operatorname{cotgs} y + \operatorname{cotgs} z = \operatorname{cotgs} x \operatorname{cotgs} y \operatorname{cotgs} z$.

§. 9.

Da nach dem zweiten Paragraphen die drei Spitzen eines spitzwinkligen Dreiecks die Mittelpunkte der drei angeschriebenen Kreise desjenigen Dreiecks sind, welches durch die Verbindung der Fusspunkte der Höhen entsteht und der Durchschnitt der Höhen der Mittelpunkt des demselben eingeschriebenen Kreises ist, so wird jedes

ɔitzwinklige Dreieck zu diesem neuen Dreiecke in demselben 'erhältnisse stehen, in welchem das Dreieck $O_1O_2O_3$ zu dem 'reieck ABC steht. Es ergiebt sich aus demselben Paragraphen, ass jedes stumpfwinklige Dreieck zu dem Dreiecke, dessen Sei- :n die Fusspunkte seiner Höhen verbinden, in demselben Ver- ältnisse steht, wie die Dreiecke OO_1O_2, OO_1O_3, OO_2O_3 zum reiecke ABC. Viele der Sätze nun, welche oben für Mittel- ınkte der ein- und angeschriebenen Kreise und ihrer Verbin- ıngslinien entwickelt worden sind, werden jetzt in einer andern orm dargestellt werden können. So führen z. B. die im vierten aragraphen entwickelten Sätze auf der Stelle zu folgenden ätzen:

1) Das Stück der Höhe eines spitz- oder stumpfwinkligen reiecks, welches zwischen der Spitze und dem Durchschnitte it den anderen Höhen liegt, ist doppelt so gross wie das Loth, elches aus dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises auf die ır Höhe gehörende Grundlinie gefällt ist.

2) Der Schwerpunkt eines spitz- oder stumpfwinkligen Drei- :ks, der Mittelpunkt des um dasselbe beschriebenen Kreises ıd der Durchschnitt seiner Höhen liegen in einer geraden Linie, ıd es ist der Schwerpunkt vom Durchschnittspunkte der Höhen ɔppelt so weit entfernt als vom Mittelpunkte des umschriebenen reises.

3) Die Gerade, welche den Halbirungspunkt einer Seite eines ›itz- oder stumpfwinkligen Dreiecks mit dem Halbirungspunkte ɜs oberen Abschnittes der auf sie gefällten Höhe verbindet, ist .eich dem Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises.

4) Diese Gerade geht durch den Halbirungspunkt der Linie, elche den Durchschnitt der Höhen mit dem Mittelpunkte des nschriebenen Kreises verbindet.

5) Der aus diesem Halbirungspunkte mit dem halben Radius es dem Dreiecke umschriebenen Kreises beschriebene Kreis geht urch den Fusspunkt der Höhen, den Mittelpunkt der Seiten und er oberen Abschnitte der Höhen.

6) Zieht man in einem spitz- oder stumpfwinkligen Dreieck ie Höhen bis zu ihrem Durchschnittspunkte, so entstehen drei eue Dreiecke, welche eine Seite und zwei der Höhenabschnitte u Seiten haben. Verbindet man die resp. Durchschnitte der löhen dieser Dreiecke mit ihren resp. Mittelpunkten, so halbiren ich die vier dadurch entstandenen Geraden und jede derselben ird durch den Halbirungspunkt und durch den Schwerpunkt des ı ihr gehörenden Dreiecks harmonisch getheilt. —

Aus §. 6. 9), 10), 11), 12) folgt:

7) Der Inhalt eines spitzwinkligen Dreiecks ist gleich dem ɪ ucte aus dem halben Radius des umschriebenen Kreises in Summe der Geraden, welche die Fusspunkte der Höhen des

ersteren verbinden. Der Inhalt eines stumpfwinkligen Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem halben Radius und der Differenz, welche entsteht, wenn man von der Summe der Linien, die den Fusspunkt des aus dem stumpfen Winkel gefällten Lothes mit den beiden anderen Fusspunkten verbindet, die dritte mögliche Verbindungslinie abzieht.

Beim rechtwinkligen Dreieck verschwindet das Dreieck, welches beim spitz- und stumpfwinkligen Dreiecke durch die Verbindung der Fusspunkte der Höhen entsteht und es werden auf dasselbe die Beweise für 1), 2), 3),...5),-7) nicht mehr angewendet werden können. Dennoch gelten auch hier, wie sich auf die leichteste Weise direct ergiebt, die in diesen Absätzen ausgesprochenen Sätze. Von Nro. 6. gilt beim rechtwinkligen Dreieck natürlich nur die zuletzt ausgesprochene Behauptung einer harmonischen Theilung.

7) Aus 1) und §. 3. 15), 16), 17), 18) ergiebt sich Folgendes:

Im spitzwinkligen Dreieck ist die Summe der oberen Abschnitte der Höhen gleich der Summe der Durchmesser des in und um das Dreieck beschriebenen Kreises und die Differenz zwischen der Summe zweier obern Abschnitte und dem dritten gleich der Differenz zwischen den Durchmessern des der Spitze, aus welchem die letztere Höhe gefällt ist, gegenüberliegenden angeschriebenen Kreises und des umschriebenen Kreises. Im stumpfwinkligen Dreieck ist die Summe der oberen Abschnitte der Höhen gleich der Differenz der Durchmesser des dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden angeschriebenen Kreises und des umschriebenen Kreises; die Differenz zwischen der Summe der oberen Abschnitte der aus den spitzen Winkeln gefällten Höhen und dem oberen Abschnitte der aus dem stumpfen Winkel gefällten Höhe gleich der Summe der Durchmesser des in und um das Dreieck beschriebenen Kreises; die Differenz zwischen dem oberen Abschnitte einer aus einem spitzen Winkel gefällten Höhe und den beiden anderen oberen Abschnitten gleich der Differenz zwischen dem Durchmesser des dem spitzen Winkel, aus welchem der abgezogene obere Abschnitt gefällt ist, gegenüberliegenden angeschriebenen Kreises und dem Durchmesser des umschriebenen Kreises. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Catheten gleich der Hypotenuse und dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises; die Differenz zwischen zwei Catheten gleich der Differenz zwischen dem Durchmesser des die erstere Cathete selbst berührenden angeschriebenen Kreises und der Hypotenuse.

Es ist, wenn man die oberen Abschnitte der Höhen eines Dreiecks mit h_1, h_2, h_3, den Radius des umschriebenen Kreises mit R und den Inhalt mit Δ bezeichnet und den oberen Abschnitt der aus einem stumpfen Winkel gefällten Höhe negativ nimmt,

$$\Delta=\frac{1}{4}\sqrt{[(h_1+h_2+h_3-2R)(h_1+h_2-h_3+2R)(h_1-h_2+h_3+2R)}$$
$$\times(-h_1+h_2+h_3+2R)].$$

8) Aus §. 7), 8), 9), 10) ergiebt sich folgender Satz:

Das Quadrat der Geraden, welche den Durchschnitt der Höhen eines spitz- oder stumpfwinkligen Dreiecks mit dem Mittelpunkte des um dasselbe beschriebenen Kreises verbindet, ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrate des dreifachen Radius und der Summe der Quadrate der Seiten oder auch gleich der Differenz zwischen der Summe der Quadrate der oberen Höhenabschnitte und dem dreifachen Quadrate des Radius.

Der Satz gilt auch, wie sogleich erhellt, beim rechtwinkligen Dreiecke.

§. 10.

Ist das Dreieck ABC (Taf. V.) bei A rechtwinklig, so werden allgemeinen Relationen zum Theil höchst einfach werden.

Es ergiebt sich sehr leicht direct $\frac{b+c-a}{2}=r$; folglich ist (§.3. 24), 25), 28))

$$r_2=\frac{a+b-c}{2},\quad r_3=\frac{a+c-b}{2},\quad r_1=\frac{a+b+c}{2};$$

Ferner ist $R=\frac{a}{2}$. Da

$$\frac{b+c-a}{2}=\frac{\Delta}{r_1},\quad \frac{a+b-c}{2}=\frac{\Delta}{r_3}$$

ist, so folgt

$$\Delta=rr_1,\quad \Delta=r_2r_3.$$

Ferner erhellt auf der Stelle

$$r_1-r=a,\quad r_2-r=a=-c,\quad r_3-r=a-b,\quad r_1+r_2=a+b,$$
$$r_1+r_3=a+c,\quad r_2+r_3=a,\quad r_1-r_2=c,\quad r_1-r_3=b,\quad r_2+r=b,$$
$$r_3+r=c,\quad r_2+r=r_1-r;$$

oder

$$r - r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$

$$r + r_1 + r_2 + r_3 = a + b + c = 2r_1, \quad r_1 + r_2 + r_3 - r = 2a,$$

$$r + r_1 + r_3 - r_2 = 2c, \quad r + r_1 + r_2 - r_3 = 2b;$$

aus §. 3. 67), 66), 68), 69), 70), 71)

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2 = 8R^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\frac{\Delta^2}{r_1^2} + \frac{\Delta^2}{r_2^2} + \frac{\Delta^2}{r_3^2} + \frac{\Delta^2}{r^2} = 8R^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 - r^3 = 2a^3,$$

$$\frac{\Delta^2}{r^3} - \frac{\Delta^2}{r_1^3} - \frac{\Delta^2}{r_2^3} - \frac{\Delta^2}{r_3^3} = 6a,$$

$$r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r^4 = 2a^4 + 4\Delta^2,$$

$$\frac{\Delta^4}{r_1^4} + \frac{\Delta^4}{r_2^4} + \frac{\Delta^4}{r_3^4} + \frac{\Delta^4}{r^4} = 2a^4 + 4\Delta^2,$$

u. s. w.

XVII.

Ein Satz über binäre Formen von beliebigem Grade und Anwendung desselben auf biquadratische Formen.

Von

Herrn Dr. F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es sei

$$f(x, y) = ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \ldots. + kxy^{n-1} + ly^n$$

eine ganze homogene Funktion des $n$ten Grades mit zwei Variabeln x, y. Bezeichnet man die n Wurzeln der Gleichung

$$az^n + bz^{n-1} + cz^{n-2} + \ldots\ldots + kz + l = 0$$

mit $\omega', \omega'', \ldots. \omega^{(n)}$, das Produkt der Quadrate der Differenzen dieser Wurzeln, paarweise verbunden, mit P, so ist die Grösse $\Delta = a^{2n-2}P$ für alle mit der Form $f(x, y)$ aequivalente Formen constant.

Um dies zu erweisen, stelle man $f(x, y)$ als Produkt von n linearen Faktoren dar, nämlich

$$f(x, y) = a(x - \omega' y)(x - \omega'' y), \ldots (x - \omega^{(n)} y).$$

Transformirt man nun $f(x, y)$ mittelst der Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y,\ y = \gamma X + \delta Y;$$

so kommt

$$f(\alpha X+\beta Y,\ \gamma X+\delta Y)=a'(X-\Omega' Y)(X-\Omega'' Y)\ldots(X-\Omega^{(n)} Y),$$

indem wir zur Abkürzung

$$a'=f(\alpha,\ \gamma),\quad \Omega=\frac{\omega\delta-\beta}{\alpha-\omega\gamma}$$

gesetzt haben. Es findet sich ferner, $\alpha\delta-\beta\gamma=\varepsilon$ gesetzt,

$$\Omega-\Omega'=\frac{\varepsilon(\omega-\omega')}{(\alpha-\omega\gamma)(\alpha-\omega'\gamma)};$$

folglich, wenn P' in Bezug auf die Wurzeln Ω', Ω'', ... $\Omega^{(n)}$ eine ähnliche Bedeutung hat, wie P in Bezug auf die Wurzeln ω', ω'', ... $\omega^{(n)}$, und man noch $\Delta'=a'^{2n-2}P'$ macht,

$$\Delta'=\varepsilon^{n(n-1)}\,\Delta.$$

Sind nun

$$f(x,\ y),\ f(\alpha X+\beta Y,\ \gamma X+\delta Y)=f_1(X,\ Y)$$

aequivalente Formen, so ist bekanntlich $\varepsilon^2=1$, folglich in diesem Falle $\Delta'=\Delta$, w. z. b. w.

Das Produkt P lässt sich als symmetrische Funktion der Wurzeln ω', ω'', ... $\omega^{(n)}$ rational ausdrücken durch die Coefficienten der Gleichung

$$f(z)=az^n+bz^{n-1}+\ldots+kz+l=0,$$

daher enthält die Gleichung $\Delta'=\Delta$ eine Bedingung, welche zwischen den Coefficienten zweier binären Formen statt finden muss, wenn sie aequivalent sein sollen. Wir können die Grösse Δ also die Determinante der binären Form $f(x,\ y)$ nennen.

Da es bei der Untersuchung der Aequivalenz zweier Formen immer zuerst auf die Bestimmung der Determinante ankommt, so mögen die verschiedenen Wege, das Produkt P zu bestimmen, hier kurz angedeutet werden.

1°. Man kann mit Hülfe der Potenzsummen der Wurzeln ω', ω'', ... $\omega^{(n)}$ der Gleichung

$$fx=ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+l=0$$

die vollständige Gleichung, deren Wurzeln die Quadratdifferenzen von ω', ω'', ... $\omega^{(n)}$ sind, erhalten, folglich auch das Produkt P (Lagrange Résolution des équations numériques Chap. I.). Die Rechnung ist aber schon für $n=4$ sehr weitläufig.

2⁰. Eine andere Methode stützt sich auf die Theorie der ymmetrischen Funktionen. Bildet man nämlich die Gleichung vom n—1)ten Grade

$$X = aX^{n-1} + (ax+b)X^{n-2} + (ax^2+bx+c)X^{n-3} + \dots$$
$$\dots + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + k = 0,$$

ezeichnet deren Determinante mit Δ^0, und dividirt mit fx in ie Grösse $\{f'(x)\}^2\Delta^0$, beide Funktionen nach absteigenden Poten- en von x geordnet, so bleibt ein von x unabhängiger Rest übrig, elcher die Determinante der Funktion f sein wird. (Grunert's upplemente zu Klügels Wörterbuch. Art. Gleichung).

Bestimmen wir nach dieser Methode die Determinante der ubischen und biquadratischen Formen.

Die Gleichung sei

$$fx = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

an findet

$$^0 = (ax+b)^2 - 4a(ax^2+bx+c),$$
$$'(x)\}^2\Delta^0 = -27a^4x^6 - 54a^3bx^5 - 27(a^2b^2+2a^3c)x^4 + 3(ab^3 - 18a^2bc)x^3$$
$$+ (4b^4 - 18ab^2c - 27a^2c^2)x^2 + 2(2b^3c - 9abc^2)x + c^2(b^2 - 4ac),$$
$$'(x)\}^2\Delta^0 = (-27a^3x^3 - 27a^2bx^2 - 27a^2cx + 4b^3 - 18abc + 27a^2d)fx + \Delta,$$
$$[1] \dots \Delta = b^2c^2 - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4db^3 + 18abcd.$$

Die Gleichung sei ferner

$$fx = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

an findet

$$(x)\}^2\Delta^0 = -256a^6x^{12} - 768a^5bx^{11} - (768a^5c + 768a^4b^2)x^{10}$$
$$-(768a^5d + 1536a^4bc + 256a^3b^3)x^9,$$
$$-(1728a^4bd + 896a^4c^2 + 624a^3b^2c + 27a^2b^4)x^8$$
$$+(-1536a^4cd - 1152a^3b^2d - 1024a^3bc^2$$
$$+ 288a^2b^3c - 54ab^5)x^7$$
$$+(-768a^4d^2 - 1920a^3bcd - 512a^3c^3 - 192a^2b^3d$$
$$+ 160a^2b^2c^2 + 90ab^4c - 27b^6)x^6$$
$$+(-1152a^3bd^2 - 1024a^3c^2d - 96a^2b^2cd$$
$$- 256a^2bc^3 - 54ab^4d + 288ab^3c^2 - 54b^5c)x^5$$

$$+ (-912a^3cd^2 - 378a^2b^2d^2 - 368a^2bc^2d - 144a^2c^4 + 270ab^3cd + 148ab^2c^3 - 54b^5d - 27b^4c^2)x^4$$

$$+ (-256a^3d^3 - 528a^2bcd^2 - 256a^2c^3d + 6ab^3d^2 + 368ab^2c^2d - 16abc^4 - 72b^4cd + 4b^3c^3)x^3 + (-192a^2bd^3 - 272a^2c^2d^2 + 150ab^2cd^2 + 80abc^3d - 16ac^5 - 27b^4d^2 - 18b^3c^2d + 4b^2c^4)x^2$$

$$+ (-144a^2cd^3 + 6ab^2d^3 + 80abc^2d^2 - 16ac^4d - 18b^3cd^2 + [illegible]^3d)x$$

$$+ (-27a^2d^4 + 18abc[illegible] - 4ac^3d^2 + b^2c^2d^2 - 4b^3d^3).$$

Dividirt man nun mit fx in di[illegible] Grösse hinein, so kommt als Quotient

$$-256a^5x^8 - 512a^4bx^7 - (512a^4c + 256a^3b^2)x^6 - (512a^4d + 512a^3bc)x^5 - (704a^2bd + 384a^3c^2 - 144a^2b^2[illegible])x^4 - (512a^3cd + 192a^2b^2d + 128a^2bc^2 - 144ab^3c + 27b^5 - 256a^3be)x^3 - (256a^3d^2 + 192a^2bcd + 128a^2c^3 - 144ab^2c^2 + 27b^4c - 256a^3ce)x^2$$

$$-(192a^2bd^2 + 128a^2c^2d - 144ab^2cd + 27b^4d - 256a^3de)x - (144a^2cd^2 - 6ab^2d^2 - 80abc^2d + 16ac^4 + 18b^3cd - 4b^3c^3 - 128a^2c^2e + 144ab^2ce - 27b^4e + 256a^3e^2 - 192a^2bde)$$

und der bleibende Rest ist

$$[2] \ldots \Delta = \left\{ \begin{array}{l} b^2c^2d^2 - 4b^3d^3 - 128a^2c^2e^2 \\ \quad + 256a^3e^3 - 192a^2bde^2 - 80abc^2de - 6ab^2d^2e \\ + 16ac^4e - 27b^4e^2 + 18abcd^3 + 144a^2cd^2e - 4ac^3d^2 \\ \quad - 27a^2d^4 + 18b^3cde + 144ab^2ce^2 - 4b^2c^3e. \end{array} \right.$$

Man sieht, dass diese Methode ebenfalls viel Aufwand von Rechnung erfordert.

3°. Es ist

$$fx = a(x - \omega')(\alpha - \omega'') \ldots (x - \omega^{(n)},$$

folglich

$$(\omega'-\omega'')(\omega'-\omega''')\ldots.(\omega'-\omega^{(n)})$$

der Werth, welchen $\frac{fx}{a(x-\omega')}$ für $x=\omega'$ erhält, mithin

$$(\omega'-\omega'')(\omega'-\omega''')\ldots(\omega'-\omega^{(n)})=\frac{f'(\omega')}{a},$$

wo f' die Ableitung bezeichnet. Bestimmt man das Produkt der Unterschiede der Wurzeln ω', $\omega'''\ldots$, von ω'' auf ähnliche Art, u. s. w., so ergiebt sich durch Multiplication

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^nP=f'(\omega').f'(\omega'')\ldots.f'(\omega^{(n)}),$$

$$\Delta=a^{2n-2}P=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-2}f'(\omega').f'(\omega'')\ldots..f'(\omega^{(n)}).$$

Heraus folgt: Eliminirt man x zwischen den beiden Gleichungen $fx=0$, $f'x-z=0$, so dass die resultirende Gleichung in z vom $n$ten Grade wird, nämlich

$$\varphi z=\mathfrak{A}z^n+\mathfrak{B}z^{n-1}+\mathfrak{C}z^{n-2}+\ldots.+\mathfrak{K}=0,$$

welche Gleichung die Wurzeln

$$f'(\omega'),\ f'(\omega''),\ldots.f'(\omega^{(n)})$$

haben muss, so ist

$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}=(-1)^{n-1}f'(\omega').f'(\omega'')\ldots.f'(\omega^{(n)}),$$

mithin

$$\Delta=\pm a^{n-2}\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}},$$

das obere Zeichen für $n\equiv1, 2$ (mod. 4) das untere für $n\equiv0, 3$ (mod. 4.).

Ist

$$fx=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots..+ix^2+kx+l=0,$$

also

$$f'x-z=nax^{n-1}+(n-1)bx^{n-2}+\ldots+2ix+k-z=0,$$

so leitet man aus diesen beiden Gleichungen leicht die folgende her:

$$bx^{n-1}+2cx^{n-2}+3dx^{n-3}+\ldots+(n-2)ix^2+((n-1)k+z)x+nl=0,$$

[illegible] n x zwischen dieser Gleichung und der vorhergehen- [illegible] beide vom $(n-1)$ten Grade sind, eliminiren.

[illegible] öhnlichen Eliminationsmethoden, z. B. die Eulersche, h[illegible] len Nachtheil, dass die resultirende Gleichung von einem höheren Grade wird als es sein muss. In unserm Falle muss die Gleichung in z immer vom $n$ten Grade sein, man muss daher R[illegible]cht nehmen, die fremdartigen Factoren wegzuschaffen.

B[illegible]el für $n=4$. Die Gleichungen sind

$$bx^3+2cx^2+(3d+z)x+4e=0,$$
$$4ax^3+3bx^2+2cx+d-z=0.$$

Nach der Eulerschen Methode f[illegible] man durch Elimination des x:

$$3bb-8ac=f,\ bc-6ad=g,\ 4cc-9[illegible]=h',\ bd-16ae=h'',\ cd-6be=i,$$
$$3dd-8ce=k$$

gesetzt, und beachtend, dass $h'h''=4gi-fk$ wird, für 16Δ die beiden folgenden Ausdrücke:

$$[3]\ldots 16\Delta=fh'k+2fh''k+4gh''i-4fi^2-4kg^2-h''^3$$
$$=4gi(h'+3h'')-4[illegible]-4kg^2-h''(h'+h'')^2,$$

und wenn man für f, g, h', h'', i, k ihre Werthe substituirte, so würde man zu dem Ausdruck [2] von Δ gelangen.

4°. Anstatt die Elimination von x zwischen $fx=0$, $f'x-z=0$ direct zu bewerkstelligen, kann man sich auch der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers bedienen. Sucht man denselben zwischen fx und $f'x-z$, bis man zu einem von x unabhängigen Rest gelangt, und setzt diesen $=0$, so hat man die Gleichung in z, welche zur Bestimmung von Δ dient. Der Rest R ist offenbar eine Funktion von

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ i,\ k-z,\ l,$$

oder

$$R=\psi(a,\ b,\ c,\ \ldots\ i,\ k-z,\ l),$$

und der Werth von Δ, abgesehen von einer Constante,

$$=\psi(a,\ b,\ c,\ldots i,\ k,\ l);$$

diese letztere Grösse würde aber als Rest bleiben, wenn man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen fx und $f'x$ suchte (indem $f'x-z$ aus $f'x$ hervorgeht, wenn man $k-z$ statt k setzt), folglich kann man Δ auch auf die zuletzt angegebene Art bestimmen. — Auch diese Methode erfordert die Ausscheidung fremdartiger Factoren.

Da ich nächstens Untersuchungen über biquadratische Formen mittheilen will, so soll hier sogleich ein allgemeines Kennzeichen angegeben werden, um über die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu entscheiden. Für die allgemeinste Gleichung des vierten Grades

$$Fx = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

habe ich diese Bedingungen noch nicht vollständig entwickelt gesehen.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist weiter nichts als die Anwendung des bekannten Sturm'schen Satzes erforderlich. Die Functionenreihe, auf welche dieser Satz zurückgeht, und deren Entwickelung dem Leser überlassen wird, ist

$$F = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\quad F_1 = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d,$$
$$F_2 = fx^2 + 2gx + h'',\quad F_3 = 2f'x + g',$$
$$F_4 = f'',\ \text{wo}\ f' = g(3bf - 8ag) - f(cf - 2ah''),\ g' = h''(3bf - 8ag) - dff,$$
$$f'' = g'(4f'g - fg') - 4f'^2h''.$$

Man findet ferner

$$f' = 2a(fh' + fh'' - 4g^2),\quad g' = 8a(fi - gh''),$$
$$f'' = 16a^2f[(fh' + fh'' - 4g^2)(fk - h''h'') - 4(fi - gh'')^2]$$
$$= 16a^2f^2[fh'k + 2fh''k + 4gh''i - 4fi^2 - 4kg^2 - h''^3].$$

Die Grössen f, d, h', h'', i, k sind die obigen. Betrachten wir a als positiv, so können wir den Factor a bei F_3 und den Factor a^2f^2 bei F_4 weglassen, und erhalten die Reihe

$$F = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$
$$F_1 = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d,$$
$$F_2 = fx^2 + 2gx + h'',$$
$$F_3 = (fh' + fh'' - 4g^2)x + 2(fi - gh''),$$
$$F_4 = \Delta.$$

Bildet man nun die Zeichenreihen für $x = -\infty$ und $x = +\infty$, so finden sich durch Anwendung des Sturm'schen Satzes folgende Bedingungen:

$\Delta > 0,\ f > 0,\ fh' + fh'' - 4g^2 > 0$ .... 4 reelle Wurzeln

$\Delta > 0,\ f > 0,\ fh' + fh'' - 4g^2 < 0$ oder $f < 0$ .... 4 imaginäre Wurzeln

$\Delta < 0$. . . . . 2 reelle, 2 imaginäre Wurzeln*)

*) Ist im letztern Falle $f < 0$, so muss auch $fh' + fh'' - 4g^2 < 0$ sein, sonst würde die Zeichenreihe $(+x)$ zwei Zeichenwechsel mehr als die Zeichenreihe $(-x)$ haben, was bekanntlich nicht angeht.

Diese Resultate sind aber von der Voraussetzung, dass keine der Grössen f, $fh'+fh''-4g^2$ verschwindet, abhängig. Um sie zu erweitern, wollen wir die Grössen f, g, h', h'', i, k durch die Wurzeln der Gleichung, $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$, ausdrücken, um so mehr, da diese Ausdrücke uns in der Folge nützlich sein werden. Da

$$b=-a(\omega+\omega'+\omega''+\omega'''),\quad c=+a(\omega\omega'+\omega\omega''+\ldots+\omega''\omega'''),$$
$$d=-a(\omega\omega'\omega''+\ldots+\omega'\omega''\omega'''),\quad e=+a\omega\omega'\omega''\omega'''$$

ist, so findet sich durch Substitution:

$$\text{I.}\quad \frac{f}{a^2}=p+q+r+s+t+u,$$

$$\text{II.}\quad -\frac{2g}{a^2}=p(\omega''+\omega''')+q(\omega'+\omega''')+r(\omega'+\omega'')+s(\omega+\omega''')+t(\omega+\omega'')+u(\omega+\omega'),$$

$$\text{III.}\quad \frac{h'-h''}{a^2}=p(\omega''^2+\omega'''^2)+q(\omega'^2+\omega'''^2)+r(\omega'^2+\omega''^2)+s(\omega^2+\omega'''^2)+t(\omega^2+\omega''^2)+u(\omega^2+\omega'^2),$$

$$\text{IV.}\quad \frac{h'+h''}{a^2}=p(\omega''+\omega''')^2+q(\omega'+\omega''')^2+r(\omega'+\omega'')^2+s(\omega+\omega''')^2+t(\omega+\omega'')^2+u(\omega+\omega')^2,$$

$$\text{V.}\quad -\frac{2i}{a^2}=p\,\omega''\omega'''(\omega''+\omega''')+q\omega'\omega'''(\omega'+\omega''')+r\omega'\omega''(\omega'+\omega'')+s\omega\omega'''(\omega+\omega''')+t\omega\omega''(\omega+\omega'')+u\omega\omega'(\omega+\omega'),$$

$$\text{VI.}\quad \frac{k}{a^2}=p\omega''^2\omega'''^2+q\omega'^2\omega'''^2+r\omega'^2\omega''^2+s\omega^2\omega'''^2+t\omega^2\omega''^2+u\omega^2\omega'^2,$$

$$\text{VII.}\quad \frac{fh'+fh''-4gg}{a^2}=3pqs+3prt+3qru+3stu+pu(\omega+\omega'-\omega''-\omega''')^2+qt(\omega+\omega''-\omega'-\omega''')^2+rs(\omega+\omega'''-\omega'-\omega'')^2,$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{\Delta}{a^6}=pqrstu;$$

wo

$$p=(\omega-\omega')^2,\ q=(\omega-\omega'')^2,\ r=(\omega-\omega''')^2,\ s=(\omega'-\omega'')^2,\ t=(\omega'-\omega''')^2,\ u=(\omega''-\omega''')^2$$

gesetzt worden ist. Indem wir nun den Fall $\Delta=0$ ausschliessen, so folgt aus VIII. leicht, dass keine gleichen Wurzeln vorkommen können. Sind alle Wurzeln reell, so erhellt aus I., VII. und VIII., dass Δ, f, $fh'+fh''-4g^2$ sämmtlich >0 sind, und wenn diese

Bedingungen fehlen so hat die Gleichung nothwendig imaginäre Wurzeln. Daher können wir die Bedingungen so ausdrücken:

$$[4] \ldots \begin{cases} \Delta > 0,\ f > 0,\ fh' + fh'' - 4gg > 0 \ldots 4 \text{ reelle Wurzeln} \\ \Delta > 0,\ \underbrace{f \text{ und } fh' + fh'' - 4gg}_{\text{nicht beide} > 0} \ldots 4 \text{ imaginäre Wurzeln} \\ \Delta < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \text{ reelle, } 2 \text{ imaginäre Wurzeln.} \end{cases}$$

Wir haben noch den Fall $\Delta = 0$ zu betrachten, in welchem gleiche Wurzeln vorkommen müssen.

Ist $Fx = 0$ eine Gleichung von beliebigem Grade und

$$Fx = a(x-\alpha)^p (x-\beta)^q (x-\gamma)^r \ldots Y,$$

wo Y nur einfache Factoren enthält, so ist die Ableitung

$$F'x = a(x-\alpha)^{p-1}(x-\beta)^{q-1}(x-\gamma)^{r-1} \ldots Y_1,$$

wo Y_1 mit Y keinen gemeinschaftlichen Factor hat; folglich das grösste gemeinschaftliche Maass von Fx und $F'x$:

$$M = (x-\alpha)^{p-1}(x-\beta)^{q-1}(x-\gamma)^{r-1} \ldots$$

Mit Hülfe dieses Satzes und der Formeln I. bis VIII. gelangt man zu den folgenden Resultaten, deren weitere Entwickelung wir dem Leser überlassen dürfen:

[5] .... $Fx = a(x-\omega)^4$	$f=0,\ g=0,\ h''=0;$	$\omega = -\frac{b}{4a}$
$Fx = a(x-\omega)^3(x-\omega')$	$f>0,\ fh'+fh''-4gg=0,\ fi-gh''=0,\ gg-fh''=0;$	$\omega = -\frac{g}{f}$
$Fx = a(x-\omega)^2(x-\omega')^2$	$\left.\begin{matrix} fh'+fh''-4gg=0 \\ fi-gh''=0 \end{matrix}\right\}$ $f>0,\ gg-fh''>0$ (ω,ω' reell); $f<0,\ gg-fh''<0$ (ω,ω' imaginär)	$\left.\begin{matrix}\omega \\ \omega'\end{matrix}\right\} = \frac{-g \pm \sqrt{gg-fh''}}{f}$
$Fx = a(x-\omega)^2(x-\omega')(x-\omega'')$	$\Delta=0$, $fh'+fh''-4gg>0$ (ω',ω'' reell); $fh'+fh''-4gg<0$ (ω',ω'' imaginär)	$\omega = -\frac{2(fi-gh'')}{fh'+fh''-4gg}.$

Wir schliessen diese Abhandlung mit einer Bemerkung über biquadratische Formen.

Die Form sei

$$F(x,\ y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 = (a,\ b,\ c,\ d,\ e).$$

Durch die Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y,\ y = \gamma X + \delta Y$$

verwandelt sich F in

$$F' = a'X^4 + 4b'X^3Y + 6c'X^2Y^2 + 4d'XY^3 + e'Y^4 = (a',\ b',\ c',\ d',\ e')$$

und die Coefficienten von F' sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$[5] \ \ldots\ a' = a\alpha^4 + 4b\alpha^3\gamma + 6c\alpha^2\gamma^2 + 4d\alpha\gamma^3 + e\gamma^4,$$
$$b' = a\alpha^3\beta + b\alpha^2(\alpha\delta + 3\beta\gamma) + 3c\alpha\gamma(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\gamma^2(\beta\gamma + 3\alpha\delta) + e\gamma^3\delta,$$
$$c' = a\alpha^2\beta^2 + 2b\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma) + c(\alpha^2\delta^2 + 4\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2) + 2d\gamma\delta(\alpha\delta + \beta\gamma) + e\gamma^2\delta^2,$$
$$d' = a\alpha\beta^3 + b\beta^2(\beta\gamma + 3\alpha\delta) + 3c\beta\delta(\alpha\delta + \beta\gamma) + d\delta^2(\alpha\delta + 3\beta\gamma) + e\gamma\delta^3,$$
$$e' = a\beta^4 + 4b\beta^3\delta + 6c\beta^2\delta^2 + 4d\beta\delta^3 + e\delta^4.$$

Setzt man

$$bb - ac = f,\ bc - ad = g,\ h' = cc - bd,\ h'' = bd - ae,\ h = 3h' + h'',$$
$$i = cd - be,\ k = dd - ce,$$

und bezeichnet die entsprechenden Grössen in Bezug auf die Form F' mit $f',\ g',\ h',\ i',\ k'$, so ergeben sich durch eine etwas weitläufige Rechnung fünf Gleichungen, die aus den Gleichungen [5] hervorgehen, wenn man $6f,\ 3g,\ h,\ 3i,\ 6k$ statt $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ und $\frac{6f'}{\varepsilon^2},\ \frac{3g'}{\varepsilon^2},\ \frac{h'}{\varepsilon^2},\ \frac{3i'}{\varepsilon^2},\ \frac{6k'}{\varepsilon^2}$ statt $a',\ b',\ c',\ d',\ e'$ setzt, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon$. Dies führt uns zu folgendem Satze:

Wenn die biquadratische Form

$$F = (a,\ b,\ c,\ d,\ e)$$

in die biquadratische Form

$$F' = (a',\ b',\ c',\ d',\ e')$$

durch die Substitution $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ übergeht, so verwandelt sich durch die nämliche Substitution die Form

$$\Phi = (6f,\ 3g,\ h,\ 3i,\ 6k)$$

in die Form

$$\Phi' = \left(\frac{6f'}{\varepsilon^2}, \frac{3g'}{\varepsilon^2}, \frac{h'}{\varepsilon^2}, \frac{3i'}{\varepsilon^2}, \frac{6k'}{\varepsilon^2}\right).$$

Sind F, F' aequivalent, so ist $\varepsilon^2 = 1$, mithin werden dann auch die biquadratischen Formen

$$(6f, 3g, h, 3i, 6k); \quad (6f', 3g', h', 3i', 6k')$$

aequivalent sein, folglich einerlei Determinante haben.

Die Form

$$\Phi = (6f, 3g, h, 3i, 6k)$$

wollen wir die Correspondante von F nennen. Ebenso giebt es eine Correspondante von $\Phi(\Psi)$, eine von $\Psi(X)$ etc.

In der Theorie der kubischen Formen wird die Correspondante (Charakteristik genannt) um einen Grad niedriger, und durch diesen Umstand konnte die Untersuchung in das Gebiet der quadratischen Formen gezogen werden. Ob es in der Theorie der biquadratischen Formen eine quadratische Correspondante giebt, diese Frage werden wir in einem der nächsten Hefte erledigen. Ich bemerke noch, dass man durch Elimination von α, β, γ, δ aus den Gleichungen [5], verbunden mit $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, zu der Bedingung $\Delta = \Delta'$ geführt werden würde, wo Δ, Δ' die Determinanten von F, F' bezeichnen. Diese Elimination würde aber doch äusserst schwierig sein, wenn wir den Werth von Δ' nicht schon kennten. Man sieht, dass künstliche Betrachtungen in schwierigern Disciplinen durchaus an ihrem Orte sind.

XVIII.

Ueber angenäherte Wurzelausziehung.

Von dem
Herrn Professor Dr. J. Dienger
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Das Folgende ist durch einen kurzen Aufsatz in den Nou-
›lles Annales von Terquem und Gerono, der von E.
ionnet herrührt, hervorgerufen. Man vergleiche damit auch
ıs, was Schulz v. Strassnitzki in seinem vortrefflichen
andbuch der besondern und allgemeinen Arithmetik
Wien. Gerold. 1848.) sagt.

Sei δ die Gränze des Fehlers, der an einer Zahl a begangen
orden, welches ist eine Gränze des Fehlers von $\sqrt[m]{a}$?

Sei α ein angenäherter Werth von a, grösser als a, aber so,
lass der Fehler weniger als δ sei. Sei ferner e der Fehler, den
nan begeht, wenn man α statt a setzt in $\sqrt[m]{a}$, so ist also, wenn

$$\sqrt[m]{\alpha}=x,\quad \sqrt[m]{a}=y:$$

$$=\sqrt[m]{\alpha}-\sqrt[m]{a}=x-y=\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+y^{m-1})(x-y)}{x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots\ldots+y^{m-1}}$$

$$=\frac{x^m-y^m}{x^{m-1}+x^{m-2}y+\ldots+y^{m-1}}.$$

$$x>y,\quad x^m-y^m=\alpha-a<\delta;$$

so ist, wenn man im Nenner x durch y ersetzt, my^{m-1} kleiner als der Nenner, also

$$e < \frac{\delta}{my^{m-1}},$$

d. h.

$$e < \frac{\delta}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}. \qquad (1)$$

Ist β [illegible] a[illegible]genäherter Werth von a, kleiner als a, jedoch so, dass d[illegible]el[illegible]ler unter δ sei, so ist eben so:

$$[illegible] \qquad (2)$$

Man sieht aus [illegible] und [illegible] [illegible]nn a eine Dezimalzahl >1 ist, und $\delta = \frac{1}{10^n}$, [illegible]

[illegible],

d. h. um die $m$te [illegible] Dezimalzahl >1 zu erhalten, auf eine Dezimalein[illegible] der $n$ten Ordnung genau, genügt es einen Werth zu kennen, der der wahren Zahl auf eine Einheit derselben Ordnung genähert ist.

Sei a eine ganze Zahl, die mit n Ziffern geschrieben wird; man nehme mindestens $\frac{n+1}{m}$ Ziffern zur Linken und ersetze alle übrigen durch Nullen, welche Zahl dann β sei, und ziehe hieraus die $m$te Wurzel, so wird diese nicht um 1 gefehlt sein.

Die Zahl β, welche mit n Ziffern geschrieben ist, ist mindestens 10^{n-1}. Die Anzahl der durch Nullen ersetzten Ziffern ist höchstens

$$n - \frac{n+1}{m} = \frac{n(m-1)-1}{m},$$

d. h. der Fehler, den man begeht, indem man β statt a setzt, ist weniger als $10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$. Setzt man also in (2):

$$\delta = 10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}, \quad \beta = 10^{n-1};$$

so ist gewiss

$$e < \frac{10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}}{m \cdot 10^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}} \quad \text{oder} \quad e < \frac{10^{\frac{m-2}{m}}}{m}.$$

Sobald $m \overline{\gt} 10$, ist immer $\frac{10^{\frac{m-2}{m}}}{m} < 1$; für $m = 2, 3, \ldots 9$ findet man diess ebenfalls, also ist immer, unter den angeführten Bedingungen: $e < 1$, was unsern Satz beweist.

Um also z. B. die Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl, welche 11 Ziffern hat, auszuziehen, so dass der Fehler kleiner als 1 sei, genügt es die $\frac{11+1}{3} = 4$ ersten Ziffern der Zahl zu kennen; alle übrigen kann man durch Nullen ersetzen.

Sei z. B. die Aufgabe gestellt

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

auf drei Dezimalen genau zu berechnen. Man hat also auch $\frac{6}{\pi}$ auf drei Dezimalen zu berechnen. Die Fouriersche Division giebt:

6	3,14159	
3	1,909	
30		
1		1.1=1
29		
27		
20		
13		1.4+9.1=13
7		
0		
70		
37		1.1+9.4+0.1=37
33		
27		1.5+9.1+0.4+9.1=23
60		
23		
37		

(Man könnte bei dieser Division versucht sein 1 statt 0 zu setzen, man hätte aber alsdann:

| 3,14159
| 1,9100

30
1   1.1=1
29
27
20
13   1.4+9.1=13
7
3
40
38   1.1+9.4+1.1=38
2
0
20
18   1.5+9.1+1.4+0.1=18
2
0
20   1.9+9.5+1.1+0.4+0.1=55,

so dass man die Korrektur nicht mehr anbringen kann.)

Man zieht also die Kubikwurzel aus 1,909 aus, wobei ma[n] alles unter Tausendtel vernachlässigen darf.

Das Schema sieht folgendermassen aus:

1,909 | 1,241
1
9
6
$3a^2=3$ 30
12
189
8
181
173
$3a^2=4,32$ 8
4
4
$3a^2=4,32$.

Der Werth 1,241 ist nicht um 0,001 gefehlt.

Sei eben so

$$\sqrt{\frac{0,5427}{0,43284}}$$

mit vier Dezimalen zu suchen.

```
54270   | 43284
43      | 1,2538
112
  2       1.2
110
 86
247
 12       1.8+2.2
235
215
200
 30       1.4+2.8+5.2
170
129
410
 54       2.4+5.8+3.2
356
344
120
 60       5.4+3.8+2.8
 60
```

```
        √ 1,2538  | 1,1197
          1
          2
2a=2,     2
          5
          1
         43
2a=2,2   22
        218
          1
        217
2a=2,2  200
         17
          1
         16
2a=2,2   15
          1
```

also $\sqrt{\frac{0,5427}{0,43284}} = 1,1197$ auf vier Dezimalen genau.

XIX.

Sur les integrales des fonctions circulaires du second ordre.

Par
Monsieur Ubbo H. Meyer
de Groningue.

Les fonctions P_x, Q_x, R_x, déterminées par le système des équations

$$\partial_x P_x = Q_x R_x,\ \partial_x Q_x = -R_x P_x,\ \partial_x R_x = -c^2 P_x Q_x,$$
$$P_0 = 0, \qquad Q_0 = 1, \qquad R_0 = 1,$$

sont appelées dans un autre article (T. XVI. Nr. XXXIII.) fonctions circulaires du second ordre et les proprietés principales de ces fonctions y sont déposées. Voyons à présent, comment on parvient à l'intégration de ces fonctions.

Par un procédé, que Legendre a fait connaitre le premier, l'intégration par rapport à x d'une fonction rationelle de P_x sera ramenée aux intégrales

$$\int_0^x P_x dx, \int_0^x \frac{P_x dx}{1 - rP^2_x}, \int_0^x P^2_x dx, \int_0^x \frac{dx}{1 - rP^2_x}.$$

L'intégration de P_x, de même que celle de Q_x et R_x, n'offre aucune difficulté, puisqu'on a

$$P_x = -\frac{1}{c}\partial_x l(R_x + cQ_x),\ Q_x = \frac{1}{ci}\partial_x l(R_x + ciP_x),\ R_x = \frac{1}{i}\partial_x l(Q_x + iP_x).$$

Au moyen de ces formules on obtiendra aussi immédiatement l'intégrale de la fonction

$$\frac{P_x}{1-rP^2_x},$$

en vertu de la relation

$$P_{x+y}-P_{x-y}=2Q_yR_y\frac{P_x}{1-c^2P^2_yP^2_x}.$$

Mais ce n'est pas ainsi par rapport aux deux autres integrales, qui représentent au contraire deux trancendantes distinctes. On reconnaitra aisément la liaison intimé entre ces deux transcendantes et entre les fonctions elliptiques de la deuxième et de la troisième espèce. Nous ne nous arrêterons pas à cette liaison; voyons plutôt, comment les formules fondamentales de ces transcendantes se déduisent des formules trouvées dans les No. XXXIII. T. XVI. et III. T. XVII.

§. I.

Sur les fonctions elliptiques de la deuxième espèce.

Déterminons les trois fonctions

$$(1)\qquad F_x=F_{x,c},\quad G_x=G_{x,c},\quad H_x=H_{x,c}$$

par les équations

$$(2)\qquad \begin{cases}\partial_x F_x=P^2_x, & \partial_x G_x=Q^2_x, \quad \partial_x H_x=R^2_x,\\ F_0=0 & G_0=0, \quad H_0=0;\end{cases}$$

alors, en observant qu'entre les fonctions P_x, Q_x, R_x, il existe les relations

$$(3)\qquad Q^2_x+P^2_x=1,\quad R^2_x+c^2P^2_x=1,$$

on trouvera

$$\partial_x G_x+\partial_x F_x=1,\quad \partial_x H_x+c^2\partial_x F_x=1,$$

et par suite

$$(4)\qquad G_x+F_x=x,\quad G_x+c^2F_x=x.$$

Il suffira donc de s'occuper seulement de l'une de ces fonctions, puisque deux se déduisent de la troisième à l'aide des relations (4). Choisissons la fonction H_x.

En vertu des formules (20), §. III. du Nr. XXXIII. T. XVI. on a

$$P^2_{y-x}-P^2_x=P_y\partial_x P_x P_{y-x},$$

$$P^2_{x+y} - P^2_x = P_y \partial_x P_x P_{x+y},$$

en supposant y indépendante de x. Au moyen des relations on en tire

$$R^2_{x+y} = R^2_x - c^2 P_y \partial_x P_x P_{x+y},$$

puis, à cause des équations (2):

$$\partial_x H_{x+y} = \partial_x H_x - c^2 P_y \partial_x P_x P_{x+y},$$

d'où

$$(5) \qquad H_{x+y} = H_x + H_y - c^2 P_x P_y P_{x+y}.$$

De cette formule fondamentale se déduisent une foule de co séquences. Ainsi, en se rappelant que

$$P_\tau = 1, \quad P_\sigma = \frac{1}{c}, \quad P_{x+\tau} = \frac{Q_x}{R_x}, \quad P_{x+\sigma} = \frac{1}{c}\frac{R_x}{Q_x},$$

il s'en suivra

$$(6) \qquad \begin{cases} H_{x+\tau} = H_x + H_\tau - c^2 \dfrac{P_x Q_x}{R_x}, \\ H_{x+\sigma} = H_x + H_\sigma - \dfrac{P_x R_x}{Q_x}, \end{cases}$$

$$H_{x+\sigma-\tau} = H_{x+\sigma} + H_{-\tau} - c^2 P_{x+\sigma} P_{-\tau} P_{x+\sigma-\tau}.$$

Mais on conclut des équations (2)

$$(7) \qquad H_x = -H_{-x},$$

et d'ailleurs on sait

$$P_x = -P_{-x}, \quad \sigma - \tau = \varrho, \quad P_{x+\varrho} = \frac{1}{cP_x}:$$

donc il viendra

$$H_{x+\varrho} = H_x + H_\sigma - H_\tau + \frac{R_x}{P_x Q_x} - \frac{P_x R_x}{Q_x},$$

ou

$$(8) \qquad H_{x+\varrho} = H_x + H_\sigma - H_\tau + \frac{Q_x R_x}{P_x}.$$

Nous reviendrons plus tard à l'évaluation des valeurs particulières H_τ et H_σ. Ajoutons ici encore, que, puisqu'on a

$$P_{2p\tau}=0$$

pour tout nombre entier p, on aura aussi

$$P_{p\tau}P_{\overline{p+1}\tau}=0:$$

donc on tirera de la formule (5)

$$H_{\overline{p+1}\tau}=H_{p\tau}+H_\tau,$$

d'où

$$\Delta_p H_{p\tau}=H_\tau,$$

et

$$H_{p\tau}=pH_\tau=p\eta_c, \tag{9}$$

ayant posé, pour abréger,

$$H_\tau=H_{\tau,c}=\eta=\eta_c. \tag{10}$$

Le module c est toujours supposé positif et inférieur à 1. Afin que cette supposition ne diminue pas la généralité, il faut montrer, que les autres cas se réduisent à celui-ci. On pourra se servir pour cela des formules

$$R_{x,-c}=R_x, \; R_{cx,\frac{1}{c}}=Q_x, \; R_{bx,\frac{ci}{b}}=\frac{1}{b}R_{x+\tau}, \; R_{ix,b}=cP_{x+\sigma}.$$

En effet, en observant que

$$\partial_x H_{ax}=aR^2_{ax},$$

on obtiendra

$$\begin{cases} H_{x,-c}=H_x, \\ H_{cx,\frac{1}{c}}=-\frac{1}{c}(b^2{}_x-H_x), \end{cases} \tag{11}$$

$$H_{bx,\frac{ci}{b}}=\frac{1}{b}(H_{x+\tau}-H_\tau),$$

$$H_{ix,b}=i(x-H_{x+\sigma}+H_\sigma):$$

et, en vertu des formules (6), les deux dernières se réduisent à

$$(12)\quad \begin{cases} H_{bx,\frac{ci}{b}} = \frac{1}{b}\left(H_x - c^2 \frac{P_x Q_x}{R_x}\right), \\ H_{ix,b} = i\left(x - H_x + \frac{P_x R_x}{Q_x}\right). \end{cases}$$

Parmi les proprietés de la fonction H_x une des plus remarquables consiste dans une transformation du module analogue à celle des fonctions P_x, Q_x, R_x, dont on trouve la démonstration dans le §. VI. du Nr. XXXIII. T. XVI. Cette proprieté sera comprise dans les termes suivants.

Théorème I.

En conservant les notations du numero cité, θ et k seront des constantes déterminées par les équations

$$\theta = \frac{1}{P_{\frac{1}{n}\tau}} \prod_{p=1}^{p=n} \frac{P_{\frac{2p}{n}\tau}}{P_{\frac{2p+1}{n}\tau}}, \quad k = c^n \prod_p^n P^2_{\frac{2p+1}{n}\tau}.$$

Cela posé, on aura pour tout nombre entier n

$$\theta\left(H_{\theta x,k} - \frac{nx}{\tau}\eta_k\right) - n\left(H_n - \frac{x}{\tau}\eta\right) = \frac{1}{2}\partial_x l \prod_p^n \left(1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right).$$

Démonstration.

En vertu du numero cité on a

$$P^2_{\theta x,k} = \theta^2 P^2_x \prod_{p=1}^{p=n} \frac{1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}}{1 - \frac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}}.$$

Lorsqu'on voudra décomposer le second membre en fractions partielles, on pourrait croire, qu'il faudrait considérer séparement le cas où n est pair et celui où n est impair, à cause de la relation

$$P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau} = P_{\varrho+\frac{2(n-p)}{n}\tau};$$

mais avec peu d'attention on s'assurera, que dans l'un et l'autre cas l'équation précédente pourra être mise sous la forme

$$P^2\theta_{x,k} = M + NP^2{}_x + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{M_p + N_p P^2{}_x}{(P^2{}_\alpha - P^2{}_x)^2},$$

ayant posé, pour abréger,

$$\text{(13)} \qquad \alpha = \varrho + \frac{2p}{n}\tau,$$

pourvu que M_p et N_p soient déterminés par les équations

$$M_p + N_p P^2{}_\alpha = \frac{1}{2}(P^2{}_\alpha - P^2{}_{\varepsilon+\alpha})^2 P^2{}_{\theta(\varepsilon+\alpha),k},$$

$$N_p \partial_\alpha P^2{}_\alpha = \frac{1}{2}\partial_\varepsilon \{(P^2{}_\alpha - P^2{}_{\varepsilon+\alpha})^2 P^2{}_{\theta(\varepsilon+\alpha),k}\},$$

dans lesquelles $\varepsilon = 0$. De plus, en se rappelant, qu'on a

$$\theta\varrho = \varrho_k, \quad \frac{1}{n}\theta\tau = \tau_k,$$

d'où

$$\theta\alpha = \varrho_k + 2p\tau_k,$$

et par suite

$$P^2{}_{\theta(\varepsilon+\alpha),k} = P^2{}_{\theta\varepsilon+\varrho_k+2p\tau_k,k} = P^2{}_{\theta\varepsilon+\varrho_k,k} = \frac{1}{k^2 P^2{}_{\theta\varepsilon,k}},$$

il résultera

$$M_p + N_p P^2{}_\alpha = \frac{1}{2k^2}\left\{\frac{P^2{}_\alpha - P^2{}_{\varepsilon+\alpha}}{P^2{}_{\theta\varepsilon,k}}\right\}^2,$$

$$N_p \partial_\alpha P^2{}_\alpha = \frac{1}{2k^2}\partial_\varepsilon \left\{\frac{P^2{}_\alpha - P^2{}_{\varepsilon+\alpha}}{P^2{}_{\theta\varepsilon,k}}\right\}^2:$$

Or on a

$$P^2{}_{\varepsilon+\alpha} - P^2{}_\alpha = \varepsilon\partial_\alpha P^2{}_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2}\partial^2{}_\alpha P^2{}_\alpha + \frac{\varepsilon^3}{2.3}\partial^3{}_\alpha P^2{}_\alpha + \dots,$$

$$P_{\theta\varepsilon,k} = \theta\varepsilon - \frac{1+k^2}{2.3}\theta^3\varepsilon^3 + \dots:$$

donc il viendra, à cause de $\varepsilon = 0$:

$$M_p + N_p P^2{}_\alpha = \frac{1}{2k^2\theta^2}(\partial_\alpha P^2{}_\alpha)^2,$$

$$N_p \partial_\alpha P^2{}_\alpha = \frac{1}{2k^2\theta^2}\partial_\alpha P^2{}_\alpha \, \partial^2{}_\alpha P^2{}_\alpha;$$

$$N_p = \frac{1}{2k^2\theta^2}\partial^2{}_\alpha P^2{}_\alpha = \frac{1}{k^2\theta^2}\partial_\alpha(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha),$$

$$M_p = \frac{1}{2k^2\theta^2}\{(\partial_\alpha P^2{}_\alpha)^2 - P^2{}_\alpha \partial^2{}_\alpha P^2{}_\alpha\};$$

et, n a

$$(\partial_\alpha P^2{}_\alpha)^2 = 4P^2{}_\alpha - 4(1+c^2)P^4{}_\alpha + 4c^2P^6{}_\alpha,$$

$$P^2{}_\alpha \partial^2{}_\alpha P^2{}_\alpha = 2P^2{}_\alpha - 4(1+c^2)P^4{}_\alpha + 6c^2P^6{}_\alpha,$$

il résultera

$$M_p = \frac{1}{k^2\theta^2} P^2{}_\alpha(1 - c^2P^4{}_\alpha).$$

En substituant ces valeurs de M_p et N_p, on obtiendra

$$(14) \quad P^2{}_{\theta x,k} = M + NP^2{}_x + \frac{1}{k^2\theta^2}\sum_{p=1}^{p=n} \frac{P^2{}_\alpha(1-c^2P^4{}_\alpha) + P^2{}_x\partial_\alpha(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{(P^2{}_\alpha - P^2{}_x)^2}$$

et il ne reste que la détermination de M et N. Il suffira po cela de remarquer, qu'en vertu des équations

$$\varrho k = \theta_\varrho, \quad \frac{1}{P_\varrho} = 0,$$

on aura d'abord

$$N = \frac{P^2{}_{\theta\varepsilon + \varrho_k, k}}{P^2{}_{\varepsilon+\varrho}} = \frac{c^2}{k^2} \cdot \frac{P^2{}_\varepsilon}{P^2{}_{\theta\varepsilon,k}} = \frac{c^2}{k^2\theta^2},$$

et ensuite

$$M = P^2{}_{\theta\varepsilon+\varrho_k, k} - \frac{c^2}{k^2\theta^2}P^2{}_{\varepsilon+\varrho} = \frac{1}{k^2\theta^2} \cdot \frac{\theta^2 P^2{}_\varepsilon - P^2{}_{\theta\varepsilon,k}}{P^2{}_\varepsilon P^2{}_{\theta\varepsilon,k}},$$

d'où

$$M = \frac{\theta^2(1+k^2) - (1+c^2)}{3k^2\theta^2}.$$

On déterminera M encore d'une autre manière. En effet, s dans la formule (14) on fait $x = 0$, il viendra

$$0 = M + \frac{1}{k^2\theta^2}\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{P^2{}_\alpha} - c^2P^2{}_\alpha\right),$$

d'où

$$M=\frac{\lambda'-\lambda}{k^2\theta^2},$$

en posant

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda'=c^2\sum\limits_{p=1}^{p=n}P^2_a=\sum\limits_{p=1}^{p=n}c^2P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}=\sum\limits_{p=1}^{p=n}\frac{1}{P^2_{\frac{2p}{n}\tau}}, \\ \lambda=\sum\limits_{p=1}^{p=n}\frac{1}{P^2_a}=\sum\limits_{p=1}^{p=n}\frac{1}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}=c^2\sum\limits_{p=1}^{p=n}P^2_{\frac{2p}{n}\tau}. \end{cases}$$

On aura par conséquent

$$(16)\qquad k^2\theta^2M=\lambda'-\lambda=\frac{\theta^2(1+k^2)-(1+c^2)}{3},$$

et par suite la formule (14) se réduira à

$$(17)\quad \theta^2k^2P^2_{\theta x,k}$$
$$=(\lambda'-\lambda)+c^2P_x+\sum_{p=1}^{p=n}\frac{P^2_\alpha(1-c^2P^4_\alpha)+P^2_x\partial_\alpha(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha)}{(P^2_\alpha-P^2_x)^2}.$$

De l'antre coté, en faisant

$$(18)\qquad \mathfrak{D}^2=\Pi_p^n\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_\alpha}\right)=\Pi_{p=1}^{p=n}\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_\alpha}\right),$$

on trouvera

$$\partial_x l\mathfrak{D}=-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\partial_xP^2_x}{P^2_\alpha-P^2_x},$$

puis

$$\partial^2_x l\mathfrak{D}=-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{(P^2_\alpha-P^2_x)\partial^2_xP^2_x+(\partial_xP^2_x)^2}{(P^2_\alpha-P^2_x)^2};$$

et, comme on a

$$(\partial_xP^2_x)^2=4P^2_x-4(1+c^2)P^4_x+4c^2P^6_x,$$
$$\partial^2_xP^2_x=2-4(1+c^2)P^2_x+6c^2P^4_x,$$

il viendra

$$\frac{1}{2}\{(P^2_\alpha-P^2_x)\partial^2_xP^2_x+(\partial_xP^2_x)^2\}$$

$$=P^2_\alpha-2(1+c^2)P^2_\alpha P^2_x+3c^2P^2_\alpha P^4_x$$
$$-P^2_x+2(1+c^2)P^4_x-3c^2P^6_x$$
$$+2P^2_x-2(1+c^2)P^4_x+2c^2P^6_x$$
$$=c^2P^6_\alpha-3c^2P^4_\alpha P^2_x+3c^2P^2_\alpha P^4_x-c^2P^6_x$$
$$+\{P^2_\alpha-c^2P^6_\alpha\}+\{1-2(1+c^2)P^2_\alpha+3c^2P^4_\alpha\}P^2_x$$
$$=c^2(P^2_\alpha-P^2_x)^3+P^2_\alpha(1-c^2P^4_\alpha)+P^2_x\partial_\alpha(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha).$$

On aura par conséquent

$$\partial^2_x l\mathfrak{D}=-\sum_{p=1}^{p=n}\left\{c^2(P^2_\alpha-P^2_x)+\frac{P^2_\alpha(1-c^2P^4_\alpha)+P^2_x\partial_\alpha(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha)}{(P^2_\alpha-P^2_x)^2}\right\},$$

ou, en ayant égard aux équations (15),

$$\partial^2_x l\mathfrak{D}=-\lambda'+(n-1)c^2P^2_x-\sum_{p=1}^{p=n}\frac{P^2_\alpha(1-c^2P^4_\alpha)+P^2_x\partial_\alpha(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha)}{(P^2_\alpha-P^2_x)^2}.$$

En comparant cette équation à la formule (17) on conclut

$$\theta^2k^2P^2_{\theta x,k}=-\lambda+nc^2P^2_x-\partial^2_x l\mathfrak{D},$$

d'où

$$\theta^2R^2_{\theta x,c}-nR^2_x=\lambda+\theta^2-n+\partial^2_x l\mathfrak{D},$$

puis, en vertu des équations (2),

$$\theta H_{\theta x,k}-nH_x=(\lambda+\theta^2-n)x+\partial_x l\mathfrak{D}. \tag{19}$$

Observons, que $\partial_x l\mathfrak{D}$ s'évanouira pour $x=\tau$, à cause de $Q_\tau=0$: on tirera par suite de l'équation précédente

$$\theta H_{\theta\tau,k}-nH_\tau=(\lambda+\theta^2-n)\tau.$$

Mais on a

$$\theta\tau=n\tau_k,\quad H_{n\tau}=nH_\tau=n\eta:$$

donc on obtiendra

$$\lambda+\theta^2-n=\frac{n}{\tau}\{\theta\eta_k-\eta\};\tag{20}$$

et, en ayant égard aux équations (13) et (18), la formule (19) se réduira à

$$\theta\left(H_{\theta x,k}-\frac{nx}{\tau}\eta_k\right)-n\left(H_x-\frac{x}{\tau}\eta\right)=\frac{1}{2}\partial_x l\overset{n}{\Pi}_p\left(1-\frac{P^2_x}{P^2_{\rho+\frac{2p}{n}\iota}}\right),\tag{21}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Déduisons quelques corrollaires de ce théorème.

En observant qu'on a

$$\varrho = i\tau_b;\ \tau = -i\varrho_b,\ P^2_{\varrho+x} = P^2_{\varrho-x},$$

on déduit de la formule (19):

$$i\theta H_{\theta ix,k} - in\, H_{ix,c} = (n-\theta^2-\lambda)x + \frac{1}{2}\partial_x l \overset{n}{\Pi}_p \left(1 - \frac{P^2_{ix}}{P^2_{i(\tau_b+\frac{2p}{n}\varrho_b)}}\right).$$

Or, en permutant b et c dans la dernière des formules (12), on en tire

$$iH_{ix,c} = H_{x,b} - x - \frac{P_{x,b}R_{x,b}}{Q_{x,b}},$$

d'où

$$iH_{\theta ix,k} = H_{\theta x,h} - \theta x - \frac{P_{\theta x,h}\, R_{\theta x,h}}{Q_{\theta x,h}};$$

et, en vertu de la formule (19), §. IV. du No. XXXIII. T. XVI. on a

$$1 - \frac{P^2_{ix,c}}{P^2_{i(\tau_b+\frac{2p}{n}\varrho_b),c}} = \frac{1}{Q^2_{x,b}}\left(1 - \frac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}\right).$$

Donc la formule ci-dessus se changera en

$$\theta H_{\theta x,k} - nH_{x,b}$$

$$= -\lambda x + \theta\frac{P_{\theta x,h}R_{\theta x,h}}{Q_{\theta x,h}} - n\frac{P_{x,b}R_{x,b}}{Q_{x,b}} + \frac{1}{2}\partial_x l \overset{n}{\Pi}_p \frac{1 - \dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}}{Q^2_{x,b}}.$$

Puis, comme on a

$$n\frac{P_{x,b}R_{x,b}}{Q_{x,b}} = -\frac{1}{2}\partial_x l Q^{2n}{}_{x,b} = -\frac{1}{2}\partial_x l \overset{n}{\Pi}_p Q^2_{x,b},$$

et, suivant la formule (3), §. II. du Nr. III. T. XVII.

$$\theta\frac{P_{\theta x,h}R_{\theta x,h}}{Q_{\theta x,h}} = -\frac{1}{2}\partial_x l Q^2_{\theta x,h} = -\frac{1}{2}\partial_x l \Pi_p \frac{1 - \dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\tau_b+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}}{1 - \dfrac{P^2_{x,b}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\varrho_b,b}}},$$

il résultera

$$(22)\quad \theta H_{\theta x,h} - nH_{x,b} = -\lambda x + \frac{1}{2}\partial_x l \overset{n}{\Pi_p}\left(1 - \frac{P^2{}_{x,b}}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\varrho_b,b}}\right).$$

Ajoutons, que la supposition de $x = \tau_b$, jointe à la relation $\theta\tau_b = \tau_h$, donnera

$$(23)\qquad \theta\eta_h - n\eta_b = -\lambda\tau_b,$$

ce qui changera la formule (22) en

$$(24)\quad \theta\left(H_{\theta x,h} - \frac{x}{\tau_b}\eta_h\right) - n\left(H_{x,b} - \frac{x}{\tau_b}\eta_b\right) = \partial_x l\,\mathfrak{D}',$$

ayant posé, pour abréger,

$$(25)\qquad \mathfrak{D}'^2 = \overset{n}{\Pi_p}\left(1 - \frac{P^2{}_{x,b}}{P^2{}_{\frac{2p+1}{n}\varrho_b,b}}\right).$$

Si maintenant on change b en k, h changera en c, et θ en $\frac{n}{\theta}$, d'après les formules (11), §. II. du No. III. T. XVII. il viendra par suite

$$(26)\quad \frac{n}{\theta}\left(H_{\frac{n}{\theta}x} - \frac{x}{\tau_k}\eta\right) - n\left(H_{x,k} - \frac{x}{\tau_k}\eta_k\right)$$
$$= \frac{1}{2}\partial_x l\overset{n}{\Pi_q}\left(1 - \frac{P^2{}_{x,k}}{P^2{}_{\frac{2q+1}{n}\varrho_{k},k}}\right).$$

En ayant égard aux relations $\tau_k = \frac{\theta}{n}\tau$, $\varrho_k = \theta\varrho$, on trouvera, en remplaçant x par θ_x,

$$(27)\quad \left(H_{nx} - \frac{nx}{\tau}\eta\right) - \theta\left(H_{\theta x,k} - \frac{nx}{\tau}\eta_k\right)$$
$$= \frac{1}{2n}\partial_x l\overset{n}{\Pi_q}\left(1 - \frac{P^2{}_{\theta x,k}}{P^2{}_{\frac{2q+1}{n}\theta\varrho,k}}\right).$$

Or on a

$$\overset{n}{\Pi_q}\left(1 - \frac{P^2{}_{\theta x,k}}{P^2{}_{\theta\frac{2q+1}{n}\varrho,k}}\right) = \overset{n}{\Pi_p}\overset{n}{\Pi_q}\frac{1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau + \frac{2q+1}{n}\varrho}}}{1 - \dfrac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho + \frac{2p}{n}\tau}}}$$

$$= \overset{n}{\Pi}_p\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}\right)^{-n} \overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q+1}{n}\varsigma}}\right);$$

donc on parviendra à

$$(28)\qquad \left(H_{nx}-\frac{nx}{\tau}\eta\right)-\theta\left(H_{\theta x,k}-\frac{nx}{\tau}\eta_k\right)=-\partial_x l\mathfrak{D}+\frac{1}{n}\partial_x l D,$$

ayant posé

$$(29)\qquad D^2=\overset{n}{\Pi}_p \overset{n}{\Pi}_q\left(1-\frac{P^2{}_x}{P^2{}_{\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q+1}{n}\varsigma}}\right).$$

En combinant les formules (21) et (28) on trouvera enfin

$$(30)\qquad H_{nx}-nH_x=\frac{1}{n}\partial_x l D.$$

Appliquons les formules trouvées au cas spécial où $n=2$.

Comme il a été démontré dans le §. III. du Nr. III. T. XVII. on a pour ce cas

$$k=\frac{1-b}{1+b},\ h=\frac{2\sqrt{b}}{1+b},\ c=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ b=\frac{1-k}{1+k},\ \theta=1+b=\frac{2}{1+k},$$

$$\mathfrak{D}=R_x,\ \mathfrak{D}'=1+bP^2{}_{x,b},\ D=1-c^2P^4{}_x;$$

puis la seconde des équations (15) donnera

$$\lambda=c^2,$$

d'où

$$\lambda+\theta^2-n=c^2+(1+b)^2-2=2b.$$

Des équations (20) et (23) on tire par suite pour ce cas

$$(31)\qquad \theta\eta_k-\eta=b\tau;\quad 2\eta_b-\theta\eta_k=c^2\tau_b$$

et les formules (21), (24), (27) et (30) se réduiront à

$$
(32)\quad \begin{cases}
(1+b)H_{\theta x,k}-2H_x=2bx-c^2\,\dfrac{P_xQ_x}{R_x} \\[2ex]
(1+b)H_{\theta x,h}-2H_{x,b}=-c^2x+2b\,\dfrac{P_{x,b}\,Q_{x,b}R_{x,b}}{1+bP^2_{x,b}}, \\[2ex]
H_{2x}-(1+b)H_{\theta x,k}=-2bx+(1-b)\,\dfrac{P_{\theta x,k}\,Q_{\theta x,k}\,R_{\theta x,k}}{1+kP^2_{\theta x,k}}, \\[2ex]
H_{2x}-2H_x=2c^2P^2_x\,\dfrac{P_xQ_xR_x}{1-c^2P^4_x}=c^2P_xP_{2x}.
\end{cases}
$$

Voyons encore, ce que devient la formule (26) pour n infini.

Pour ce cas $\frac{n}{\theta}$ et τ_k se réduisent à $\frac{2\tau}{\pi}$ et $\frac{\pi}{2}$, tandisque non seulement k, mais aussi nk^2 s'évanouit; et par cela on s'assurera aisément, que $n\,(H_{x,k}-\frac{x}{\tau_k}\eta_k)$ se réduit à zéro. De plus comme on pourra supposer n pair, on aura

$$
\frac{1}{2}\partial_x l\,\overset{n}{\Pi}_\varrho\left(1-\frac{P^2_{x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\varrho_k,k}}\right)=\partial_x l\,\overset{\frac{n}{2}}{\Pi}_p\left(1-\frac{P^2_{x,k}}{P^2_{\frac{2p+1}{n}\theta_\varrho,k}}\right);
$$

et, en vertu des principes établis dans le § IV. du Nr. III. T. XVII. on obtiendra par conséquent

$$
(33)\quad H_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{2\eta}{\pi}x+\frac{\pi}{2\tau}\partial_x l\,\overset{\infty}{\Pi}_p\left\{1-\left(\frac{\sin x}{\sin\overline{2p+1}\,\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2\right\}.
$$

Ensuite, si, de même que dans le paragraphe cité, on pose

$$
\zeta=e^{\frac{\pi\varrho i}{\tau}}=e^{-\frac{\pi\tau_b}{\tau}},
$$

d'où

$$
\sin p\,\frac{\pi\varrho}{2\tau}=\frac{i}{2\zeta^{\frac{p}{2}}}(1-\zeta^p),
$$

et

$$
1-\left(\frac{\sin x}{\sin p\,\frac{\pi\varrho}{2\tau}}\right)^2=\frac{1}{(1-\zeta^p)^2}\{1-2\zeta^p\cos 2x+\zeta^{2p}\},
$$

la formule (33) se réduit à

$$H_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{2\eta}{\pi}x+\frac{\pi}{2\tau}\partial_x l\overset{\infty}{\Pi}_p\{1-2\zeta^{2p+1}\cos 2x+\zeta^{4p+2}\}$$

ou, suivant l'équation (20) du paragraphe cité,

$$(34)\qquad H_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{2\eta}{\pi}x+\frac{\pi}{2\tau}\partial_x l\,\Theta_x,$$

ou bien

$$(35)\qquad H_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{2\eta}{\pi}x+\frac{2\pi}{\tau}\,\frac{\zeta^{1\cdot1}\sin 2x-2\zeta^{2\cdot2}\sin 4x+3\zeta^{3\cdot3}\sin 6x-\dots}{1-2\zeta^{1\cdot1}\cos 2x+2\zeta^{2\cdot2}\cos 4x-2\zeta^{3\cdot3}\cos 6x+\dots}.$$

En observant, qu'en vertu des formules (21) et (31) §. IV. du Nr. III. T. XVII. on a

$$\partial_x l z_x-\partial_x l\Theta_x=\partial_x l P_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{2\tau}{\pi}\,\frac{Q_{\frac{2\tau}{\pi}x}R_{\frac{2\tau}{\pi}x}}{P_{\frac{2\tau}{\pi}x}},$$

$$\partial_x l\Theta_{x+\frac{\pi\varrho}{2\tau}}=-i+\partial_x l z_x,$$

on déduit de la formule (34)

$$H_{\frac{2\tau}{\pi}x+\varrho}=\frac{2\eta}{\pi}x+\frac{\eta\varrho}{\tau}-\frac{\pi i}{2\tau}+\frac{\pi}{2\tau}\partial_x l z_x,$$

et par suite

$$H_{\frac{2\tau}{\pi}x+\varrho}-H_{\frac{2\tau}{\pi}x}=\frac{\varrho}{\tau}\eta-\frac{\pi i}{2\tau}+\frac{Q_{\frac{2\tau}{\pi}x}R_{\frac{2\tau}{\pi}x}}{P_{\frac{2\tau}{\pi}x}}.$$

Or de la formule (8) on tire

$$H_{\frac{2\tau}{\pi}x+\varrho}-H_{\frac{2\tau}{\pi}x}=H_\sigma-H_\tau+\frac{Q_{\frac{2\tau}{\pi}x}R_{\frac{2\tau}{\pi}x}}{P_{\frac{2\tau}{\pi}x}};$$

donc on aura, à cause de $\eta=H_\tau$, $\varrho=i\tau_b$,

$$(36)\qquad H_\sigma=\eta+\frac{i}{\tau}\left(\tau_b\eta-\frac{\pi}{2}\right).$$

De l'autre coté on a

$$H_{ix,b} = i(x - H_{x+a} + H_a),$$

d'où

$$H_{\tau_{b},b} = \tau_b - i(H_\tau - H_a),$$

puis

$$(37) \qquad H_a = \eta + i(\tau_b - \eta_b).$$

Maintenant, comme par des quadratures connues on trouvera

$$(38) \qquad H_\tau = \eta_c = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{c^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{c^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{c^6}{5} - \dots\right\},$$

on évaluera H_a par l'une ou l'autre des formules (36), (37), tandisque la comparaison de ces formules conduira à la relation

$$(39) \qquad \tau_c \eta_b + \tau_b \eta_c = \frac{\pi}{2} + \tau_c \tau_b.$$

Remarquons enfin qu'au moyen des formules trouvées on passera aisément à l'intégrale de la fonction H_x: cette intégrale pouvant être exprimée en fonction de Θ_x.

§. II.

Sur les fonctions elliptiques de la troisième espèce.

De même que nous avons substitué l'intégrale de la fonction $R^2{}_x$ à la fonction elliptique de la deuxième espèce, il sera plus commode de traiter l'intégrale de la fonction

$$\frac{1}{1 + rP^2{}_x}$$

au lieu de la fonction elliptique de la troisième espèce: la relation entre cette intégrale et entre la fonction elliptique étant d'ailleurs facile à saisir.

Dans la théorie des fonctions elliptiques de la troisième espèce on distingue quatre formes, selon que r est compris entre -1 et $-\infty$, entre 0 et $-c^2$, entre $-c^2$ et -1, ou entre 0 et ∞. Mais les résultats deviendront plus uniformes lorsqu'on considère r comme fonction de $P^2{}_\alpha$, α étant indépendant de x. Allons donc decouvrir les proprietés de la fonction

$$J_x = J_{x,\alpha} = J_{x,\alpha,c},$$

déterminée par les équations

$$(1)\qquad \partial_x J_x = \frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha - P^2_x}, \quad J_0 = 0.$$

Alors, comme il est aisé de s'assurer, les quatre formes correspondront à

$$J_{x,\alpha},\ J_{x,\alpha+\varrho},\ J_{x,\alpha i+\tau},\ J_{x,\alpha i}.$$

Il suit de l'équation (1)

$$\partial_x (J_{x+y} - J_x) = P_\alpha Q_\alpha R_\alpha \left\{\frac{1}{P^2_\alpha - P^2_{x+y}} - \frac{1}{P^2_\alpha - P^2_x}\right\}$$

$$= P_\alpha Q_\alpha R_\alpha \frac{P^2_{x+y} - P^2_x}{P^4_\alpha - P^2_\alpha(P^2_{x+y} + P^2_x) + P^2_x P^2_{x+y}}.$$

De l'autre coté on a, (22), §. III. du T. XVI. Nr. XXXIII.

$$Q_x Q_y - P_x P_y R_{x+y} = Q_{x+y};$$

d'où l'on tire, en substituant $-x$ à x, et ensuite $x+y$ à y,

$$Q_x Q_{x+y} = Q_y - P_x P_{x+y} R_y;$$

et, en ayant égard aux relations

$$Q^2_x = 1 - P^2_x,\ \ R^2_x = 1 - c^2 P^2_x,$$

il s'en suivra

$$1 - (P^2_{x+y} + P^2_x) + P^2_x P^2_{x+y} = Q^2_y - 2Q_y R_y P_x P_{x+y} + R^2_y P^2_x P^2_{x+y},$$

puis

$$P^2_{x+y} + P^2_x = P^2_y + 2\,Q_y R_y P_x P_{x+y} + c^2 P^2_y P^2_x P^2_{x+y}.$$

Au moyen de cette formule on trouvera

$$P^4_\alpha - P^2_\alpha(P^2_{x+y} + P^2_x) + P^2_x P^2_{x+y}$$

$$= P^4_\alpha - P^2_\alpha\{P^2_y + 2Q_y R_y P_x P_{x+y} + c^2 P_y{}^2 P^2_x P^2_{x+y}\} + P^2_x P^2_{x+y}$$

$$= P^2_\alpha(P^2_\alpha - P^2_y) - 2P^2_\alpha Q_y R_y P_x P_{x+y} + (1 - c^2 P^2_\alpha P^2_y) P^2_x P^2_{x+y}$$

$$= (1 - c^2 P^2_\alpha P^2_y)\Big\{P^2_\alpha \frac{P^2_\alpha - P^2_y}{1 - c^2 P^2_\alpha P^2_y} - 2P_\alpha \frac{P_\alpha Q_y R_y}{1 - c^2 P^2_\alpha P^2_y} P_x P_{x+y} + P^2_x P^2_{x+y}\Big\};$$

et, en observant que l'on a

$$P_{\alpha+y} P_{\alpha-y} = \frac{P^2_\alpha - P^2_y}{1 - c^2 P^2_\alpha P^2_y}, \quad P_{\alpha+y} + P_{\alpha-y} = 2\frac{P_\alpha Q_y R_y}{1 - c^2 P^2_\alpha P^2_y},$$

l'expression précédente deviendra

$$=(1-c^2P^2{}_\alpha P^2{}_y)\{P^2{}_\alpha P_{\alpha+y}P_{\alpha-y}-P_\alpha(P_{\alpha+y}+P_{\alpha-y})P_xP_{x+y}+P^2{}_xP^2{}_{x+y}$$

$$=(1-c^2P^2{}_\alpha P^2{}_y)(P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y})(P_xP_{\alpha-y}+P_xP_{x+y}).$$

Il viendra par suite

$$\partial_x(J_{x+y}-J_x)$$

$$=\frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{1-c^2P^2{}_\alpha P^2{}_y}\cdot\frac{P^2{}_{x+y}-P^2{}_x}{(P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y})(P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y})};$$

et, comme on a

$$P^2{}_{x+y}-P^2{}_x=P_y\partial_x(P_xP_{x+y}),$$

$$\frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{1-c^2P^2{}_\alpha P^2{}_y}=\frac{1}{2}(P_{\alpha+y}-P_{\alpha-y}),$$

l'équation précédente se reduira à

$$\partial_x(J_{x+y}-J_x)=\frac{1}{2}\frac{P_\alpha(P_{\alpha+y}-P_{\alpha-y})\partial_x(P_xP_{x+y})}{(P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y})(P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y})}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial_x(P_xP_{x+y})}{P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y}}-\frac{\partial_x(P_xP_{x+y})}{P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\partial_x\{l(P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y})-l(P_\alpha P_{\alpha-y}-P_\alpha P_{x+y})\},$$

ou

$$(2)\qquad \partial_x(J_{x+y}-J_x)=\frac{1}{2}\partial_x l\,\frac{P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y}}.$$

En intégrant, et observant que $J_0=0$, on obtiendra

$$(3)\quad J_{x+y}-J_x-J_y+\frac{1}{2}l\frac{P_{\alpha+y}}{P_{\alpha-y}}=\frac{1}{2}\,l\,\frac{P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y}};$$

et, lorsque les logarithmes sont pris comme fonctions simples, de sorte que lu s'évanouit pour $u=1$, on pourra substituer à la précédente

$$(4)\quad J_{x+y}-J_x-J_y=\frac{1}{2}l\left\{\frac{P_{\alpha-y}}{P_{\alpha+y}}\cdot\frac{P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y}}\right\},$$

ou

$$(5)\quad J_{x+y}=J_x+J_y+\frac{1}{2}\mathrm{l}\,\frac{1-\dfrac{P_xP_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha+y}}}{1-\dfrac{P_xP_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y}}},$$

puis, en substituant $-x$ à x, et $x+y$ à y, il viendra à cause de $J_x=-J_{-x}$

$$(6)\quad J_{x+y}=J_x+J_y+\frac{1}{2}\mathrm{l}\,\frac{1+\dfrac{P_xP_y}{P_\alpha P_{\alpha-x-y}}}{1+\dfrac{P_xP_y}{P_\alpha P_{\alpha+x+y}}}.$$

Pour éviter les logarithmes, qui, dans leur acception générale, représentent des fonctions multiformes, il faudrait partir des équations

$$(7)\qquad \frac{\partial_\alpha K_x}{K_x}=2\frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha-P^2_x},\quad K_0=1;$$

d'où l'on tire entre J_x et K_x la relation

$$(8)\qquad K_x=c^{2J_x},$$

ce qui changerait les formules (4) et (6) en

$$(9)\quad \begin{cases} K_{x+y}=K_xK_y\dfrac{P_{\alpha-y}}{P_{\alpha+y}}\cdot\dfrac{P_\alpha P_{\alpha+y}-P_xP_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y}-P_xP_{x+y}},\\[2ex] K_{x+y}=K_xK_y\dfrac{P_{\alpha+x+y}}{P_{\alpha-x-y}}\cdot\dfrac{P_\alpha P_{\alpha-x-y}-P_xP_y}{P_\alpha P_{\alpha+x+y}-P_xP_y}.\end{cases}$$

Pour la généralité il serait à préférer d'introduire la fonction K_x au lieu de J_x; mais, afin de ne nous éloigner pas trop des fonctions elliptiques, nous continuons de nous occuper de la fonction J_x

A l'aide des formules connues on déduit de l'équation (4)

$$(10)\quad \begin{cases} J_{x+\tau}-J_x-J_\tau=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{P_\alpha Q_\alpha R_x-P_xQ_xR_\alpha}{P_\alpha Q_\alpha R_x+P_xQ_xR_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{R_{\alpha+x+\varrho}}{R_{\alpha-x+\varrho}},\\[2ex] J_{x+\sigma}-J_x-J_\sigma=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{P_\alpha R_\alpha Q_x-P_xR_xQ_\alpha}{P_\alpha R_\alpha Q_x+P_xR_xQ_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{Q_{\alpha+x+\varrho}}{Q_{\alpha-x+\varrho}},\\[2ex] J_{x+\varrho}-J_x-J_\varrho=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{P_\alpha Q_xR_x-P_xQ_\alpha R_\alpha}{P_\alpha Q_xR_x+P_xQ_\alpha R_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{P_{\alpha-x}}{P_{\alpha+x}}.\end{cases}$$

Jusqu'ici on a supposé α invariable; mais, en laissant varier α, on parviendra à des formules analogues à celles que nous avons trouvé pour la variation de x. En effet on a

$$\partial_\alpha \frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha - P^2_x} = -\frac{P^2_x + P^2_\alpha - 2(1+c^2)P^2_x P^2_\alpha + 3c^2 P^2_x P^4_\alpha - c^2 P^6_\alpha}{(P^2_\alpha - P^2_x)^2},$$

et

$$\partial_x \frac{P_x Q_x R_x}{P^2_x - P^2_\alpha} = -\frac{P^2_\alpha + P^2_x - 2(1+c^2)P^2_\alpha P^2_x + 3c^2 P^2_\alpha P^4_x - c^2 P^6_x}{(P^2_x - P^2_\alpha)^2},$$

d'où

$$\partial_\alpha \frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha - P^2_x} - \partial_x \frac{P_x Q_x R_x}{P^2_x - P^2_\alpha} = c^2 \frac{P^6_\alpha - 3P^4_\alpha P^2_x + 3P^2_\alpha P^2_x - P^6_x}{(P^2_\alpha - P^2_x)^2},$$

ou, eu égard aux équations (1),

$$(11) \qquad \partial_\alpha \partial_x J_{x,\alpha} - \partial_x \partial_\alpha J_{\alpha,x} = c^2(P^2_\alpha - P^2_x) = R^2_x - R^2_\alpha,$$

ou, ce qui revient au même

$$\partial_x \partial_\alpha (J_{x,\alpha} - J_{\alpha,x}) = \partial_x H_x - \partial_\alpha H_\alpha.$$

On tomberait en erreur, si, en intégrant par rapport à x et α, on voudrait déterminer les constantes d'intégration par la supposition de $x=0$ et $\alpha=0$, puisque la fonction $J_{x,\alpha}$ déterminée par

$$J_{x,\alpha} = \int_0^x \frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha - P^2_x} dx$$

restera tout à fait indéterminée pour $\alpha=0$, tant qu'il n'y a pas une relation entre α et x de maniére à s'évanouir en même temps. Mais ce ne sera pas autant par rapport à $\partial_x J_{x,\alpha}$, cette derivée s'évanouissant avec α, pourvuque x ne soit nulle en même temps. Nous mettons en conséquence l'équation (11) sous la forme

$$\partial_x \partial_\alpha J_{\alpha,x} + c^2(P^2_\alpha - P^2_x) = \partial_\alpha \partial_x J_{x,\alpha}$$

et nous en déduisons

$$\partial_x \partial_\alpha (J_{\alpha,x+y} - J_{\alpha,x}) - c^2(P^2_{x+y} - P^2_x) = \partial_\alpha \partial_x (J_{x+y,\alpha} - J_{x,\alpha}),$$

ou, eu égard à l'équation (2),

$$\partial_x \partial_\alpha (J_{\alpha,x+y} - J_{\alpha,x}) - c^2 P_y \partial_x P_x P_{x+y} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_x \mathrm{l} \frac{P_\alpha P_{\alpha+y} - P_x P_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y} - P_x P_{x+y}}.$$

En intégrant d'abord par rapport à x, il viendra

$$\partial_\alpha (J_{\alpha,x+y} - J_{\alpha,x} - J_{\alpha,y}) - c^2 P_x P_y P_{x+y} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathrm{l} \frac{P_{\alpha-y}}{P_{\alpha+y}} \cdot \frac{P_\alpha P_{\alpha+y} - P_x P_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y} - P_x P_{x+y}},$$

puis, en intégrant par rapport à α,

$$J_{\alpha,x+y}-J_{\alpha,x}-J_{\alpha,y}-\alpha c^2 P_x P_y P_{x+y}=\frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{P_{y-\alpha}}{P_{y+\alpha}}\cdot\frac{P_\alpha P_{\alpha+y}-P_x P_{x+y}}{P_\alpha P_{\alpha-y}-P_x P_{x+y}},$$

pourvuque le logarithme soit pris comme fonction simple. En remplaçant α, x, y par x, α, β on obtiendra

$$(12)\quad J_{x,\alpha+\beta}-J_{x,\alpha}-J_{x,\beta}-xc^2 P_\alpha P_\beta P_{\alpha+\beta}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{P_{\beta-x}}{P_{\beta+x}}\cdot\frac{P_x P_{x+\beta}-P_\alpha P_{\alpha+\beta}}{P_x P_{x-\beta}-P_\alpha P_{\alpha+\beta}},$$

ou

$$J_{x,\alpha+\beta}=J_{x,\alpha}+J_{x,\beta}+xc^2 P_\alpha P_\beta P_{\alpha+\beta}+\frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{\dfrac{P_\alpha P_{\alpha+\beta}}{P_x P_{\beta+x}}-1}{\dfrac{P_\alpha P_{\alpha+\beta}}{P_x P_{\beta-x}}+1};$$

et enfin, si l'on substitue $-\alpha$ à α, puis $\alpha+\beta$ à β, on trouvera

$$(13)\quad J_{x,\alpha+\beta}=J_{x,\alpha}+J_{x,\beta}+xc^2 P_\alpha P_\beta P_{\alpha+\beta}+\frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{\dfrac{P_\alpha P_\beta}{P_\alpha P_{\alpha+\beta-x}}-1}{\dfrac{P_\alpha P_\beta}{P_x P_{\alpha+\beta+x}}+1}.$$

En observant que $Q_\tau=0$, $R_\sigma=0$, il suit de l'équation (1)

$$J_{x,\tau}=0,\quad J_{x,\sigma}=0;$$

on tirera par suite de la formule (12)

$$(14)\quad\begin{cases}J_{x,\alpha+\tau}-J_{x,\alpha}-xc^2\dfrac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{P_\alpha Q_\alpha R_x-P_x Q_x R_\alpha}{P_\alpha Q_\alpha R_x+P_x Q_x R_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{R_{\alpha+x+\varrho}}{R_{\alpha-x+\varrho}},\\[2ex] J_{x,\alpha+\sigma}-J_{x,\alpha}-x\dfrac{P_\alpha R_\alpha}{Q_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{P_\alpha R_\alpha Q_x-P_x R_x Q_\alpha}{P_\alpha R_\alpha Q_x+P_x R_x Q_\alpha}=\dfrac{1}{2}\mathrm{l}\dfrac{Q_{\alpha+x+\varrho}}{Q_{\alpha-x+\varrho}}.\end{cases}$$

De plus on a évidemment, en vertu des équations (I)

$$(15)\quad J_{x,\alpha+2\tau}=J_{x,\alpha},\quad J_{x,\alpha+2\sigma}=J_{x,\alpha},\quad J_{x,\alpha+2\varrho}=J_{x,\alpha},$$

et, à cause de la relation $\varrho=\sigma-\tau$, on aura par suite

$$J_{x,\alpha+\varrho}=J_{x,\alpha+\sigma-\tau}=J_{x,\alpha+\sigma+\tau}:$$

donc on trouvera, eu égard aux formules (14),

$$J_{x,\alpha+\varrho}-J_{x,\alpha+\tau}-x\,\frac{P_{\alpha+\tau}R_{\alpha+\tau}}{Q_{\alpha+\tau}}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{Q_{\alpha+x+\sigma}}{Q_{\alpha-x+\sigma}},$$

ou

$$J_{x,\alpha+\varrho}-J_{x,\alpha}+x\left\{\frac{Q_\alpha}{P_\alpha R_\alpha}-c^2\frac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}\right\}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{Q_{\alpha+x+\sigma}}{Q_{\alpha-x+\sigma}}\cdot\frac{R_{\alpha+x+\varrho}}{R_{\alpha-x+\varrho}},$$

ou bien

$$(16)\qquad J_{x,\alpha+\varrho}-J_{x,\alpha}+2\,\frac{Q_\alpha R_\alpha}{P_\alpha}=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{P_{\alpha-x}}{P_{\alpha+x}}.$$

En comparant les formules (14) et (16) aux formules (10), on conclura

$$(17)\qquad \begin{cases} J_{x+\tau,\alpha}-J_{\tau,\alpha}=J_{x,\alpha+\tau}-xc^2\,\dfrac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}, \\ J_{x+\sigma,\alpha}-J_{\sigma,\alpha}=J_{x,\alpha+\sigma}-x\,\dfrac{P_\alpha R_\alpha}{Q_\alpha}, \\ J_{x+\varrho,\alpha}-J_{\varrho,\alpha}=J_{x,\alpha+\varrho}+x\,\dfrac{Q_\alpha R_\alpha}{P_\alpha}; \end{cases}$$

d'où encore, à l'aide des formules (15),

$$(18)\qquad \begin{cases} J_{x+\tau,\alpha+\tau}-J_{\tau,\alpha+\tau}=J_{x,\alpha}+xc^2\dfrac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}, \\ J_{x+\sigma,\alpha+\sigma}-J_{\sigma,\alpha+\sigma}=J_{x,\alpha}+x\,\dfrac{P_\alpha R_\alpha}{Q_\alpha}, \\ J_{x+\varrho,\alpha+\varrho}-J_{\varrho,\alpha+\varrho}=J_{x,\alpha}-x\,\dfrac{Q_\alpha R_\alpha}{P_\alpha}; \end{cases}$$

en y ajoutant, que des formules (14) et (16) on tire

$$(19)\qquad \begin{cases} J_{\tau,\alpha+\tau}=J_{\tau,\alpha}+\tau c^2\dfrac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}, \\ J_{\sigma,\alpha+\sigma}=J_{\sigma,\alpha}+\sigma\,\dfrac{P_\alpha R_\alpha}{Q_\alpha}, \\ J_{\varrho,\alpha+\varrho}=J_{\varrho,\alpha}-\varrho\,\dfrac{Q_\alpha R_\alpha}{P_\alpha}, \end{cases}$$

il viendra

$$(20)\quad \begin{cases} J_{x+\tau,\alpha+\tau}=J_{x,\alpha}+J_{\tau,\alpha}+(x+\tau)c^2\dfrac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}, \\ J_{x+\sigma,\alpha+\sigma}=J_{x,\alpha}+J_{\sigma,\alpha}+(x+\sigma)\dfrac{P_\alpha R_\alpha}{Q_\alpha}, \\ J_{x+\varrho,\alpha+\varrho}=J_{x,\alpha}+J_{\varrho,\alpha}-(x+\varrho)\dfrac{Q_\alpha R_\alpha}{P_\alpha}. \end{cases}$$

Pour complèter la théorie de la fonction J_x, il faut établir les ormules propres à la réduction de J_x dans les cas où le module cesse d'être positif et inférieur à 1. On se sert pour cela des ormules

$$P_{x,-c}=P_x,\quad Q_{x,-c}=Q_x,\quad R_{x,-c}=R_x,$$

$$P_{cx,\frac{1}{c}}=cP_x,\quad Q_{cx,\frac{1}{c}}=R_x,\quad R_{cx,\frac{1}{c}}=Q_x,$$

$$P_{bx,\frac{ci}{b}}=-Q_{x+\tau},\quad Q_{bx,\frac{ci}{b}}=P_{x+\tau},\quad R_{bx,\frac{ci}{b}}=\frac{1}{b}R_{x+\tau},$$

uxquelles on pourra joindre

$$P_{ix,b}=\frac{1}{b}R_{x+\sigma},\quad Q_{ix,b}=\frac{ci}{b}Q_{x+\sigma},\quad R_{ix,b}=cP_{x+\sigma}.$$

n effet, suivant l'équation (1) on aura

$$\partial_x J_{\alpha x}=\alpha\,\frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha-P^2_{\alpha x}},$$

par suite

$$\partial_x J_{x,\alpha,-c}=\frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha-P^2_x}=\partial_x J_x,$$

$$\partial_x J_{cx,c\alpha,\frac{1}{c}}=\frac{P_\alpha Q_\alpha R_\alpha}{P^2_\alpha-P^2_x}=\partial_x J_x,$$

$$\partial_x J_{bx,b\alpha,\frac{ci}{b}}=-\frac{P_{\alpha+\tau}Q_{\alpha+\tau}R_{\alpha+\tau}}{Q^2_{\alpha+\tau}-Q^2_{x+\tau}}=\frac{P_{\alpha+\tau}Q_{\alpha+\tau}R_{\alpha+\tau}}{P^2_{\alpha+\tau}-P^2_{x+\tau}}=\partial_x J_{x+\tau,\alpha+\tau},$$

$$\partial_x J_{ix,i\alpha,b}=-c^2\frac{P_{\alpha+\sigma}Q_{\alpha+\sigma}R_{\alpha+\sigma}}{R^2_{\alpha+\sigma}-R^2_{x+\sigma}}=\frac{P_{\alpha+\sigma}Q_{\alpha+\sigma}R_{\alpha+\sigma}}{P^2_{\alpha+\sigma}-P^2_{x+\sigma}}=\partial_x J_{x+\sigma,\alpha+\sigma}.$$

n intégrant il viendra

$$(21)\quad \begin{cases} J_{x,\alpha,-c}=J_x, \\ J_{cx,c\alpha,\frac{1}{c}}=J_x, \end{cases}$$

$$J_{bx,ba,\frac{ci}{b}} = J_{x+\tau,\alpha+\tau} - J_{\tau,\alpha+\tau},$$

$$J_{ix,ia,b} = J_{x+\sigma,\alpha+\sigma} - J_{\sigma,\alpha+\sigma};$$

et, en vertu des formules (18), on pourra substituer aux dernières

$$(22)\quad \begin{cases} J_{bx,ba,\frac{ci}{b}} = J_{x,\alpha} + x\, c^2 \dfrac{P_\alpha Q_\alpha}{R_\alpha}, \\ J_{ix,ia,b} = J_{x,\alpha} + x \dfrac{P_\alpha R_\alpha}{Q_\alpha}. \end{cases}$$

Enfin il reste encore à montrer, comment les transformations du module trouvées pour les fonctions P_x et H_x soient applicables à la fonction J_x.

En combinant les formules connues

$$P_{\theta\alpha,k} = \overset{n}{\Pi}_p\, P_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau},$$

et

$$1 - \frac{P^2_{\theta x,k}}{P^2_{\theta\alpha,k}} = \overset{n}{\Pi}_p \frac{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau}}}{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

il s'en suivra

$$P^2_{\theta\alpha,k} - P^2_{\theta x,k} = \overset{n}{\Pi}_p \frac{P^2_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau} - P^2_x}{1 - \dfrac{P^2_x}{P^2_{\varrho+\frac{2p}{n}\tau}}},$$

d'où, en prenant les logarithmes, et différentiant par rapport à

$$\theta \frac{P_{\theta\alpha,k}\, Q_{\theta\alpha,k}\, R_{\theta\alpha,k}}{P^2_{\theta\alpha,k} - P^2_{\theta x,k}} = \overset{n}{\Sigma}_p \frac{P_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau}\, Q_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau}\, R_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau}}{P^2_{\alpha+\frac{2p}{n}\tau} - P^2_x},$$

ou, en vertu des équations (1),

$$\partial_x J_{\theta x,\theta\alpha,k} = \overset{n}{\Sigma}_p\, \partial_x J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\tau}:$$

on aura par suite

$$(23)\qquad J_{\theta x,\theta\alpha,k}=\overset{n}{\Sigma}_p J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\tau,c}.$$

l'aide de la seconde des formules (22) on en tirera

$$(24)\qquad J_{\theta x,\theta\alpha,h}=xM+\overset{n}{\Sigma}_p J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b},$$

'ant posé, pour abréger,

$$M=-\theta\frac{P_{\theta\alpha,h}R_{\theta\alpha,h}}{Q_{\theta\alpha,h}}+\overset{n}{\Sigma}_p\frac{P_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}R_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}{Q_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}.$$

n pourra donner au second membre de cette équation une forme
us compacte au moyen des transformations connues; mais on
parviendra plus promptement, en différentiant par rapport à x
quation (24), ce qui donnera

$$\theta\frac{P_{\theta\alpha,h}Q_{\theta\alpha,h}R_{\theta\alpha,h}}{P^2_{\theta\alpha,h}-P^2_{\theta x,h}}=M+\overset{n}{\Sigma}_p\frac{P_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}Q_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}R_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}}{P^2_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}-P^2_{x,b}},$$

où, en observant que $\frac{1}{P_\varrho}=0$,

$$\theta\frac{P_{\theta\alpha,h}Q_{\theta\alpha,h}R_{\theta\alpha,h}}{P^2_{\theta\alpha,h}-P^2_{\theta\varrho_b,h}}=M.$$

r on a $\theta\varrho_b=n\varrho_h$, et par suite $P_{\theta\varrho_b,h}=0$ ou $\frac{1}{P_{\theta\varrho_b,b}}=0$, selon que
est pair ou impair. Si donc on désigne par δ un coefficient égal
1 ou 0, selon que n est pair ou impair, on aura

$$M=\delta\theta\frac{Q_{\theta\alpha,h}R_{\theta\alpha,h}}{P_{\theta\alpha,h}},$$

qui changera l'équation (24) en

$$(25)\qquad J_{\theta x,\theta\alpha,h}=x\delta\theta\frac{Q_{\theta\alpha,h}R_{\theta\alpha,h}}{P_{\theta\alpha,h}}+\overset{n}{\Sigma}_p J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_b,b}.$$

En remplaçant k par b, ce qui changera h en c, θ en $\frac{n}{\theta}$, la
cédente se réduira à

$$(26)\qquad J_{\frac{n}{\theta}x,\frac{n}{\theta}\alpha,c}=x\delta\frac{n}{\theta}\frac{Q_{\frac{n}{\theta}\alpha}R_{\frac{n}{\theta}\alpha}}{P_{\frac{n}{\theta}\alpha}}+\sum_p^n J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_k,k},$$

ou, en observant que $\varrho_k=\theta_\varrho$,

$$(27)\qquad J_{nx,n\alpha}=x\delta n\frac{Q_{n\alpha}R_{n\alpha}}{P_{n\alpha}}+\sum_p^n J_{\theta x,\theta(\alpha+\frac{2p}{n}\varrho),k},$$

d'où encore, en vertu de la formule (23),

$$(28)\qquad J_{nx,n\alpha}=x\delta n\frac{Q_{n\alpha}R_{n\alpha}}{P_{n\alpha}}+\sum_p^n\sum_q^n J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\tau+\frac{2q}{n}\varrho}.$$

En considérant en particulier le cas spécial où $n=2$, on aura

$$k=\frac{1-b}{1+b},\ h=\frac{2\sqrt{b}}{1+b},\ c=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ b=\frac{1-k}{1+k},\quad \theta=1+b=\frac{2}{1+k};$$

et, comme dans ce cas n est pair, δ sera égal à 1. Les formules (23), (25), (27) et (28) se réduiront par suite à

$$(29)\qquad\begin{cases} J_{\theta x,\theta\alpha,k}=J_{x,\alpha}+J_{x,\alpha+\tau}, \\ J_{\theta x,\theta\alpha,h}=x\theta\dfrac{Q_{\theta\alpha,h}R_{\theta\alpha,h}}{P_{\theta\alpha,h}}+J_{x,\alpha,b}+J_{x,\alpha+\varrho_b,b}, \\ J_{2x,2\alpha}=2x\dfrac{Q_{2\alpha}R_{2\alpha}}{P_{2\alpha}}+J_{\theta x,\theta\alpha,k}+J_{\theta x,\theta(\alpha+\varrho),k}, \\ J_{2x,2\alpha}=2x\dfrac{Q_{2\alpha}R_{2\alpha}}{P_{2\alpha}}+J_{x,\alpha}+J_{x,\alpha+\tau}+J_{x,\alpha+\sigma}+J_{x,\alpha+\varrho}. \end{cases}$$

Pour savoir, ce que deviennent les formules trouvées pour n infini, il faut déterminer préalablement les fonctions

$$J_{\varepsilon x,\varepsilon\alpha}\ \text{et}\ J_{x,\alpha,\varepsilon}$$

pour le cas où $\varepsilon=0$. Mais, puisque les équations (23) et (25) conduisent à des formules connues, nous nous occuperons seulement de la formule (26), ce qui exige la détermination de $J_{x,\alpha,\varepsilon}$.

On aura pour cela, en vertu des équations (1)

$$\partial_x J_{x,\alpha,\varepsilon}=\frac{P_{\alpha,\varepsilon}Q_{\alpha,\varepsilon}R_{\alpha,\varepsilon}}{P^2_{\alpha,\varepsilon}-P^2_{x,\varepsilon}}.$$

De plus on a

$$P_{x,\varepsilon}=\sin x,\quad Q_{x,\varepsilon}=\cos x,\quad R_{x,\varepsilon}=1,$$

pourvuque

$$\varepsilon P_{x,\varepsilon}=0,$$

ce qui changera la précédente en

$$\partial_x J_{x,\alpha,\varepsilon}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2-(\sin x)^2}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}.$$

Or on a

$$\partial_x \mathrm{l}\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha-x)}=\frac{\cos(\alpha+x)}{\sin(\alpha+x)}+\frac{\cos(\alpha-x)}{\sin(\alpha-x)}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}:$$

donc il viendra

$$\partial_x J_{x,\alpha,\varepsilon}=\frac{1}{2}\partial_x \mathrm{l}\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha-x)},$$

d'où

$$(30)\qquad J_{x,\alpha,\varepsilon}=\frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha-x)},$$

pourvuque le logarithme soit pris comme fonction simple.

Si, au contraire, $\varepsilon P_{\alpha,\varepsilon}$ n'est pas égal à 0, si p. e. α est de la forme $\alpha+\varrho_\varepsilon$, on aura

$$\partial_x J_{x,\alpha+\varrho_\varepsilon,\varepsilon}=-\frac{Q_{\alpha,\varepsilon}R_{\alpha,\varepsilon}}{P_{\alpha,\varepsilon}}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2 P^2_{\alpha,\varepsilon}P^2_{x,\varepsilon}},$$

ou

$$\partial_x J_{x,\alpha+\varrho_\varepsilon,\varepsilon}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

d'où

$$(31)\qquad J_{x,\alpha+\varrho_\varepsilon,\varepsilon}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Maintenant, comme pour n infini il est indifférent de supposer n pair ou impair, nous faisons n impair ce qui permet de substituer à la formule (26)

$$J_{\frac{n}{\theta}x,\frac{n}{\theta}\alpha}=J_{x,\alpha,k}+\sum_{p=1}^{p=\frac{n+1}{2}}\left\{J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_k,k}+J_{x,\alpha-\frac{2p}{n}\varrho_k,k}\right\},$$

ou

$$(32)\qquad J_{\frac{n}{\theta}x,\frac{n}{\theta}\alpha}=xN+J_{x,\alpha,k}+\sum_{p=1}^{p=\frac{m+1}{2}}\left\{J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_k,k}+J_{x,\alpha-\frac{2p}{n}\varrho_k,k}\right\},$$

ayant posé pour abréger

$$(33)\quad xN=\sum_{p=\frac{m+1}{2}}^{p=\frac{n+1}{2}}\left\{J_{x,\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_k,k}+J_{x,\alpha-\frac{2p}{n}\varrho_k,k}\right\}.$$

Supposons de plus, que x et α soient pris de manière à satisfaire aux conditions

$$\varepsilon P_{x,\varepsilon}=0,\quad \varepsilon P_{\alpha,\varepsilon};$$

alors, en se rappelant, que k s'évanouit pour $n=\infty$, on aura aussi

$$kP_{\alpha+\frac{2p}{n}\varrho_k,k}=0,$$

tant que $\frac{2p}{n}$ restera inférieur à 1. On pourra enfin supposer le nombre m infini mais inférieur à n, de sorte que $\frac{2p}{n}$ restera inférieur à 1 dans la somme du second membre de l'équation (32), tandisque $\frac{2p}{n}$ convergera vers l'unité dans la somme du second membre de l'équation (33). Pour le premier cas subsistera l'équation (30), et pour l'autre l'équation (31); d'où il suit que N sera indépendant de x, tandis qu'à cause des relations

$$\varrho_k=n\frac{\pi\varrho}{2\tau}=ni\frac{\pi\tau_b}{2\tau},\ \frac{n}{\theta}=\frac{2\tau}{\pi}$$

l'équation (32) se réduira à

$$(34)\quad J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}\alpha}=xN+\frac{1}{2}l\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha-x)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{l\frac{\sin\left(\alpha+x+p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)}{\sin\left(\alpha-x+p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)}+l\frac{\sin\left(\alpha+x-p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)}{\sin\left(\alpha-x-p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)}\right\}$$

$$=xN+\frac{1}{2}l\left\{\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\alpha-x)}\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{\sin\left(\alpha+x+p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)\sin\left(\alpha+x-p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)}{\sin\left(\alpha-x+p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)\sin\left(\alpha-x-p\frac{\pi\varrho}{\tau}\right)}\right\},$$

ou, en vertu des équations (30), §. IV. du T. XVII. Nr. III.

$$(35) \qquad J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}\alpha} = xN + \frac{1}{2}\,l\,\frac{Z_{\alpha+x}}{Z_{\alpha-x}}.$$

Pour déterminer la constante N on différentie par rapport à ce qui donnera

$$\frac{2\tau}{\pi}\frac{P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}Q_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}R_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}}{P^2_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}-P^2_{\frac{2\tau}{\pi}x}} = N + \frac{1}{2}\partial_x l Z_{\alpha+x} - \frac{1}{2}\partial_x l Z_{\alpha-x}$$

$$= N + \frac{1}{2}\partial_\alpha l Z_{\alpha+x} + \frac{1}{2}\partial_\alpha l Z_{\alpha-x};$$

où l'on tire, en prenant $x=0$,

$$\frac{2\tau}{\pi}\frac{Q_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}R_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}}{P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}} = N + \partial_\alpha l Z_\alpha,$$

uis

$$N = \partial_\alpha l P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha} - \partial_\alpha l Z_\alpha = \partial_\alpha l \frac{P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}}{Z_\alpha}.$$

Mais on a

$$(36) \qquad P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha} = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{Z_\alpha}{\Theta_\alpha},$$

et par suite

$$\partial_\alpha l \frac{P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}}{Z_\alpha} = \partial_\alpha l \frac{1}{\Theta_\alpha} = -\partial_\alpha l\,\Theta_\alpha:$$

donc on obtiendra

$$N = -\partial_\alpha l\Theta_\alpha.$$

En substituant cette valeur de N, l'équation (35) deviendra

$$(37) \qquad J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}\alpha} = -x\partial_\alpha l\Theta_\alpha + \frac{1}{2}\,l\,\frac{Z_{\alpha+x}}{Z_{\alpha-x}}.$$

De plus, en observant, que la formule (16) donne

$$J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}(\alpha+\frac{\pi\varrho}{2\tau})} = J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}\alpha} - x\partial_\alpha l\,P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{P_{\frac{2\tau}{\pi}(\alpha-x)}}{P_{\frac{2\tau}{\pi}(\alpha+x)}},$$

on aura, au moyen de la précédente

$$J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}\alpha+\varrho}=-x\partial_\alpha l\{\Theta_\alpha P_{\frac{2\tau}{\pi}\alpha}\}+\frac{1}{2}l\left\{\frac{Z_{\alpha+x}}{P_{\frac{2\tau}{\pi}(\alpha+x)}}\cdot\frac{P_{\frac{2\tau}{\pi}(\alpha-x)}}{Z_{\alpha-x}}\right\},$$

ou suivant l'équation (36),

$$(38)\qquad J_{\frac{2\tau}{\pi}x,\frac{2\tau}{\pi}\alpha+\varrho}=-x\partial_\alpha lZ_\alpha+\frac{1}{2}l\frac{\Theta_{\alpha+x}}{\Theta_{\alpha-x}}.$$

Ajoutons enfin qu'à l'aide de la formule (34) §. I., jointe à la formule (36), on pourra substituer aux formules (37) et (38)

$$(39)\quad\begin{cases} J_{x,\alpha}=\frac{x}{\tau}\{\alpha H_\tau-\tau H_\alpha\}+\frac{1}{2}l\frac{Z_{\frac{\pi}{2\tau}(\alpha+x)}}{Z_{\frac{\pi}{2\tau}(\alpha-x)}}, \\ J_{x,\alpha+\varrho}=\frac{x}{\tau}\left\{\alpha H_\tau-\tau H_\alpha-\tau\frac{Q_\alpha R_\alpha}{P_\alpha}\right\}+\frac{1}{2}l\frac{\Theta_{\frac{\pi}{2\tau}(\alpha+x)}}{\Theta_{\frac{\pi}{2\tau}(\alpha-x)}}. \end{cases}$$

Ces formules, jointes à la formule (34), §. I., conduisent à une relation remarquable entre la fonction J_x et l'intégrale de H_x. On pourra démontrer directement cette relation au moyen de la formule fondamentale de la fonction H_x, comme sela a été remarqué par M. Jacobi.

XX.

De integrali definito $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m} dx$.

Auctor
Christianus Fr. Lindman,
Lector Strengnesensis.

Si prius posuerimus $n =$ num. imp., habebimus

$$\mathrm{Sin}^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \{ n_0 \, \mathrm{Sin} nx - n_1 \, \mathrm{Sin}(n-2)x$$
$$+ n_2 \mathrm{Sin}(n-4)x - \dots \pm n_{\frac{n-1}{2}} \, \mathrm{Sin} x \} \quad . \; . \; . \; (\alpha),$$

nde indefinita integratione provenit

$$\int \frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m} dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \{ n_0 \int \frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m} dx - n_1 \int \frac{\mathrm{Sin}(n-2)x}{x^m} dx \dots$$
$$\pm n_{\frac{n-1}{n}} \int \frac{\mathrm{Sin} x}{x^m} dx \}.$$

Quum vero sit in genere

$$\int \frac{\mathrm{Sin} y}{y^m} dy = - \frac{1}{\Gamma(m)} \overset{v=m-1}{\underset{v=1}{S}} \frac{\Gamma(m-v)}{y^{m-v}} \mathrm{Sin}(y + \frac{v-1}{2} \pi)$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(m)} \int \frac{dy}{y} \mathrm{Sin}(y + \frac{m-1}{2} \pi),\text{*)}$$

---

*) Vide Minding, Integral-Tafeln pag. 138. Berl. 1849.

hac formula usi, posito primum $y=nx$, deinde $y=(n-2)x$ etc. inveniemus

$$\int\frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m}dx$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}\Gamma(m)}\Big[-n_0\overset{v=m-1}{\underset{v=1}{S}}\frac{n^{v-1}\Gamma(m-v)}{x^{m-v}}\mathrm{Sin}(nx+\frac{v-1}{2}\pi)$$

$$+n_0 n^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Sin}(nx+\frac{m-1}{2}\pi)$$

$$+n_1\overset{v=m-1}{\underset{v=1}{S}}\frac{(n-2)^{v-1}\Gamma(m-v)}{x^{m-v}}\mathrm{Sin}(\overline{n-2}.x+\frac{v-1}{2}\pi)$$

$$-n_1(n-2)^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Sin}(\overline{n-2}.x+\frac{m-1}{2}\pi)$$

$$-n_2\overset{v=m-1}{\underset{v=1}{S}}\frac{(m-4)^{v-1}\Gamma(m-v)}{x^{m-v}}\mathrm{Sin}(\overline{n-4}.x+\frac{v-1}{2}\pi)$$

$$+n_2(n-4)^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Sin}(\overline{n-4}.x+\frac{m-1}{2}\pi)$$

$$\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm n_{\frac{n-1}{2}}\overset{v=m-1}{\underset{v=1}{S}}\frac{1^{v-1}\Gamma(m-v)}{x^{m-v}}\mathrm{Sin}(x+\frac{v-1}{2}\pi)$$

$$\mp n_{\frac{n-1}{2}}1^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Sin}(x+\frac{m-1}{2}\pi)\Big].$$

Valor dextri membri nunc determinandus est pro $x=0$ et $x=\infty$. Quoniam in genere est

$$\mathrm{Sin}(z+\frac{m-1}{2}\pi)=\mathrm{Sin}z\mathrm{Cos}\frac{m-1}{2}\pi+\mathrm{Cos}z\mathrm{Sin}\frac{m-1}{2}\pi$$

h. e.

$$\mathrm{Sin}(z+\frac{m-1}{2}\pi)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\mathrm{Sin}z,\text{ si est } m=\text{num. imp.}$$

$$\mathrm{Sin}(z+\frac{m-1}{2}\pi)=(-1)^{\frac{m}{2}-1}\mathrm{Cos}\,z,\text{ si est } m=\text{num par.}$$

et

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{Cos}bx}{x}dx=\infty,\text{ necesse est, sit } m=\text{num. imp.}$$

i Sin $(nx + \frac{v-1}{2}\pi)$ et insequentes secundum theorema

$$\text{Sin}(a+b) = \text{Sin}a\text{Cos}b + \text{Cos}a\text{Sin}b$$

actantur, unaquaeque ex summis finitis in duas disjungitur, ubi est Sinus aut Cosinus multiplicis ipsius x, prout sit $v=$ num. ip. aut par.. Huc accedit, quod valores extremi ipsius v sunt —2 et 1, si est $v=$num. imp., at $m-1$ et 2, si est $v=$ num. r., quamobrem, posito $2v-1$ pro v, si impar est, et $2v$ pro v, par est, habebimus

$$\frac{1)^{\frac{n-1}{2}}}{1\,\Gamma(m)}\Bigg[-n_0 \underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{(-1)^{v-1}n^{2v-2}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}}\text{Sin}nx$$

$$-n_0 \underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{(-1)^{v-1}n^{2v-1}\Gamma(m-2v)}{x^{m-2v}}\text{Cos}nx$$

$$+n_1 \underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{(-1)^{v-1}(n-2)^{2v-2}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}}\text{Sin}(n-2)x$$

$$+n_1 \underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{(-1)^{v-1}(n-2)^{2v-1}\Gamma(m-2v)}{x^{m-2v}}\text{Cos}(n-2)x$$

. . . .

$$\pm n_{\frac{n-1}{2}} \underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{(-1)^{v-1}1^{2v-2}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}}\text{Sin}x$$

$$\pm n_{\frac{n-1}{2}} \underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-1}{2}}{S}} \frac{(-1)^{v-1}1^{2v-1}\Gamma(m-2v)}{x^{m-2v}}\text{Cos}x\Bigg].$$

Pro $x=\infty$ omnes summae in nihilum abeunt, propterea quod Sinus Cosinus limites $+1$ et -1 excedere nequeunt. Pro $x=0$ omnes nmarum termini, in quibus insunt Sinus, nihilo aequales evadunt, ia ad inveniendos veros valores horum terminorum, qui hac positione formam indeterminatam $\frac{0}{0}$ abeunt, numeratores et denominatores $-2v+1)^{ies}$ differentiandi sunt et quotientes differentiales numeratom, quum sit $m-2v+1=$num. par., Sinui aequales ideoque nihilo quales pro $x=0$. Omnes summae, ubi Cosinus inest, totidem habent rmini, qui pro eodem valore ipsius v communem implicant facem $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+v-1}\Gamma(m-2v)}{2^{n-1}x^{m-2v}\Gamma(m)}$. His terminis addendis inveniemus

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+\nu-1}\Gamma(m-2\nu)}{2^{n-1}x^{m-2\nu}\Gamma(m)}\{n_0 n^{2\nu-1}\operatorname{Cos}nx-n(n-2)^{2\nu-1}\operatorname{Cos}(n-2)x+\ldots$$
$$\ldots\pm n_{\frac{n-1}{2}}1^{2\nu-1}\operatorname{Cos}x\}=s.$$

Quum s comparatur cum formula (α), facile apparet esse

$$s=\pm\frac{(-1)^{\nu-1}\Gamma(m-2\nu)}{x^{m-2\nu}\Gamma(m)}\cdot\frac{d^{2\nu-1}(\operatorname{Sin}^n x)}{(dx)^{2\nu-1}}.$$

Quum vero necesse sit, cuncti quotientes differentiales ipsius $\operatorname{Sin}^n x$, nisi sit $n<m$, dignitatem Sinus, cujus index major sit quam $m-2\nu$, factorem habeant, elucet esse $s=0$ pro $x=0$. Quia hoc verum est pro omnibus ipsius ν valoribus, omnes hae summae nihilo aequales evadunt. Si jam integralia huc usque relicta adeamus et reputemus formulas

$$\operatorname{Sin}(\overline{n-2p}.x+\frac{m-1}{2}\pi)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\operatorname{Sin}(n-2p)x,\ (m=\text{num. imp.})$$

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{Sin}(n-2p)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

invenimus

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{Sin}^n x}{x^m}dx=\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{n-1}\Gamma(m)}\cdot\frac{\pi}{2}\mathop{S}_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}}(-1)^p n_p(n-2p)^{m-1}\quad\ldots\ (\beta),$$

ubi n et m sunt numeri impares et $n\geqq m$.

Posito jam $n=$num. pari, constat esse

$$\operatorname{Sin}^n x=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\{n_0\operatorname{Cos}nx-n_1\operatorname{Cos}(n-2)x+\ldots$$
$$\ldots\pm n_{\frac{n}{2}-1}\operatorname{Cos}2x\mp\frac{1}{2}n_{\frac{n}{2}}\}\quad\ldots\ (\gamma),$$

unde indefinita integratione prodit

$$\ldots\frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m}dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\Big\{n_0\int\frac{\mathrm{Cos}\,nx}{x^m}dx - n_1\int\frac{\mathrm{Cos}(n-2)x}{x^m}dx + \ldots$$

$$\pm n_{\frac{n}{2}-1}\int\frac{\mathrm{Cos}\,2x}{x^m}dx \pm \frac{\frac{1}{2}n_{\frac{n}{2}}}{(m-1)x_{m-1}}\Big\}.$$

Beneficio formulae

$$\ldots\frac{\mathrm{Cos}\,y}{y^m}dy = \frac{1}{\Gamma(m)}\Big\{-\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{\Gamma(m-\nu)}{y^{m-\nu}}\mathrm{Cos}(y+\frac{\nu-1}{2}\pi)$$

$$+\int\frac{dy}{y}\mathrm{Cos}(y+\frac{m-1}{2}\pi)\Big\}\text{*)}$$

...nimus ut nuper

$$\ldots\frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m}dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}\Gamma(m)}\Big[-n_0\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{n^{\nu-1}\Gamma(m-\nu)}{x^{m-\nu}}\mathrm{Cos}(nx+\frac{\nu-1}{2}\pi)$$

$$+n_0 n^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Cos}(nx+\frac{m-1}{2}\pi)$$

$$\ldots\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{(n-2)^{\nu-1}\Gamma(m-\nu)}{x^{m-\nu}}\mathrm{Cos}(\overline{n-2}\,x+\frac{\nu-1}{2}\pi)$$

$$-n_1(n-2)^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Cos}(\overline{n-2}.x+\frac{m-1}{2}\pi)$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\ldots_{\frac{n}{2}-1}\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=m-1}\frac{2^{\nu-1}\Gamma(m-\nu)}{x^{m-\nu}}\mathrm{Cos}(2x+\frac{\nu-1}{2}\pi)$$

$$\pm n_{\frac{n}{2}-1}\,2^{m-1}\int\frac{dx}{x}\mathrm{Cos}(2x+\frac{m-1}{2}\pi)\Big]$$

$$\ldots\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}n_{\frac{n}{2}}}{\ldots(m-1)x^{m-1}}.$$

Quum in genere sit

$$\mathrm{Cos}(z+\frac{m-1}{2}\pi) = \mathrm{Cos}\,z\,\mathrm{Cos}\,\frac{m-1}{2}\pi - \mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Sin}\,\frac{m-1}{2}\pi,$$

*) Vide Minding l. c.

$$\text{Cos}\left(z+\frac{m-1}{2}\pi\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\text{Cos}\,z,$$

si est m=num. imp.;

$$\text{Cos}\left(z+\frac{m-1}{2}\pi\right)=(-1)^{\frac{m}{2}}\text{Sin}\,z,$$

si est m=num. par.;

et
$$\int_0^x \frac{\text{Cos}\,bx}{x}dx,$$

necesse est, sit m=num. pari.

Adhibendo theoremate

$$\text{Cos}(a+b)=\text{Cos}\,a\,\text{Cos}\,b-\text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,b$$

unaequaeque ex summis finitis in duas disjungitur. Tum terminus generalis ejus summae, cujus numerus ordinalis est p, hanc sibi induit formam:

$$\pm\frac{n_p(n-2p)^{\nu-1}\Gamma(m-\nu)}{x^{m-\nu}}\left(\text{Cos}(n-2p)x\,\text{Cos}\frac{\nu-1}{2}\pi-\text{Sin}(n-2p)\,x\,\text{Sin}\frac{\nu-1}{2}\pi\right).$$

Quum vero est ν=num. imp., est

$$\text{Cos}\frac{\nu-1}{2}\pi=(-1)^{\frac{\nu-1}{2}},\quad \text{Sin}\frac{\nu-1}{2}\pi=0;$$

et si est ν=num. par., est

$$\text{Cos}\frac{\nu-1}{2}\pi=0,\quad \text{Sin}\frac{\nu-1}{2}\pi=(-1)^{\frac{\nu}{2}},$$

quamobrem Cosinus multiplicis ipsius x in terminis inest, non nisi est ν=num. imp., Sinus vero, si est ν=num par.. Praeterea valores ipsius ν extremi sunt $m-1$ et 3, si est ν=num. imp., et $m-2$ et 2, si est ν=num. par., quamobrem, posito $2\nu+1$ pro ν, si impar est, et 2ν pro ν, si par est, prodit

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}\Gamma(m)}\Big[-n_0\underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-2}{2}}{S}}\frac{(-1)^{v-1}n^{2v-2}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}}\mathrm{Cos}\,nx$$

$$+n_0\underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-2}{2}}{S}}\frac{(-1)^{v-1}n^{2v-1}\Gamma(m-2v)}{x^{m-2v}}\mathrm{Sin}\,nx$$

$$-n_1\underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-2}{2}}{S}}\frac{(-1)^{v-1}(n-2)^{2v-2}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}}\mathrm{Cos}(n-2)x$$

$$-n_1\underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-2}{2}}{S}}\frac{(-1)^{v-1}(n-2)^{2v-1}\Gamma(m-2v)}{x^{m-2v}}\mathrm{Sin}(n-2)x$$

. . . .

$$\mp n_{\frac{n}{2}-1}\underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-2}{2}}{S}}\frac{(-1)^{v-1}2^{2v-2}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}}\mathrm{Cos}2x$$

$$\pm n_{\frac{n}{2}-1}\underset{v=1}{\overset{v=\frac{m-2}{2}}{S}}\frac{(-1)^{v-1}2^{2v-1}\Gamma(m-2v)}{x^{m-2v}}\mathrm{Sin}2x\Big].$$

Posito $v=1$ in omnibus summis, ubi Cosinus inest, summa horum terminorum, aucta termino $\pm\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}n_{\frac{n}{2}}}{2^n(m-1)x^{m-1}}$ evadit

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}(m-1)x^{m-1}}\{-n_0\mathrm{Cos}nx+n_1\mathrm{Cos}(n-2)x-\ldots$$

$$\ldots\mp n_{\frac{n}{2}-1}\mathrm{Cos}2x\pm\tfrac{1}{2}n_{\frac{n}{2}}\}=-\frac{\mathrm{Sin}^n x}{(m-1)x^{m-1}},$$

quod nihilo aequale est pro $x=0$, si est $n\geqq m$. Summa ceterorum terminorum, in quibus v eundem habet valorem, est aequalis

$$\pm\frac{(-1)^{v-1}\Gamma(m-2v+1)}{x^{m-2v+1}\Gamma(m)}\cdot\frac{d^{2v-2}(\mathrm{Sin}^n x)}{(dx)^{2v-2}}.$$

Cum vero necesse sit, $\frac{d^{2v-2}(\mathrm{Sin}^n x)}{(dx)^{2v-2}}$ habet ut factores dignitates ipsius $\mathrm{Sin}x$, quarum exponentes sunt

$$>m-2v+1\;(n\geqq m),$$

sequitur, ut sint hae omnes summae $=0$ pro $x=0$. Summae qu
que, in quibus inest Sinus multiplicis cujusdam ipsius x, p
$x=0$ in nihilum abeunt, quod eodem modo ac supra demonstrati

Pro $x=\infty$ cunctae summae sunt $=0$. Denique ad tenore
formularum

$$\mathrm{Cos}(\overline{n-2p}.x+\frac{m-1}{2}\pi)=(-1)^{\frac{m}{2}}\mathrm{Sin}(n-2p)x \ (m=\text{num. par.}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}(n-2p)x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

habebimus

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m}dx=\frac{(-1)^{\frac{n+m}{2}}\pi}{2^{n-1}\Gamma(m)\,2}\overset{p=\frac{n}{2}-1}{\underset{p=0}{S}}(-1)^p n_p(n-2p)^{m-1} \quad \ldots\ldots (\delta).$$

Integrale igitur definitum $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}^n x}{x^m}dx$ semper finitum es
si $n-m=$ num. pari positivo vel 0, et exhibetur

per formulam (β), si n et m sunt numeri impares,

per formulam (δ), si n et m sunt numeri pares.

XXI.

Ueber das Auffinden von Dreiecken, deren Seiten sich gleichzeitig mit den Halbirungslinien durch ganze Zahlen ausdrücken lassen.

Von

Herrn Dr. E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

In der Bachet'schen Ausgabe des Diophant (Tolosae 1670) ndet man Seite 316. die Aufgabe behandelt: Triangulum scaleum, oxygonium vel amblygonium, constituere in rationalibus, ut angulo acuto vel obtuso ducta linea dividens basim bifariam t rationalis. Eine Bearbeitung der ungleich schwereren Aufgabe er, Dreiecke anzugeben, deren Seiten unter sich und zu allen rei Halbirungslinien ein rationales Verhältniss haben, ist mir geachtet des gewiss interessanten Gegenstandes bis jetzt noch ıcht bekannt geworden. Es bedarf keiner besonderen Erinnerung, ass sich die genannten Stücke dann auch in ganzen Zahlen würen ausdrücken lassen. Das Nachfolgende mag als Beitrag zur uflösung dieser Aufgabe dienen.

Bezeichnen wir die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c, die ach denselben gezogenen Halbirungslinien mit t_a, t_b, t_c, gewisse ıbestimmte rationale Zahlenwerthe aber mit m, p, q; so ist

$$[1] \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} 4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\ 4t_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2, \\ 4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2; \end{array} \right.$$

daher

$$[2] \ldots\ldots \begin{cases} 4t_a^2-b^2-2bc-c^2=b^2-2bc+c^2-a^2, \\ 4t_b^2-c^2-2ca-a^2=c^2-2ca+a^2-b^2, \\ 4t_c^2-a^2-2ab-b^2=a^2-2ab+b^2-c^2; \end{cases}$$

oder

$$[3] \ldots\ldots \begin{cases} (b+c+2t_a)(b+c-2t_a)=(a+b-c)(a-b+c), \\ (c+a+2t_b)(c+a-2t_b)=(b+c-a)(b-c+a), \\ (a+b+2t_c)(a+b-2t_c)=(c+a-b)(c-a+b); \end{cases}$$

wesshalb man setzen kann

$$[4] \ldots\ldots \begin{cases} b+c+2t_a=m(a+b-c), \\ b+c-2t_a=\frac{1}{m}(a-b+c), \\ c+a+2t_b=p(b+c-a), \\ c+a-2t_b=\frac{1}{p}(b-c+a), \\ a+b+2t_c=q(c+a-b), \\ a+b-2t_c=\frac{1}{q}(c-a+b); \end{cases}$$

woraus dann weiter folgt

$$[5] \ldots\ldots \begin{cases} 2b+2c=m(a+b-c)+\frac{1}{m}(a-b+c), \\ 2c+2a=p(b+c-a)+\frac{1}{p}(b-c+a), \\ 2a+2b=q(c+a-b)+\frac{1}{q}(c-a+b); \end{cases}$$

$$[6] \ldots\ldots \begin{cases} (m+\frac{1}{m})a+(m-\frac{1}{m}-2)b+(-m+\frac{1}{m}-2)c=0, \\ (-p+\frac{1}{p}-2)a+(p+\frac{1}{p})b+(p-\frac{1}{p}-2)c=0. \\ (q-\frac{1}{q}-2)a+(-q+\frac{1}{q}-2)b+(q+\frac{1}{q})c=0. \end{cases}$$

Beachtet man die Natur unserer Aufgabe einerseits und die
estalt der letzten Gleichungen andererseits; so überzeugt man
ch bald, dass nur zwei dieser Gleichungen zur Bestimmung des
:genseitigen Verhältnisses der Dreiecksseiten benutzt werden
irfen, und dass mithin die dritte Gleichung nur als Bedingungs-
eichung zwischen m, p und q in Betracht kommen kann. In
:r That findet man, wenn man die beiden ersten Gleichungen
[6] nach a und b auflöst:

] ......
$$\begin{cases} a = \dfrac{(m-\frac{1}{m}+2)(p+\frac{1}{p})+(m-\frac{1}{m}-2)(p-\frac{1}{p}-2)}{(m+\frac{1}{m})(p+\frac{1}{p})+(m-\frac{1}{m}-2)(p-\frac{1}{p}+2)}.c, \\[2ex] b = \dfrac{(m+\frac{1}{m})(-p+\frac{1}{p}+2)+(m-\frac{1}{m}+2)(p-\frac{1}{p}+2)}{(m+\frac{1}{m})(p+\frac{1}{p})+(m-\frac{1}{m}-2)(p-\frac{1}{p}+2)}.c \end{cases}$$

ıd, wenn man diese Werthe in die dritte der Gleichungen [6]
ıbstituirt und alles reducirt, die Bedingungsgleichung

] ....
$$mpq+\frac{1}{mpq}+2\left(\frac{m}{q}+\frac{p}{m}+\frac{q}{p}\right)-(m+p+q)$$
$$-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-(mp+mq+pq)-\left(\frac{1}{mp}+\frac{1}{mq}+\frac{1}{pq}\right)-4=0.$$

Durch das Aufstellen dieser Bedingungsgleichung ist unsere
ufgabe aber nicht leichter geworden. Man sieht, dass von den
ei rational sein sollenden Zahlenwerthen m, p und q nicht ein-
al zwei ganz willkührlich angenommen werden dürfen, indem
lemal der dritte von den beiden andern durch eine quadratische
leichung abhängt. Ist die Gleichung [8] in rationalen Zahlen
ısbar, so kann auch unsere Dreiecksaufgabe durch Anwendung
er Formeln [7] und [4] gelöst werden. Umgekehrt würden, wenn
ine Lösung der Dreiecksaufgabe auf anderem Wege gelänge,
adurch zusammengehörige Werthe, die der Gleichung [8] ge-
ügten, gefunden werden können. Ein solcher anderer Weg soll
:tzt von uns betreten werden, indem wir uns von einem Ver-
ıche, die Gleichung [8] geradezu aufzulösen wenig Erfolg ver-
›rechen.

Nehmen wir den gemeinschaftlichen Nenner der Formeln in
] als Werth für c an, wodurch a und b auf den jedesmaligen
ähler beschränkt wird, multipliciren wir dann sämmtliche drei
usdrücke, um alle Brüche zu beseitigen, mit mp, reduciren und
ividiren durch die sich als gemeinschaftlichen Factor zeigende
ahl 2; so können wir setzen:

$$[9] \ldots\ldots \begin{cases} a = m^2(p^2-p) + m(2p+2) + (-p^2+p) \\ \quad = p^2(m^2-1) + p(-m^2+2m+1) + (2m), \\ b = m^2(2p) + m(p^2+2p-1) + (-p^2+1) \\ \quad = p^2(m-1) + p(2m^2+2m) + (-m+1), \\ c = m^2(p^2+p) + m(-p^2-2p+1) + (-p+1) \\ \quad = p^2(m^2-m) + p(m^2-2m-1) + (m+1). \end{cases}$$

Leiten wir hieraus durch die vier ersten Gleichungen in [4] Ausdrücke für $2t_a$ und $2t_b$ ab; so finden wir:

$$[10] \ldots\ldots \begin{cases} 2t_a = m^2(p^2+3p) + m(-2p^2+2p) + (p^2+p-2) \\ \quad = p^2(m^2-2m+1) + p(3m^2+2m+1) + (-2), \\ 2t_b = m^2(2p^2) + m(-p^2-2p-3) + (-p^2+2p-1) \\ \quad = p^2(2m^2-m-1) + p(-2m+2) + (-3m-1). \end{cases}$$

Wenn man nun ferner nach der dritten Gleichung in [1] einen Ausdruck für $4t_c^2$ berechnet; so bekommt dieser nach gehöriger Reduction, wenn man ihn ohne Parenthesen schreibt, im Ganzen zweiundzwanzig Glieder. Bei dem Versuche, die Quadratwurzel aus demselben auszuziehen, hat man Veranlassung zu beobachten, dass die Wurzelausziehung aufgehen würde, wenn vier Glieder geändert werden dürften. Es ist nämlich

$$4t_c^2 + 36m^3p^3 - 36m^3p - 36mp^3 + 36mp$$

ein vollständiges Quadrat, das wir mit τ^2 bezeichnen wollen. Die Wurzel dieses Quadrats ist merkwürdiger Weise dem Unterschiede zwischen $2t_a$ und $2t_b$ gleich; oder

$$[11] \ldots\ldots \begin{cases} \tau = m^2(-p^2+3p) + m(-p^2+4p+3) + (2p^2-p-1) \\ \quad = p^2(-m^2-m-2) + p(3m^2+4m-1) + (3m-1). \end{cases}$$

Weil aber nach dem eben Bemerkten

$$[12] \ldots\ldots \quad 4t_c^2 - \tau^2 = 36mp(m^2-1)(p^2-1);$$

so kann man unter Einführung einer neuen unbestimmten rationalen Zahl r setzen:

$$[13] \ldots\ldots \begin{cases} 2t_c + \tau = 6p(m^2-1)r, \\ 2t_c - \tau = \dfrac{6m(p^2-1)}{r}; \end{cases}$$

aus sich ergibt:

$$[14] \ldots\ldots 2t_c = 3p(m^2-1)r + \frac{3m(p^2-1)}{r};$$

$$\ldots\ldots \begin{cases} \tau = 3p(m^2-1)r - \frac{3m(p^2-1)}{r} \\ = p^2\left(-\frac{3m}{r}\right) + p(3m^2r-3r) + \left(\frac{3m}{r}\right). \end{cases}$$

en wir aber der Zahl r den willkührlichen Werth

$$[16] \ldots\ldots r = \frac{3m}{3m-1}$$

was durch unsere Aufgabe an sich nicht gefordert wird, und nur desshalb geschieht, damit wir bei der Verbindung der ten Formeln in [11] und [15] zu einer Gleichung des ersten les für p gelangen; so erhalten wir:

$$[17] \ldots\ldots p = \frac{9m^2+2m+1}{(3m-1)(m^2-2m-1)}.$$

Wird dieser Werth von p in die Formeln [9] substituirt; so lt man nach Wegschaffung der Nenner, der gehörigen Re- ion und nach geschehenem Aufheben mit den sich ergeben- gemeinschaftlichen Factoren, unter welchen sich auch der it zu übersehende Factor $m+1$ befindet, Ausdrücke für die Seiten, welche ganze rationale Functionen des fünften Gra- von m sind. Schreibt man dann ferner $-m$ statt m und ert in den Ausdrücken für b und c alle Vorzeichen, was offen- geschehen kann, da die Werthe der Halbirungslinien nur von Quadraten der Seiten abhängen; so bekommt man für die ecksseiten und die zugehörigen Halbirungslinien folgende neln:

$$\ldots\ldots \begin{cases} a = 9m^5+117m^4+62m^3-54m^2+25m+1, \\ b = 45m^5+54m^4-104m^3-42m^2-21m+4, \\ c = 36m^5+99m^4+122m^3-24m^2-14m+5, \\ 2t_a = 81m^5+135m^4-54m^3+98m^2+37m-9, \\ 2t_b = 27m^5+252m^4+180m^3-70m^2+m-6, \\ 2t_c = 54m^5+63m^4-54m^3-172m^2+16m-3. \end{cases}$$

Da diese Formeln, wie man sich durch Substitution überzeu- kann, den Gleichungen [1] genügen, so lösen dieselben unsere ecksaufgabe auf; ob jedoch in diesen Formeln alle Auflösun-

gen der fraglichen Aufgabe enthalten seien, bleibt ungewiss; da, wie schon gesagt, die Relation [16], auf welche die Formeln basirt sind, willkührlich war, und vielleicht noch andere von ihr verschiedene Relationen zwischen r und m aufgestellt werden können. Dass, wenn man in [18] für m irgend einen positiven oder negativen rationalen Werth substituirt, und dadurch eins oder mehrere der sechs Resultate negativ werden, ohne Weiteres dafür das positive Resultat genommen werden dürfe, ist bereits angedeutet worden. Nur dann sind Resultate, welche arithmetisch ohne Fehler sind, für die Geometrie unbrauchbar, wenn die Summe zweier Dreiecksseiten kleiner ist als die dritte; z. B.

$$a=480, \quad b=337, \quad c=103, \quad 2t_a=134, \quad 2t_b=607, \quad 2t_c=823.$$

Weil ferner bekanntlich, wenn man aus den drei Halbirungslinien eines Dreiecks wieder ein Dreieck beschreibt und in dem letzteren die Halbirungslinien zieht, diese zu den Seiten des ursprünglichen Dreiecks in einem einfachen rationalen Verhältnisse stehen; so kann man auch die Formeln für die doppelten Halbirungslinien zur Berechnung der Seiten verwenden, während die Formeln für die Seiten mit 3 multiplicirt die doppelten Halbirungslinien ausdrücken. Endlich sind die Formeln [18] noch der mannichfachsten Umgestaltung fähig, welche dadurch bewirkt wird, dass man statt m beliebige rationale Buchstabenausdrücke substituirt. Man kann durch solche aus der Lehre von den höheren Gleichungen hinlänglich bekannte Operationen, um nur eins anzuführen, bewirken, dass sämmtliche Glieder der sechs Formeln positiv werden. Bei der Berechnung des jetzt folgenden Verzeichnisses einiger zusammengehörigen Werthe für die Seiten und doppelten Halbirungslinien sind solche Umgestaltungen vorzugsweise benutzt worden.

a	b	c	t_a	t_b	t_c
68	85	87	158	131	127
314	325	159	404	377	619
386	327	409	632	725	587
807	491	466	515	1223	1252
1306	877	1917	2680	3161	1129
1401	1973	1778	3485	2521	2924
1664	509	1323	1118	2963	2075
2491	1266	3593	4777	6052	1645
1999	3396	3253	6343	4198	4525
3368	5007	5905	10418	8207	6161
6001	11798	8553	19715	8896	16651
8307	9512	13331	21619	20074	11885
9365	8619	5576	11093	12779	17114
17417	11637	10750	14093	26503	27604

a	b	c	$2t_a$	$2t_b$	$2t_c$
15805	26184	19651	43517	24214	38531
16635	22067	27938	47521	40343	27328
38585	34186	21759	42373	52496	69581
58725	35138	36967	41879	91628	89443
74357	27717	53270	41023	126353	98776
69859	75534	65935	123391	112916	129707
51446	83877	93877	170440	126031	102719
82601	145458	156391	290533	203480	177493
130611	82025	82666	100321	202627	201844
201675	160537	200092	301571	368303	304718
101210	246693	231457	467564	258407	297707
265631	190968	161263	233215	395806	433649
304667	158796	226721	245795	513062	429737
187750	373777	379413	729436	467653	453833
251799	578066	410183	970267	359368	791755
269512	564073	560535	1091842	674903	683689

Zufolge des ersten dieser Beispiele würde die Gleichung [8] ·ch $m=5$, $p=2\frac{3}{4}$, $q=4$, zufolge des zweiten durch $m=1\frac{17}{20}$, $=5$, $q=8\frac{1}{2}$ aufgelöst werden.

Ich würde diesen Aufsatz hier schliessen, wenn nicht ein rkwürdiger Umstand noch eine besondere Erwähnung verdiente. r Gang der Untersuchung hätte nämlich, nachdem die Gleiıngen [1] aufgestellt waren, zwar ein ganz ähnlicher, wie der ›n eingeschlagene, aber doch wegen der gleich von vorn herein änderten Bedeutung von m, p und q wesentlich andere Forln liefernder sein können. Die wichtigsten dieser Formeln folı hier.

$$
[A] \;\ldots\ldots\; \begin{cases}
(t_a+\frac{1}{2}a)^2-b^2=c^2-(t_a-\frac{1}{2}a)^2, \\
(t_b+\frac{1}{2}b)^2-c^2=a^2-(t_b-\frac{1}{2}b)^2, \\
(t_c+\frac{1}{2}c)^2-a^2=b^2-(t_c-\frac{1}{2}c)^2.
\end{cases}
$$

$$
[B] \;\ldots\ldots\; \begin{cases}
t_a+\frac{1}{2}a+b=m(c+t_a-\frac{1}{2}a), \\
t_a+\frac{1}{2}a-b=\frac{1}{m}(c-t_a+\frac{1}{2}a), \\
t_b+\frac{1}{2}b+c=p(a+t_b-\frac{1}{2}b), \\
t_b+\frac{1}{2}b-c=\frac{1}{p}(a-t_b+\frac{1}{2}b), \\
t_c+\frac{1}{2}c+a=q(b+t_c-\frac{1}{2}c), \\
t_c+\frac{1}{2}c-a=\frac{1}{q}(b-t_c+\frac{1}{2}c).
\end{cases}
$$

der zweiten, vierten und sechsten Formel in [B] ergibt sich:

$$
\ldots\ldots\; \begin{cases}
c-t_a+\frac{1}{2}a=m(t_a+\frac{1}{2}a-b), \\
a-t_b+\frac{1}{2}b=p(t_b+\frac{1}{2}b-c), \\
b-t_c+\frac{1}{2}c=q(t_c+\frac{1}{2}c-a).
\end{cases}
$$

Dann erhält man weiter:

$$[D] \ldots\ldots \begin{cases} a+b+c=m(c-b+2t_a), \\ b-c+2t_a=m(c-a+b), \\ a+b+c=p(a-c+2t_b), \\ c-a+2t_b=p(a-b+c), \\ a+b+c=q(b-a+2t_c), \\ a-b+2t_c=q(b-c+a). \end{cases}$$

$$[E] \ldots\ldots \begin{cases} c-b+2t_a=\frac{1}{m}(a+b+c), \\ a-c+2t_b=\frac{1}{p}(a+b+c), \\ b-a+2t_c=\frac{1}{q}(a+b+c). \end{cases}$$

$$[F] \ldots\ldots 2t_a+2t_b+2t_c=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(a+b+c),$$

$$[G] \ldots\ldots 2t_a+2t_b+2t_c=(m+p+q)(a+b+c)-2ma-2pb-2qc.$$

$$[H] \ldots\ldots \begin{cases} 2b-2c=m(c-a+b)-\frac{1}{m}(a+b+c), \\ 2c-2a=p(a-b+c)-\frac{1}{p}(a+b+c), \\ 2a-2b=q(b-c+a)-\frac{1}{q}(a+b+c). \end{cases}$$

$$[I] \ldots\ldots \begin{cases} (m+\frac{1}{m})a+(-m+\frac{1}{m}+2)b+(-m+\frac{1}{m}-2)c=0, \\ (-p+\frac{1}{p}-2)a+(p+\frac{1}{p})b+(-p+\frac{1}{p}+2)c=0, \\ (-q+\frac{1}{q}+2)a+(-q+\frac{1}{q}-2)b+(q+\frac{1}{q})c=0. \end{cases}$$

$$[K] \ldots\ldots mpq-\left(\frac{mp}{q}+\frac{pq}{m}+\frac{mq}{p}\right)-\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{q}+\frac{q}{m}\right)$$
$$+\left(\frac{m}{q}+\frac{p}{m}+\frac{q}{p}\right)+(m+p+q)-3\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=0.$$

$$\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} a &= m^2(p^2-p) + m(2p+2) + (-p^2+p) \\ &= p^2(m^2-1) + p(-m^2+2m+1) + (2m), \\ b &= m^2(p^2-1) + m(p^2+2p-1) + (-2p) \\ &= p^2(m^2+m) + p(2m-2) + (-m^2-m), \\ c &= m^2(-p+1) + m(p^2+2p-1) + (p^2+p) \\ &= p^2(m+1) + p(-m^2+2m+1) + (m^2-m). \end{aligned} \right.$$

$$\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} 2t_a &= m^2(p^2+p-2) + m(2p^2-2p) + (p^2+3p) \\ &= p^2(m^2+2m+1) + p(m^2-2m+3) + (-2m^2), \\ 2t_b &= m^2(-p^2+2p-1) + m(p^2+2p+3) + (2p^2) \\ &= p^2(-m^2+m+2) + p(2m^2+2m) + (-m^2+3m). \end{aligned} \right.$$

d auch hier

$$2t_a - 2t_b = \tau$$

·tzt, so ist

$$\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \tau &= m^2(2p^2-p-1) + m(p^2-4p-3) + (-p^2+3p) \\ &= p^2(2m^2+m-1) + p(-m^2-4m+3) + (-m^2-3m). \end{aligned} \right.$$

r ungeachtet der bis dahin verschiedenen Formeln ist auch wieder, ganz wie oben in [12],

$$4t_c^2 - \tau^2 = 36mp(m^2-1)(p^2-1).$$

diese merkwürdige Uebereinstimmung besonders hinzuweisen nte ich nicht unterlassen. Bei einem Dreiecke, dessen Seiten wie 68, 85 und 87 verhalten, ist, wie bereits bemerkt, $m=5$, $2\frac{3}{4}$, wenn man nämlich diese Zahlen aus den Formeln [4] be- ımt, ferner ist nach [9], [10] und [1]

$$a = 153, \quad b = 191\frac{1}{4}, \quad c = 195\frac{3}{4};$$

$$2t_a = 355\frac{1}{2}, \qquad 2t_b = 294\frac{3}{4}, \quad 2t_c = 285\frac{3}{4};$$

die Gleichung [12] wird befriedigt, indem jede ihrer Seiten $7962\frac{1}{2}$ ist. Bestimmt man aber bei einem Dreiecke derselben ıtalt m und p durch die Gleichungen [B] und wendet nachher , [M] und [1] an; so erhält man

$$m=1\frac{1}{2},\ p=2\frac{1}{7},\quad a=12\frac{24}{49},\quad b=15\frac{30}{49},\quad c=15\frac{48}{49};$$

$$2t_a=29\frac{1}{49},\ 2t_b=24\frac{3}{49},\ 2t_c=23\frac{16}{49};$$

und in [12] ist jede Seite der Zahl $519\frac{183}{343}$ gleich.

Aus der Gleichung [12] waren oben die Gleichungen [13], [14] und [15] abgeleitet worden. Setzt man hier

$$[O] \ldots\ldots r=\frac{3}{m+3},$$

so kann man die zweiten Gleichungen in [15] und [N] so verbinden, dass sich

$$[P] \ldots\ldots p=\frac{m^3-2m^2+9m}{(m+3)(m^2-2m-1)}$$

ergibt. Wird aber dieses p in die Formeln [L], [M] und [14] gesetzt, und dann wie oben verfahren; so gelangt man doch nur zu solchen Functionen des fünften Grades von m, welche sich auch aus den Formeln [18] durch die oben angedeuteten Umwandlungen hätten ableiten lassen und daher nicht als neue Resultate zu betrachten sind.

XXII.

Ueber einen Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte.

Von
Herrn Professor A. F. Möbius
zu Leipzig.

(Von dem Herrn Verf aus den „Berichten über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 1850. Nr. I.“ zum Abdruck in dem Archive dem Herausgeber mitgetheilt.)

Abgesehen von den als ungenügend anerkannten Beweisen dieses Satzes, welche man auf die Zusammensetzung der Bewegungen zu gründen bemüht gewesen ist, lassen sich die übrigen Beweise in zwei Klassen theilen. Bringt man nämlich den Satz unter die Form der Aufgabe: zu zwei auf einen frei beweglichen Punkt wirkenden Kräften eine dritte zu finden, welche, an demselben Punkte — wir wollen ihn D nennen — angebracht, dieselbe Wirkung, wie erstere zwei in Vereinigung, erzeugt, so umfasst die eine Classe von Beweisen für die bekannte Lösung dieser Aufgabe alle diejenigen, bei denen alle noch in Betracht gezogenen Hülfskräfte denselben Punkt D zum Angriffspunkte haben. Bei der andern Classe von Beweisen lässt man Hülfskräfte auch noch auf andere mit dem Punkte D und unter sich in unabänderlichen Entfernungen sich befindende Punkte wirken.

Wenn nun auch die Zuhülfenahme noch anderer Angriffspunkte von Kräften der Schärfe des Beweises keinen Eintrag thun kann, da das hierbei in Betracht kommende Princip von der Verlegung der Kräfte eben so evident, wie jeder der übrigen Grundsätze der Statik, ist und auch im weitern Fortgange dieser Wissenschaft nicht entbehrt werden kann: so pflegt man doch Beweise der erstern Klasse denen der letztern vorzuziehen, indem

jene von D verschiedenen Angriffspunkte von der Natur der Sache nicht geboten erscheinen. Von der andern Seite ist nicht zu verkennen, dass die Beweise der zweiten Classe durchschnittlich eine ungleich elementarere Haltung haben, als die Beweise der erstern, bei denen man nicht selten ziemlich tief gehende Betrachtungen aus der höhern Analysis in Anwendung bringt. Man denke nur an die von französischen Mathematikern, namentlich von d'Alembert, Laplace, Poisson und Pontécoulant*) gegebenen an sich trefflichen Beweise des Satzes. Ich muss aber offen bekennen, dass für einen so elementaren Gegenstand, als um welchen es sich hier handelt, aus der höhern Analysis entlehnte Kunstgriffe mir noch weit fremdartiger und damit unstatthafter, als jene zu Hülfe genommenen Angriffspunkte, zu sein scheinen.

Unter so bewandten Umständen hielt ich es für nicht ganz überflüssig, einen von mir gefundenen Beweis für das Parallelogramm der Kräfte zu veröffentlichen, der weder fremdartige Hülfspunkte, noch der Elementarmathematik fremdartige Methoden in Anspruch nimmt, sondern unmittelbar auf die Natur des Parallelogramms gegründet ist und sich von den meisten übrigen Beweisen des Satzes auch noch dadurch unterscheidet, dass sich bei ihm die Grösse und die Richtung der Diagonalkraft nicht hinter einander, sondern gleichzeitig ergeben. Ich habe diesen Beweis bereits in meinem vor 13 Jahren herausgegebenen Lehrbuche der Statik (1. Theil, S. 132 u. flg.) mitgetheilt. Indessen lässt er sich, wie ich später bemerkt habe, um ein Beträchtliches einfacher und übersichtlicher gestalten, als es dort geschehen. Möge ihm daher hiesigen Orts eine nochmalige Veröffentlichung, und zwar in der einfachsten Form, deren er fähig sein dürfte, gestattet sein.

Vorläufig erinnere ich nur noch, dass man sich alle im Folgenden in Betracht kommenden Linien und Punkte in einer und derselben Ebene enthalten zu denken hat.

---

1) Seien DB und AC (Taf. II. Fig. 6.) zwei gleichgerichtete und gleich lange gerade Linien, und A', B', C' die rechtwinkligen Projectionen der Punkte A, B, C auf eine durch D beliebig gezogene Gerade, die wir in der Kürze x nennen wollen. Alsdann haben auch die Abschnitte DB' und $A'C'$ dieser Geraden x, als die rechtwinkligen Projectionen von DB und AC auf x, einerlei (nicht entgegengesetzte) Richtung und gleiche Länge, und es ist folglich

$$DC' = DA' + A'C' = DA' + DB', \text{ d. h.:}$$

Werden zwei von derselben Ecke D ausgehende Seiten DA, DB und die von derselben Ecke ausgehende Diagonale DC eines

*) In dessen Théorie analytique du système du monde, Tome I. S. 4. u. folg.

Parallelogramms auf eine beliebig durch D gelegte Gerade rechtwinklig projicirt, so ist immer die Summe der Projectionen der beiden Seiten der Projection der Diagonale gleich.

Diese Relation gilt übrigens stets, was auch die durch D gezogene Gerade x gegen das Parallelogramm für eine Lage haben mag, dafern nur je zwei Abschnitte von x mit einerlei oder verschiedenen Zeichen genommen werden, jenachdem ihre durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben ausgedrückten Richtungen einerlei oder einander entgegengesetzt sind. Denn alsdann ist immer auch dem Zeichen nach:

$$DB' = A'C', \quad \text{und} \quad DC' = DA' + A'C',$$

mag A' zwischen D und C' liegen, wie in der Figur, oder nicht.

2) Nehmen wir noch an, dass jeder der beiden Winkel, welche die Diagonale mit den beiden Seiten macht, zu einem rechten Winkel in einem rationalen Verhältnisse stehe, und setzen wir hiernach die zwei Verhältnisse

$$ADC : 180^0 = a : m,$$

$$CDB : 180^0 = b : m,$$

wo a, b und m ganze positive Zahlen bedeuten. Man ziehe durch D m gerade Linien, welche gleiche Winkel mit einander machen, so dass um D herum $2m$ Winkel, jeder $= \frac{180^0}{m}$, entstehen. Dabei falle DC in eine der m Linien. Alsdann werden auch DA und DB in dergleichen fallen, nämlich DA in die $a$te auf der einen und DB in die $b$te auf der andern Seite von DC liegende Linie. Man projicire endlich jeden der drei Abschnitte DA, DB, DC rechtwinklig auf jede der m Linien und betrachte alle diese Projectionen ihrer Richtung und Grösse nach als auf den Punkt D wirkende Kräfte, so dass in jeder der m Linien drei Kräfte wirken, z. B. in der obigen x, wenn anders x eine dieser Linien ist, die drei durch DA', DB', DC' vorgestellten Kräfte. Da nun nach voigem Satze

$$DA' + DB' = DC'$$

ist, so werden immer von den drei in einer und derselben der m Linien enthaltenen Kräften diejenigen zwei, welche durch die Projectionen von DA und DB ausgedrückt werden, gleiche Wirkung mit der durch die Projection von DC ausgedrückten Kraft haben. Es werden daher auch, — wenn wir das System aller der Kräfte, welche durch die Projectionen von DA auf die m Linien vorgestellt werden, und wozu DA selbst mit gehört, mit $S\,(DA)$ be-

zeichnen und Aehnliches unter $S\,(DB')$ und $S\,(DC')$ verstehen, — es werden dann auch die Systeme $S\,(DA')$ und $S\,(DB')$ in Vereinigung gleichwirkend mit dem Systeme $S\,(DC')$ sein; oder kürzer, wenn wir die gleichfalls in D anzubringenden Resultanten dieser drei Systeme beziehungsweise α, β, γ nennen: es wird γ die Resultante von α und β sein.

3) Wie bekannt, lässt sich aus den ersten Principien der Statik leicht darthun, dass, wenn von zwei oder auch mehrern auf einen Punkt wirkenden Kräften eine jede mit Beibehaltung ihrer Richtung ihre Grösse in gleichem Verhältnisse ändert, in demselben Verhältnisse auch die Resultante der Kräfte ihre Grösse ändert, während ihre Richtung unverändert bleibt.

Nun sind die drei Systeme $S\,(DA')$, $S\,(DB')$, $S\,(DC')$, als geometrische Figuren betrachtet, einander ähnlich, indem jedes derselben dadurch entsteht, dass man auf eine der m Linien, welche sich in D unter gleichen Winkeln schneiden, von D aus einen Abschnitt von gewisser Länge trägt und hierauf denselben auf die $m-1$ übrigen Linien rechtwinklig projicirt. Aus dem Systeme der Kräfte $S\,(DA')$ wird folglich das System $S\,(DB')$ hervorgehen, wenn man, die Richtungen der Kräfte des erstern Anfangs unverändert lassend, die Grösse einer jeden in dem Verhältnisse $DA:DB$ ändert und sodann das ganze System um D um einen Winkel, $=ADB$, nach links (in unserer Figur) dreht. Setzen wir daher noch, dass die Resultante α des Systems $S(DA')$ ihrer Grösse und Richtung nach gegeben ist, so werden wir damit nach dem angezogenen Satze die Grösse und die Richtung der Resultante β des Systems $S(DB')$ erhalten, wenn wir die Grösse von α in dem Verhältnisse $DA:DB$ sich ändern und die Richtung von α um D um einen Winkel, $=ADB$, nach links sich drehen lassen. Auf gleiche Art wird die Grösse von

$$\gamma = \frac{DC}{DA}.\alpha$$

sein, und die Richtung von γ wird dadurch gefunden werden, dass man den Winkel von γ mit α gleich dem Winkel von DC mit DA nach der Linken von α hin macht.

Ueberhaupt also werden sich die Grössen der Kräfte α, β, γ wie die Längen DA, DB, DC verhalten, und die gegenseitige Lage der Richtungen der drei erstern wird dieselbe wie die der drei letztern sein, so dass, wenn die Kräfte α, β, γ ihren Grössen und Richtungen nach durch die Linien DA_1, DB_1, DC_1, vorgestellt werden, die Figur $DA_1C_1B_1$ der Figur $DACB$ ähnlich und somit ebenfalls ein Parallelogramm ist, in welchem die Winkel der Diagonale DC_1 mit den Seiten zu einem Rechten in rationalen Verhältnissen stehen.

Nun war γ die Resultante von α und β, und wir schliessen daher: Soll zu zwei auf einen Punkt D wirkenden und ihrer Grösse und Richtung nach durch die Linien DA_1 und DB_1 vorgestellten Kräften die Resultante gefunden werden, so vollende man den Winkel A_1DB_1, zu einem Parallelogramm, und es wird die Diagonale DC_1 desselben die gesuchte Resultante ihrer Grösse und Richtung nach ausdrücken, — dafern die Verhältnisse der Winkel A_1DC_1 und C_1DB_1 zu einem rechten Winkel rational sind. — Dieselbe Construction muss aber auch bei irrationalen Winkelverhältnissen gelten, da durch genugsam grosse Annahme der Zahl m rationale Verhältnisse gefunden werden können, die den irrationalen so nahe, als man will, kommen. Der in diesem Falle durch die Deductio ad absurdum zu führende schärfere Beweis dürfte hier nicht am Orte sein.

Zusätze. *a*. Die Richtungen von α, β, γ bilden nicht bloss dieselben Winkel mit einander, wie die Richtungen von DA, DB, DC, sondern sind mit den letztern vollkommen identisch. Denn da die Projectionen von DA auf zwei der m Linien, welche, auf verschiedenen Seiten von DA liegend, mit DA gleiche Winkel machen, offenbar einander gleich sind, so hat die Resultante dieser zwei Projectionen DA selbst zur Richtung; und da das System $S(DA')$ aus DA und aus solchen Paaren von Projectionen zusammengesetzt ist, so ist die Richtung der Resultante α dieses Systems gleichfalls DA. Ebenso zeigt sich, dass DB und DC die Richtungen von β und γ sind.

b. Weil der Winkel $DA'A$ ein rechter ist, so ist A' ein Punkt des um DA, als Durchmesser, beschriebenen Kreises. Auf gleiche Art ist die Projection von $B(C)$ auf eine willkührlich durch D gelegte Gerade der Durchschnitt dieser Geraden mit einem Kreise, welcher DB (DC) zum Durchmesser hat. Beschreibt man daher um die Seiten DA, DB und die Diagonale DC eines Parallelogramms $DACB$, als um drei Durchmesser, Kreise, so ist immer, wenn eine durch D gelegte Gerade diese drei Kreise resp. noch in A', B', C' schneidet, DC' der Summe von DA' und DB' gleich. Und umgekehrt: Zieht man durch den einen Durchschnittspunkt D zweier sich schneidenden Kreise beliebig eine Gerade, welche die zwei Kreise noch in A' und B' treffe, und bestimmt man im dieser Geraden einen vierten Punkt C' so, dass

$$DC' = DA' + DB',$$

so ist der geometrische Ort von C' ein dritter durch D gehender Kreis von solcher Grösse und Lage, dass sein Durchmesser DC' die Diagonale eines Parallelogramms ist, welches die Durchmesser DA und DB der beiden erstern Kreise zu anliegenden Seiten hat.

Da hiernach von je drei von D ausgehenden und in derselben Geraden liegenden Sehnen der drei Kreise die Sehne des dritten stets aus den Sehnen der zwei erstern zusammengesetzt ist, so kann man den dritten Kreis zusammengesetzt aus den zwei erstern nennen. Und eben so, wie zwei, lassen sich auch drei und mehrere durch einen und denselben Punkt D gehende Kreise zu einem neuen zusammensetzen. Dabei ist der von D ausgehende Durchmesser des neuen Kreises, statisch ausgedrückt, die Resultante der von D ausgehenden Durchmesser der gegebenen Kreise.

Werde nur noch bemerkt, dass das von der Zusammensetzung von Kreisen Gesagte vollkommen auch auf die Zusammensetzung zweier oder mehrerer durch einen und denselben Punkt gehenden Kugelflächen Anwendung leidet. Vergl. mein Lehrbuch der Statik, I. Theil, S. 131.

Berichtigung.

In Taf. II. Fig. 6. ist an das Ende der Linie DC' noch der Buchstabe x zu setzen.

LXV.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

Scholien zu Christoph Rudolphs Coss von Dr. A. Drechsler, Lehrer der Mathematik und Physik am Vitzthumschen Geschlechtsgymnasium und Blochmann'schen Gymnasial-Erziehungshaus zu Dresden. Dresden. 1851. 8.

Dieses sehr lesenswerthe Schulprogramm giebt eine sehr deutliche Vorstellung von der Art und Weise, wie die alten Algebraisten die Wissenschaft behandelten. Folgende Ausgabe der Coss Christoph Rudolphs hat der Herr Vf. seiner beachtenswerthen Abhandlung zu Grunde gelegt:

„Die Coß Christoph Rudolphs. Mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsberg in Preußen gedruckt, durch Alexandrum Lutomyslensem im jar 1553."

Solche Gegenstände aus der Geschichte der Mathematik sollten öfters in Schulprogrammen behandelt werden.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Die Elemente der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung. Zum Gebrauch in technischen Lehranstalten bearbeitet von K. W. Knochenhauer, Director der Realschule in Meiningen. Jena. 1851. 8. 1 Thl. 10 Sgr.

Allerdings nur die ersten Elemente der auf dem Titel genannten Wissenschaften. Die Darstellung der Differentialrechnung bewegt sich lediglich in den allergewöhnlichsten Vorstellungsweisen von dem Unendlichkleinen, und erinnert im Ganzen sehr an Abraham Gotthelf Kästner's Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen von anno 1799. Wie schwer doch Neueres, wirklich Besseres und Gründlicheres Eingang findet! für manche Realschule mag indess das Buch ganz brauchbar sein.

Compendium der höheren Mathematik. Von Adam Ritter von Burg. Zweite, sehr vermehrte und verbesserte Auflage. Mit vier Kupfertafen. Wien 1851. 8. 4 Thlr.

Diese Anzeige von dem Erscheinen einer zweiten Auflage wird genügen, da das Werk aus seiner ersten Auflage hinreichend bekannt ist.

Arithmetik.

Die complexen Werthe der Fundamental-Functionen in geometrischer Darstellung vom Prorectot Dr. Grebel am Gymnasium zu Zeitz (Schulprogramm von Ostern 1851.). Zeitz. 1851. 4.

Dieses lesenswerthe Schulprogramm, welches leider hier keinen Auszug gestattet, enthält werthvolle Beiträge zu dem auf dem Titel genannten, in neuerer Zeit, auch im Archive, von mehreren trefflichen Mathematikern behandelten Gegenstande, der wie so vieles Andere bekanntlich Gauss seine Anregung verdankt. Je mehr dieser Gegenstand nach unserer Ueberzeugung noch weiterer Aufklärung bedarf, mit desto grösserem Danke sind neben den erwähnten Arbeiten auch die Bemühungen des Herrn Vfs. der vorliegenden Schrift anzuerkennen.

Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuerer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellariche Berechnung, von Dr. G. Eisenstein, Docenten an der Univ. zu Berlin. Berlin. 1851. 4. 22½ Sgr.

Der Titel bezeichnet den Inhalt hinreichend.

Geometrie.

Aphorismen und Beiträge zu der Anschauungslehre in den mathematischen Wissenschaften von Ruprecht, Rittmeister a. D. Hersfeld. 1850. 4.

In der That sehr seltsame Aphorismen!

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Gewerbsschulen von Fr. Aug. Klingenfeld, Prof. an der Gewerbsschule zu Nürnberg. Nürnberg. 1851. 8. 24 Sgr.

Ohne sich auf krumme Flächen einzulassen, enthält dieses Lehrbuch in deutlicher Darstellung die Elemente der descriptiven Geometrie. In einem Anhange sind die nothwendigen stereometrischen Elementarsätze zusammengestellt.

Solution du probleme de la quadrature du cercle par Michel Miladowski et Antonie Izbicki, son Collaborateur. 4.

Diese Schrift ist uns so eben zugesandt worden, und wir müssen sie daher hier dem Titel nach anzeigen, um von ihrer Existenz Kenntniss zu geben. In der Vorrede sagen die Herrn Verfasser: „L'opinion générale sur l'impossibilité de la résolution du problème de la quadrature du cercle peut donc être un argument péremptoire, nous le reconnaissons nous mémes, mais seulement dans le cas où nous continuerions à la chercher par des voies jusqu'a present employées; mais on ne peut point affirmer qu'a la suite de recherches faites par d'autres voies, la solution de ce problème soit impossible.

Nous allons en démontrer la possibilité par les développements suivants, que nous soumettons à l'appréciation des hommes éclairés."

Auf diese „appréciation" können wir aber im vorliegenden Falle uns an diesem Orte begreiflicherweise nicht einlassen, sondern müssen dieselbe ganz unsern lecteurs peut-être plus éclairés que nous mêmes überlassen.

Mémoire sur quelques lignes courbes tracées sur un ellipsoide et sur la surface du cone elliptique par M. le Dr. J. Dienger, Professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique de Carlsruhe. Rome. 1851. 8.

Dieses aus den Annales des Sciences Mathématiques et Physiques de Rome. Mars. 1851. besonders abgedruckte Mémoire enthält mehrere sehr schöne analytische Untersuchungen

über das dreiaxige Ellipsoid, namentlich über Curven auf demselben, unter denen sich die Curve befindet, von der Laplace in der Mécanique céleste. L. III. Ch. V. N. 38. p. 109. spricht. Ueber die Oberfläche des elliptischen Kegels sagt der Herr Vf. am Ende seiner sehr beachtenswerthen Abhandlung: „Nous voyons donc que l'aire du cone elliptique peut être calculée au moyen des fonctions elliptiques dans le cas ou la projection de la ligne qui joint le sommet du cone et le centre de l'ellipse sur le plan de cette courbe tombe dans la direction de l'un des axes principaux de l'ellipse.“ — Möge die Abhandlung die sehr verdiente Beachtung finden.

Mémoire sur les colonnes torses par M. le Chevalier Faà de Bruno. Paris. 1850. 4.

Wir glauben diese Abhandlung den Lesern des Archivs nicht in architektonischer, sondern in geometrischer Beziehung zur Beachtung empfehlen zu müssen. Der Herr Vf. betrachtet nämlich in derselben eine grössere Anzahl krummer Flächen, welche bis jetzt in die Geometrie noch nicht Eingang gefunden haben, aber bemerkenswerthe Eigenschaften zu haben scheinen, und bei dem Vortrage der allgemeinen Theorie der Flächen gewiss auch sehr zweckmässig als Beispiele benutzt werden können, da man Beispiele dieser Art nicht genug haben kann. Der Herr Vf. giebt diesen Flächen folgende Namen: Sinusoide droit. Sinusoide différentiel. Sinusoide oblique. Sinusoide spiral. Diese gehören zu den Colonnes torses a noyau cylindrique. Ferner: Equations de la spirale conique et de la Scolioide. Scolioide oblique. Scolioide spiral. Diese gehören zu den Colonnes torses a noyau conique. Zuletzt betrachtet der Herr Vf. die Ligne de séparation d'ombre et de lumière, ombre portée et points lumineux dans le sinusoide spiral. Die Gleichung des Sinusoide droit ist z. B.

$$\sqrt{x^2+y^2}=r+b\sin\frac{\pi z}{a}.$$

Die Gleichung des Sinusoide spiral ist

$$\sqrt{x^2+y^2}=r+b\sin\left\{\frac{\pi z}{a}+\text{arctang}=\frac{y}{x}\right\}$$

Die Gleichungen der übrigen Flächen sind weitläufiger und lassen sich hier nicht mittheilen. Wir verweisen aber nochmals aus dem oben angedeuteten Gesichtspunkte auf diese Abhandlung, besonders weil wir Beispiele zu allgemeinen Theorien, die auch eine praktische Bedeutung haben, immer für besonders zweckmässig halten. Ueber die Colonnes torses selbst, nämlich über die spiralförmig gewundenen Säulen, die man oft in gothischen Kirchen findet, sagt der Herr Vf. am Eingange seines sehr lesenswerthen Memoire's Folgendes:

Les colonnes torses, dont le génie de l'homme tire tant de parti dans ses ouvrages les plus magnifiques, ont été jusqu'ici

peu étudiés en ce qui concerne leur génération géométrique. Sous ce raport on n'est pas plus avancé aujourd'hui qu'on ne l'était il y a bien de siècles. Pourtant ces colonnes, qui réunissent à un si haut degré la variété à l'élegance, et dont les premiers fondateurs d'eglises gothiques se sont principalement servis pour exprimer à la fois la perfection inaccessible et l'élévation de l'âme à Dieu, devaient pouvoir être représentées géométriquement d'une manière plus simple et plus exacte qu'on ne le pensait, afin de justifier le choix que l'homme en avait fait et le sentiment du beau qui l'avait inspiré.

Möge die Abhandlung bei den Geometern die gewiss recht sehr verdiente Beachtung finden, die wir derselben wünschen; die Beurtheilung ihres architektonischen Werths müssen wir Anderen überlassen.

Astronomie.

De fide, quae sit astronomorum in parallaxi fixarum exquirenda calculis tribuenda, dissertatio quam publico examini subjicit F. T. Blomstrand, respondente F. B. B. Selander. Lundae. 1850. 4.

Eine lesenswerthe, mit vielem Fleiss verfasste Dissertation, in welcher die Methoden zur Bestimmung der Parallaxe der Fixsterne sehr deutlich theoretisch entwickelt werden, und dann die von ihnen gewährte Sicherheit sorgfältig geprüft wird.

Nautik.

Ueber Leuchtthürme. Nach englischen, französischen und deutschen Quellen bearbeitet von A. Hess, Ingenieur zu Göttingen. Mit vier Figurentafeln. Berlin. 1851. 4. 1 Thlr. 20 Sgr.

Eine fleissige Zusammenstellung des Technischen, Optischen und Historischen über Leuchtthürme.

Prof. Dr. Vinc. Gallo: Trattato di navigazione. 2 Voll. Trieste. 1851. 4.

Wir werden von diesem Werke, das uns noch nicht zugegangen ist, später eine ausführliche Anzeige liefern.

Physik.

Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel mit Rücksicht auf die Newton'schen Pendelversuche. Von J. F. W. Gronau, Oberlehrer an der St. Johannischule zu Danzig. Danzig 1850. 4.

Diese interessante kleine Schrift gestattet leider einen Auszug nicht, ist aber der Beachtung der Leser des Archivs zu empfehlen. Die Berechnung der Newton'schen Versuche führt übrigens S. 13. zu sehr wenig mit einander übereinstimmenden Resultaten.

Die galvanischen Grundversuche, mathematisch erklärt und die Theorie des Condensators von Dr. Adrian Weiss, Rector und Lehrer der Math. und Physik an der königlichen Gewerbschule zu Ansbach. Ansbach. 1851. 4. 1 Thlr. 10 Sgr.

Die Grundlage dieser Abhandlung bildet der Satz: Wenn irgend zwei Körper (Metalle) sich berühren, so werden in ihnen vermöge dieser Berührung gewisse Mengen vorher sich neutralisirender entgegengesetzter Electricitäten getrennt und diese lagern sich auf den zwei Körpern so, dass die Intensitäten ihrer electrischen Zustände einen constanten von der Materie beider Körper bedingten Unterschied (die Spannung) behaupten. Die zwei Körper nennen wir Electromotoren, auch für den Fall, wo die Differenz so unbedeutend ist, dass man sie noch auf keine Weise wahrnehmbar machen kann. Eine Verbindung mehrerer hinter einander sich berührender Electromotoren, welche zugleich gute Electricitätsleiter sind, nennen wir Säule.

Die bekannten Versuche Jägers stimmen mit Ausnahme eines Punktes mit den Resultaten der Theorie überein. Der Herr Vf. bedient sich nur der niederen Algebra.

Der eigentlichen Betrachtung der galvanischen Säule wurde die im Archive der Math. und Physik. Thl. XIII. abgedruckte Abhandlung des Herrn Vfs. über die Condensatorwirkung vorangestellt, wegen des inneren Zusammenhanges beider Abhandlungen. Wir glauben die vorliegende Abhandlung der Beachtung der Leser recht sehr empfehlen zu müssen.

Grundzüge einer Meteorologie für den Horizont von Prag, entworfen aus den an der k. k. Universitäts-Sternwarte daselbst in den Jahren 1771 bis 1846 angestellten Beobachtungen von Karl Fritsch, Assistenten an der k. k. Sternwarte u. s. w. Prag 1850. 4. 1 Thlr. 20 Sgr.

Möchte allen bedeutenderen Orten eine so umfassende und gründliche Behandlung ihrer meteorologischen Verhältnisse zu

'heil werden, wie sie hier Prag durch den Herrn Vf. zu Theil 'ird, und wie dieselbe jetzt bekanntlich hauptsächlich durch Ǐreil's Bemühungen für den ganzen österreichischen Kaiserstaat ngebahnt wird.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der 'issenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. LXII. . 817.)

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (October). S. 228. oué, Ueber die ewigen Gesetze der Natur, besonders in der ineralogie, Geologie und Paläontologie. — S. 232. Spitzer: eber die Auflösung transcendenter Gleichungen mit einer unbeınnten Grösse. — S. 232. Brücke: Untersuchungen über die ıbjectiven Farben. — S. 281. Pierre: Bemerkungen über zweckässige Construction von Reisebarometern. — S. 326. Skuhersky: ie orthographische Parallelperspective.

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (November.) S. 351. atterer: Gasverdichtungs-Versuche. — S. 398. v. Steinheil: eschreibung einer von ihm construirten Brückenwage. — S. 442. aidinger. Mittheilung eines an ihn gerichteten Schreibens des ir David Brewster über die Natur der Polarisationsbüschel.

Jahrgang 1850. Zweite Abth. (December). S. 448. .illitzer: Vergleichung der drei zu Regnault's Psychrometer ›n Fastré in Paris verfertigten Thermometer. — S. 479. Schröt-:r: Ueber das Verhältniss der chemischen Anziehung der 'ärme. — Seidel: Allgemeine Uebersicht der meteorologischen eobachtungen zu Bodenbach in Böhmen im Jahre 1849. Zusamenstellung der meteorologischen Beobachtungen vom Jahre 29—1849.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. dited by W. Thomson, M. A., T. R. S. E. Vergl. Lite-.r. Ber. Nr. LXIV. S. 836.

No. XXVI. On the Theory of Linear Transformations. Conıued. By Geo. Boole. — On the Reduction of the General ʇuation of the *n*th Degree. By same. — On the Theorems Space analogous to those of Pascal and Brianchon in a Plane. ırt III. By Thomas Weddle. — On certain Definite Inteal's. By Arthur Cayley. — On Arbogast's Method of De-'ations. By W. F. Donkin. — On the mode of using the ʒns + and — in Plane Geometry. By De Morgan. — On :rtain Geometrical Theorems. — On Mariotte's Law of Fluid asticity. By Henry Wilbraham. — Reply to Professor ›ole's Observations on a Theorem contained in the last Novem-

ber Number of the Journal. By J. J. Sylvester. — On the Method of Vanishing Groups. By James Cockle. — On the Laws of the Elasticity of Solid Bodies By W. J. M. Rankine. — Mathematical Notes: I. Construction by the Ruler alone to determine the ninth Point of Intersection of two Curves of the Third Degree. By A. S. Hart. II. On Clairaut's Theorem. By Samuel Haughton. III. Laws of the Elasticity of Solid Bodies. By W. J. M. Rankine. IV. Note on Mr. Cockle's Solution of a Cubic Equation. By Arthur Cayley. — Sketsch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms. By J. J. Sylvester.

Te Next Number will Published on the 1st of November.

Herr A. Cayley gibt in seiner Note über eine Auflösung der cubischen Gleichungen des Herrn Cockle folgende Auflösung:

Wenn

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

die Gleichung ist, so ist

$$x=\frac{\{(ad-bc)-\sqrt{(-M)}\}\sqrt[3]{P}+2(ac-b^2)c}{\{(ad-bc)-\sqrt{(-M)}\}a-2(ac-b^2)\sqrt[3]{P}}$$

für

$$P=\frac{1}{2}\{(3abc-2b^3-a^2d)+a\sqrt{(-M)}\},$$

$$M=6abcd-4ac^3-4b^3d+3b^2c^2-a^2d^2.$$

Eine vollständige Entwickelung dieses Resultats durch einen der geehrten Leser des Archivs, und deren Mittheilung in dieser Zeitschrift, dürfte sehr wünschenswerth sein.

LXVI.

Literarischer Bericht.

Geometrie.

Anfangsgründe der Geometrie aus der Anschauung begriffsmässig entwickelt. In Folge hohen Auftrags des Ministeriums des Kultus und Unterrichts. Von Dr. L. C. Schultz v. Strassnitzki, ö. o. Professor der höhern Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Erstes Heft. Für die erste Grammatikal-Klasse. Wien. Verlag von Carl Gerold. 1851. 8. 16 Sgr.

Die vorliegende Schrift ist uns ein neuer höchst erfreulicher Beweis, wie sehr das k. k. österreichische Ministerium des Kultus und Unterrichtes bemühet ist, den Unterricht in allen Lehrgegenständen auf allen niederen und höheren Unterrichtsanstalten kräftig zu fördern, und dieselben zu wahren volksthümlichen Anstalten zu machen, wodurch die genannte Behörde die ihr von der Zeit gestellte Aufgabe auf eine jedes warme Menschenherz wahrhaft erfreuende und erhebende Weise lösen, und sich den wärmsten Dank der Mit- und Nachwelt erwerben wird. Je falschere Begriffe über das österreichische Unterrichtswesen man in Deutschland noch häufig verbreitet findet, desto mehr haben wir es schon mehrmals für unsere Pflicht gehalten, auf so erfreuliche Beispiele, wie uns wieder das vorliegende Buch eines darbietet, hinzuweisen. Nun einige Worte über das Buch selbst.

Das vorliegende erste Heft ist für die erste Grammatikal Klasse bestimmt. Was die Benennung „erste Grammatikalklasse“

eigentlich für eine Klasse bezeichnet, wissen wir nicht; indess glauben wir uns davon folgende Vorstellung machen zu können. Die preussischen Gymnasien bestehen bekanntlich vorschriftsmässig aus sechs Klassen, von denen man zwei (Prima und Secunda) die oberen, zwei (Tertia und Quarta) die mittleren, zwei (Quinta und Sexta) die unteren nennt, und durch diese Eintheilung zugleich drei sogenannte Bildungsstufen bezeichnet. In Sexta nun, der untersten Klasse der preussischen Gymnasien, die sich an die gewöhnliche Bürgerschule anschliesst, beginnt der strenge Unterricht in der lateinischen Grammatik, und da dies nun in der ersten Grammatikal-Klasse der österreichischen Gymnasien unstreitig auch geschieht, so müssen wir der Meinung sein, dass die erste Grammatikal-Klasse der österreichischen Gymnasien mit der Sexta der preussischen Gymnasien in Parallele zu stellen sei. Auf den letzteren Lehranstalten pflegt der strenge geometrische Unterricht erst auf der mittleren Bildungsstufe, d. h. in Quarta, zu beginnen; auf den österreichischen Gymnasien würde, wenn unsere obige Ansicht über den gegenseitigen Standpunkt der Klassen richtig ist, — und nach dem vorliegenden Buche zu urtheilen, — dies schon in der untersten Klasse, welche also mit Sexta der preussischen Gymnasien parallel läuft, der Fall sein. Dies führt uns nun von selbst auf die Frage, ob das vorliegende Buch eine Anleitung zu einem streng geometrischen Unterrichte, oder nur zu einer sogenannten Anschauungslehre, wie sie wohl in den untersten Klassen der preussischen Gymnasien ertheilt wird, gebe. Wir verneinen unbedingt das Letztere, und bejahen das Erstere. Denn mag auch der Herr Verf. gleich im Anfange der Vorrede der sogenannten euklidischen Methode keineswegs das Wort reden, so giebt dessenungeachtet sein Buch, dessen vorliegendes erstes Heft etwa die Sätze des ersten Buchs der Elemente des Euklides bis zur 34sten Proposition enthält, eine sehr zweckmässige Anleitung zur strengen Geometrie und ist keineswegs eine blosse sogenannte Anschauungslehre. Denn ob, um nur auf ein Beispiel hinzuweisen, Euklides die Hauptsätze von den Parallellinien in der Ordnung beweist, dass zuerst die drei Sätze bewiesen werden, in denen aus der Gleichheit der Gegenwinkel, aus der Gleichheit der Wechselwinkel, endlich daraus, dass die Summe zweier inneren Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie zwei rechte Winkel beträgt, auf die Parallelität der Linien geschlossen wird, und dann die Umkehrung dieser Sätze folgen lässt; oder ob der Herr Verf. es zweckmässig findet, die Sache umzukehren, d. h. den letzteren Satz voranzustellen, und dann die drei ersteren folgen zu lassen: das ist uns ganz gleichgültig, wenn die Sätze dem Lehrling nur zu vollständiger Anschauung gebracht werden, und er von deren Richtigkeit vollständig überzeugt wird. Schon darin, dass überall die Sätze und ihre Umkehrungen, wenn dieselben zulässig sind, streng von einander geschieden werden, erkennen wir das Wesen der euklidischen Methode, wie ausserdem auch an allen übrigen Stellen des vorliegenden Buches, wobei es uns auch ganz gleichgültig ist, ob der Herr Vf. Parallelogramm, wie Euklides, oder dafür Gleichlaufeck oder Gleicheck, u. dergl. sagt. Und ein anderes als ein strenges Lehrbuch der Geometrie konnte auch ein so strenger

und ausgezeichneter Mathematiker wie der Herr Verf. gar nicht schreiben.

Was nun aber die Entwickelung der Lehren der Elementargeometrie für den Unterricht und bei demselben betrifft, so hat der Herr Verf. mit allem Rechte den etwas starren Weg des Euklides gänzlich verlassen, und die sogenannte sokratisch-heuristische Methode in vortrefflicher Weise angewandt, oder vielmehr zur Anwendung derselben dem Lehrer eine vortreffliche Anleitung gegeben, in der uns immer ein wirklicher mathematischer Geist entgegen tritt, wie es gleichfalls bei dem Herrn Vf. nicht anders zu erwarten war. Auch ist überall, wo es anging und zweckmässig war, um so zu sagen, die praktische, d. h. auf Gegenstände der Praxis gerichtete, Anschauung zu Hülfe genommen worden. Unter euklidischer Methode, der wir so oft das Wort geredet haben, verstehen wir im Allgemeinen nur geometrische Strenge; wie dieselbe erreicht wird, ist uns gleichgültig; und insbesondere den *ersten* geometrischen Unterricht in der starren Weise des Euklides ertheilen zu wollen, würde geradezu Unsinn sein. Dass jedoch das Lehrbuch, was die Schüler in den Händen haben, ganz in der Weise des Euklides abgefasst sei, scheint von den meisten Lehrern der Mathematik als das Zweckmässigste, namentlich für den höhern Unterricht, anerkannt zu sein. Den durch das Lehrbuch gebotenen Stoff nun aber auf die erspriesslichste Weise zu benutzen, ist allein Sache des geschickten Lehrers, und Vorschriften lassen nach unserer Meinung in dieser Beziehung sich nicht geben; jeder Lehrer wird seine eigene Methode haben, diese wird für ihn allemal die beste sein, und in deren Wahl muss ihm, seine Geschicklichkeit als hinreichend erkannt und geprüft vorausgesetzt, völlige Freiheit gelassen werden. Namentlich aber auch in letzterer Beziehung, nämlich die leichteste Anschliessung jeder anderen selbst gewählten Methode zuzulassen, scheint uns die euklidische Darstellungsweise, namentlich für den höheren Unterricht, im Lehrbuche die beste zu sein. Das vorliegende Lehrbuch, dessen ferneren Lieferungen wir mit Verlangen entgegen sehen, enthält, wie wir uns schon oben ausgedrückt haben, eine treffliche Anleitung zu einem erfolgreichen geometrischen Unterrichte, einem solchen nämlich, durch welchen schon die ersten Anfangsgründe zum wahren geistigen Eigenthum des Schülers gemacht werden; nur erst dann, wenn er im wahren freien Besitz derselben sich befindet, wird er froh und freudig auf der ferneren, freilich nicht immer auf Rosen gebetteten Bahn der Mathematik fortschreiten können.

Nun wir kommen nochmals auf dasselbe zurück, aber nur insofern, als wir den österreichischen Gymnasien aus Ueberzeugung Glück wünschen, wenn schon in der untersten Klasse der geometrische Unterricht auf die in diesen Anfangsgründen vorgezeichnete Weise ertheilt wird; das Gedeihen des höheren Unterrichts wird darin dann gewiss eine sichere Grundlage finden.

Eine geometrische Abhandlung von Professor Pross (Einladungschrift der Königl. polytechnischen

Schule zu Stuttgart zur Feier Seiner Majestät des Königs Wilhelm von Würtemberg den 27. September 1850.). Stuttgart. 1850. 8.

Nach Vorausschickung der nöthigsten Hülfssätze enthält dieses Programm eine recht gute und ziemlich vollständige Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften des einfachen und des vollständigen Vierecks, nebst einigen Anwendungen dieser Sätze auf die praktische Geometrie. In einem Anhange giebt der Herr Verf. eine recht gute praktische Erläuterung der Anwendung des bekannten Legendre'schen Theorems von der Reduction sphärischer Dreiecke auf ebene Dreiecke in der Geodäsie. Die Lehrer der Geometrie werden in diesem Schriftchen manche gute Materialien zu geometrischen Uebungen finden, und mag ihnen daher dasselbe bestens empfohlen sein.

Ueber die Berechnung des körperlichen Inhalts unbeschlagener Baumstämme. Ein Programm, ausgegeben bei Gelegenheit der Jahresprüfung an der Königl. würtembergischen land- und forstwirthschaftlichen Akademie zu Hohenheim den 30. August 1849. Von Professor Dr. Friedr. Riecke. Stuttgart.

Dieses erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangte Programm enthält eine recht gute Zusammenstellung der vorzüglichsten bis jetzt in Vorschlag gebrachten Methoden zur Berechnung des körperlichen Inhalts unbeschlagener Baumstämme, und ein Urtheil über deren praktische Brauchbarkeit. Unter den verschiedenen Berechnungsmethoden giebt der Herr Vf. der Formel

$$K=\frac{1}{4}\pi h(3P^2+r^2)$$

den Vorzug, wo r den Halbmesser der obern Grundfläche, P den Halbmesser im dritten Theile der Höhe vom dickern Ende an gerechnet, h die Länge des Stammes bezeichnet. Die Formel rührt von Hossfeld her. Für sehr genaue Inhaltsbestimmungen empfiehlt er, wie sich von selbst versteht, vorzugsweise die sogenannte Simpson'sche Formel (s. Archiv. Thl. XIV. S. 291.). Wir empfehlen das Schriftchen Lehrern der Mathematik auch aus dem Gesichtspunkte einer guten Beispielsammlung zur Stereometrie, sowohl der elementaren, als auch der höheren mit Anwendung der Integralrechnung.

Arithmetik.

Lehrbuch der höheren Mathematik, enthaltend die Differential- und Integralrechnung, Variationsrechnung und analytische Geometrie. Nebst vielen Beispielen. Von Dr. T. Franke, Professor und zweitem Director an der polytechnischen Schule zu Hannover. Mit 3 Figurentafeln. Hannover. 1851. 8. 4 Thlr.

Der Herr Vf. hat in diesem Werke ein in mehrfacher Rücksicht sehr vollständiges Lehrbuch der sogenannten höheren Analysis und der analytischen Geometrie, welche letztere von der ersteren zweckmässig ganz gesondert worden ist, geliefert, indem in demselben ausser den gewöhnlichen auch Lehren vorgetragen worden sind, welche sonst gewöhnlich nicht in für den ersten Unterricht, namentlich auf technischen Lehranstalten, bestimmte Lehrbücher aufgenommen zu werden pflegen, wie z. B. in der Integralrechnung die Theorie der Euler'schen Integrale, der Gamma-Functionen, die periodischen Functionen und Anderes, wobei wir nur gewünscht hätten, dass auch die Grundelemente der Theorie der elliptischen Functionen aufgenommen worden wären, was sich durch die sonstige Reichhaltigkeit des Werks gewiss würde haben rechtfertigen lassen, da die letzteren Functionen unzweifelhaft wenigstens eben so wichtig für die ganze Wissenschaft sind, wie die zuerst genannten. Ausserdem enthält das Werk in der That einen grossen Reichthum von Beispielen, die der Herr Vf. selbst zu mehr als 400 angiebt, welche das Studium des Werks für Anfänger gewiss sehr lehrreich machen werden. Als eine besondere Eigenthümlichkeit seines Werkes hebt der Herr Vf. endlich noch hervor, dass er bei den Differential-Gleichungen der Methode der Trennung der operativen Symbole besondere Aufmerksamkeit geschenkt habe, welche von Servois in den Annales de Mathématiques. T. V. begründet, von Murphy in den Philosophical Transactions. 1837. weiter entwickelt, und von Gregory in den Examples of the process of the Differential and Integral Calculus. Cambridge. 1841 und 1846. mit grossem Nutzen angewendet worden sei, indem er glaube, durch die Verpflanzung dieser Methode auf deutschen Boden keine undankbare Arbeit unternommen zu haben, weil sie einer weiten Ausdehnung auf analytische Untersuchungen fähig sei, und viele Rechnungen, wie z. B. die Auflösung der Differential-Gleichungen, vereinfache und abkürze.

Was die Begründung der höheren Analysis, insbesondere der Differentialrechnung, betrifft, die uns in diesem Werke entgegen tritt, so wird man uns zugeben, dass es bei solchen kurzen Anzeigen, wie die in unseren literarischen Berichten sein sollen und

nur sein können, sehr schwer ist, sich in eine einigermassen genügende Discussion über dergleichen Gegenstände einzulassen. Indess ist der Gegenstand zu wichtig, als dass wir über denselben in Bezug auf das vorliegende Werk hier nicht noch einige Worte beizufügen uns erlauben sollten. Den Differentialquotienten fasst der Herr Vf. als Gränze auf, und hätte dabei nach unserer Meinung die vorhergehenden, gewissermassen diesen Begriff einleiten sollenden, Bemerkungen über unendlich kleine Veränderungen und dergl. ohne Schaden ganz weglassen können. Bei der Ableitung der Differentialquotienten der einfachen Functionen setzt der Herr Vf. schon das Binomialtheorem in seiner grössten Allgemeinheit voraus; obgleich dies unseren Ansichten über diese Dinge nicht ganz entspricht, so enthalten wir uns doch eines bestimmtern Urtheils über die Strenge der gegebenen Ableitungen, weil uns die Zahlenlehre des Herrn Vfs., auf welche er wegen des Binomialtheorems verweist, nicht vorliegt, und wir daher über die dort erreichte Strenge bei dieser Grundlage der Differentialrechnung nicht urtheilen können. Was nun ferner die Darstellung des Taylor'schen Satzes betrifft, welcher immer den Hauptnerv der ganzen Differentialrechnung bilden wird, so kommt der Herr Verf. bei dessen Ableitung allerdings auf den sogenannten Rest, und stellt die betreffende Gleichung auf folgende Art dar:

$$F(x+h)=Fx+\frac{h}{1}F'x+\frac{h^2}{1.2}F''x+\frac{h^3}{1.2.3}F'''x+\ldots..$$

$$\ldots.+\frac{h^n}{1.2.3..n}F^{(n)}x+\frac{h^{n+1}}{1.2.3.....n}F^{(n+1)}(x+\varDelta h),$$

wo $\varDelta$ einen ächten Bruch bezeichnet. Der besonderen Betrachtung des Restes entschlägt sich aber der Herr Vf. unter Voraussetzung gewisser allgemeiner Bedingungen ganz, und dieselbe kommt in der That auch in dem ganzen Werke, so viel wir finden können, gar nicht weiter vor, auch nicht bei dem Taylor'schen Satze für Functionen mit mehreren Variabeln. Fragen wir uns nun, was den Herrn Vf. dazu berechtigt, die besondere Betrachtung des Restes ganz zu unterlassen, natürlich unter Voraussetzung gewisser allgemeiner Bedingungen, so wiederholen wir zuvörderst, dass, bei der hier uns zur Pflicht gemachten Kürze, eine vollständige Verständigung mit dem Herrn Verf. uns schwer werden wird. Indess dürften die folgenden Bemerkungen ihren Zweck vielleicht nicht ganz verfehlen.

Verstehen wir nämlich den Herrn Vf. recht, so ist sein Raisonnement etwa Folgendes:

Wenn ich nur durch irgendwelche Schlüsse, natürlich je einfacher, desto besser, beweisen kann, dass die Reihe

$$Fx,\ \frac{h}{1}F'x,\ \frac{h^2}{1.2}F''x,\ \frac{h^3}{1.2.3}F'''x,\ \ldots.$$

ter gewissen Bedingungen, — natürlich desto besser, einen je gemeineren und weiteren Kreis der Anwendung dieselben ge- atten, — convergirt, so brauche ich den sogenannten Rest gar cht weiter zu betrachten, und kann dann ohne Weiteres mich rsichert halten, dass $F(x+h)$ die Summe der vorhergehenden nvergirenden Reihe, dass also in der gewöhnlichen Schreibweise

$$F(x+h) = Fx + \frac{h}{1}F'x + \frac{h^2}{1.2}F''x + \frac{h^3}{1.2.3}F'''x + \ldots.$$

t.

Dies ist aber nach unserer unmaassgeblichen Meinung ein Irr- um, und wir können den obigen Schluss in keiner Weise für erechtfertigt halten, wenn man nicht die Betrachtung in einer nderen Weise anzustellen im Stande ist wie der Herr Vf.*). Bei er von diesem gebrauchten Darstellungsweise hilft aber der blosse achweis der Convergenz der Reihe

$$Fx,\ \frac{h}{1}F'x,\ \frac{h^2}{1.2}F''x,\ \frac{h^3}{1.2.3}F'''x,\ \ldots..$$

treng genommen gar nichts. Denn auch angenommen, dass die- er Nachweis mit aller Consequenz nnd Strenge geführt sei, so lgt daraus weiter nichts, als dass die vorstehende Reihe, dem egriffe der Convergenz gemäss, überhaupt eine Summe hat; ass aber diese Summe $F(x+h)$ ist, folgt daraus noch eineswegs, und dies nachzuweisen, ist eben die Hauptsache. lieser Nachweis kann aber gar nicht anders geführt werden, als urch die sorgfältigste Betrachtung des Restes, welche letztere aher auch nie unterlassen werden kann und darf, immer die von em Hrrrn Verf. seinem Werke von vornherein gegebene Anlage orausgesetzt. Nur wenn man beweisen kann, dass für in's Un- ndliche wachsende n der Rest sich bis zu jedem Grade der Null ähert, ist man wirklich vollständig versichert, dass

1. die Reihe

$$Fx,\ \frac{h}{1}F'x,\ \frac{h^2}{1.2}F''x,\ \frac{h^3}{1.2.3}F'''x,\ \ldots.$$

onvergirt, d. h. eine Summe hat, und ferner

2. dass diese Summe die Grösse $F(x+h)$, dass also in der ewöhnlichen Schreibweise

---

*) Wir verweisen in der Kürze auf den ganz an Cauchy sich hal- enden Aufsatz Nr. XLVIII. im ersten Theile des Archivs.

$$F(x+h) = Fx + \frac{h}{1} F'x + \frac{h^2}{1.2} F''x + \frac{h^3}{1.2.3} F'''x + \ldots$$

ist.

Bei Unterlassung einer sorgfältigen Betrachtung des Restes wird Nr. 2. immer unerledigt bleiben, wenigstens bei der ganzen von der gewöhnlichen sich nicht unterscheidenden Anlage dieses Werkes.

So wie bei der Taylor'schen Reihe für Functionen mit einer und mit mehreren Variablen, sind dann in diesem Werke natürlich auch bei der Bernoulli'schen Reihe, bei der Lagrange'schen Reihe (der Herr Verf. hätte immerhin auch die Bürmanni'sche Reihe aufnehmen können) strengere Restbetrachtungen ganz unterlassen worden, was natürlich auch als Folge einer gewissen Consequenz nicht wohl anders sein konnte.

Beiläufig bemerken wir hierbei noch, dass der Herr Vf. der bisher allgemein Maclaurin's Reihe benannten Reihe

$$Fx = F0 + \frac{x}{1} F'0 + \frac{x^2}{1.2} F''0 + \frac{x^3}{1.2.3} F'''0 + \ldots$$

den Namen Stirling's Reihe beilegt. Was zu dieser Abweichung von dem bisher Gewöhnlichen berechtigt, wissen wir nicht. In der in unserem Besitz befindlichen seltenen und von uns sehr hoch gehaltenen Schrift: Methodus Differentialis: sive Tractatus de Summatione et Interpolatione serierum infinitarum. Auctore Jacobo Stirling. Londini. 1730 4. findet sich, so viel wir jetzt finden können, nur p. 102. eine Stelle, welche zu der obigen Abweichung von der bisher allgemein gebräuchlichen Benennung hätte Veranlassung geben können; zu der an dieser Stelle angeführten Reihe fügt aber Stirling selbst sogleich hinzu: „Et hoc primus deprehendit D. Taylor in Methodo Incrementorum et postea Hermanus in Appendice ad Phoronomiam.“ In der That ist es auch nur die eigentliche Taylor'sche Reihe, die Stirling hier im Auge hat; denn wenn er dieselbe auch z. B. pag. 103. auf folgende Art schreibt:

$$BE = A + \dot{A}z + \frac{1}{2}\ddot{A}z^2 + \frac{1}{6}\dddot{A}z^3 + \frac{1}{24}\ddddot{A}z^4 + \ldots,$$

so ist in dieser Gleichung doch A die einer gewissen Abscisse entsprechende Ordinate, und $\dot{A}$, $\ddot{A}$, $\dddot{A}$, $\ddddot{A}$, u. s. w. sind deren Differentialquotienten; z ist das Increment der

bscisse von A, und BE ist die der um das Increment z ver-
ıderten Abscisse entsprechende Ordinate, also offenbar in der
hat nur der Taylor'sche Satz. Daher wird man wohl fernerhin
ımer noch wie bisher „Maclaurin's Satz" sagen müssen,
enn der Herr Verf. uns nicht eines Besseren belehrt, was wir
ıhr gern annehmen werden!

Dass der Herr Vf. gleich von vorn herein (S. 41.) die imagi-
iren Grössen in die Differentialrechnung einmischt, und den
egriff des Differentialquotienten ohne Weiteres auch auf diese
rössen anwendet und ausdehnt, stimmt gleichfalls nicht mit un-
ren Ansichten über diese Dinge überein. Fasst man den Diffe-
ntialquotienten, wie auch der Herr Vf. gethan hat, als Gränze
ıf, so giebt es in diesem Sinne für imaginäre Grössen über-
ıupt gar keine Differentialquotienten, da doch bei solchen Grös-
n von einer wirklichen Annäherung an eine Gränze im eigent-
chen Sinne wohl schwerlich die Rede sein kann. Will man
n Begriff des Differentialquotienten auf imaginäre Grössen aus-
ehnen, so kann dies nur symbolisch geschehen, in der Weise
twa, wie Cauchy und Andere gethan haben.

So wie hierin, huldigt der Herr Vf. noch in vielen anderen
'unkten älteren Ansichten. Leider gestattet uns der Raum nicht,
ies weiter zu verfolgen; daher wollen wir nur noch das Folgende
emerken. Auf S. 89. leitet der Herr Vf. die wichtigen und merk.
ürdigen Gleichungen

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

s den Reihen

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1\ldots5} - \frac{z^7}{1\ldots7} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1..4} - \frac{z^6}{1..6} + \ldots$$

b, indem er dieselben wie endliche Gleichungen behandelt, und
ıach einem bekannten Fundamentalsatze der Lehre von den Glei-
hungen in Factoren zerlegt. Diese Ableitung rührt von Joh.
Bernoulli her. Nun hat aber schon Joh. Friedr. Pfaff in
einem trefflichen „Versuch einer neuen Summationsme-
hode. Berlin. 1788. S. 87. Nr. 7." das völlig Ungründliche
nd Verfehlte jener Schlussart auf die überzeugendste Weise nach-

gewiesen, und der Herr Vf. möchte wohl in einige Verlegenheit gerathen, wenn einer seiner Schüler zufällig obige Schrift von Pfaff gekannt hätte. Jene von Pfaff erhobenen sehr gegründeten Zweifel veranlassten daher auch den Herausgeber des Archivs schon im Jahre 1822, in einer sehr ausführlichen, noch vieles Andere gelegentlich berücksichtigenden Abhandlung die obigen merkwürdigen Zerlegungen der goniometrischen Functionen in Factoren auf einem ganz anderen Wege zu begründen. (Mathematische Abhandlungen von Dr. Joh. Aug. Grunert. Erste Sammlung. Altona. 1822. 4. Erste Abhandlung.). Diese Abhandlung ist damals zu seiner grossen Freude auch mit mehrfachem ihm sehr schätzbaren Beifalle beehrt worden, und hat Eingang in mehrere andere Schriften, z. B. in die Anhänge zu der sehr guten Uebersetzung des Vollständigen Lehrcurs der reinen Mathematik von Francoeur, die Herr Külp in Darmstadt herausgegeben hat, gefunden. Dessenungeachtet würde der Herausgeber gegenwärtig doch einer Ableitung der obigen merkwürdigen Producten-Formeln durch die Gränzenmethode, wie eine solche schon von L'Huilier (Mém. de Berlin. 1788. 89.) versucht, und neuerlich von Cauchy in sehr schöner Weise gegeben worden ist, vor seiner eigenen Darstellung, die man eine rein analytische (durch unendliche Reihen etc. etc.) nennen könnte, entschieden den Vorzug einräumen, und in seinen Vorlesungen gebraucht er auch in der That jetzt allein eine an diese Cauchysche Darstellung sich in den wesentlichsten Hauptpunkten anschliessende Ableitungsmethode. Dass aber solche ganz veraltete und verfehlte Beweise wie der von Joh. Bernoulli immer wieder zum Vorschein kommen, ist nach den von Pfaff schon im Jahre 1788 gemachten treffenden Erinnerungen wenigstens auffallend. Uebrigens hat schon Joh. Bernoulli selbst bei seiner Darstellung sich Gewissensscrupel gemacht, die Kästner (natürlich in seiner Weise) zu beseitigen gesucht hat. (Analysis des Unendlichen. §. 337.).

Der Herr Verf. hat auch die ersten Elemente der Variationsrechnung in sein Buch aufgenommen. Leider steht diese Wissenschaft, der allerdings ein wahrhaft grosser mathematischer Gedanke zu Grunde liegt, rücksichtlich ihrer gehörigen Begründung noch auf schwachen Füssen, und sieht noch einem Cauchy entgegen, der ihr diese Begründung in gleich vollständiger Weise wie der Differentialrechnung verschafft. Der Mathematiker muss natürlich auch diese Wissenschaft ihrem gegenwärtigen Bestande nach vollständig kennen. Ob aber in einem vorzugsweise für Praktiker bestimmten Buche dieser Abschnitt aus dem angeführten Grunde nicht besser ganz weggelassen worden wäre, ist uns wenigstens zweifelhaft. Vorzugsweise zwei Probleme sind es, welche den Praktiker interessiren können, die gewöhnlich ihre Behandlung in der Variationsrechnung finden: das Problem von der Brachystochrone und das Problem von dem Körper des kleinsten Widerstandes. Das erste hat der Herr Vf. in sein Buch aufgenommen, das zweite nicht, obgleich die Be-

rechtigung dazu gewiss eben so gross gewesen wäre wie bei jenem. Für das Problem von der Brachystochrone hat der Herausgeber des Archivs im 7. Bande dieser Zeitschrift eine elementare, d. h. von der Variationsrechnung ganz unabhängige, Auflösung gegeben, die sich wegen ihrer Strenge und Evidenz vorzüglich für den Unterricht, auch von Praktikern, eignen dürfte, und, wie er zu seiner Freude hört, bei derartigen Vorlesungen in der That auch schon benutzt wird. Für das Problem von dem Körper des kleinsten Widerstandes befindet er sich jetzt glücklicherweise im Besitz einer ebenso elementaren Auflösung, welche die Mathematiker hoffentlich in gleichem Grade interessiren, und die er deshalb in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift mittheilen wird.

Die analytische Geometrie enthält die gewöhnlichen Elemente und die wichtigsten Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Gebilde des Raumes.

Ungeachtet der im Vorhergehenden von uns ausgesprochenen mehrfachen, von denen des Herrn Vfs. abweichenden Ansichten scheiden wir doch von demselben mit aller der Achtung, welche die Belehrung fordert, die sein Buch namentlich durch den Reichthum seiner Beispiele vorzüglich Anfängern unzweifelhaft gewähren wird.

Druckfehler

im zwölften Theile.

Seite 338 Zeile 5 von oben lies $C\varphi_h$ statt φ_h

\- 339 - 10 - unten - q_m, q_{m+1} statt $q_m + q_{m+1}$

\- 343 - 4 - - - équations (18) statt équations

\- 353 - 4 - oben - $r'+1$ statt $h_{r'+1}$

\- 356 - 4 - - - $\overset{n+1}{\mathscr{H}} = \overset{n+1}{\mathfrak{K}}$ statt $\overset{n+1}{\mathscr{H}} = \overset{m}{\mathfrak{K}}$

\- - - 7 - - - $\overset{m}{\mathscr{H}}$ statt $\mathscr{H}$

\- 366 - 4 - unten - n statt m

\- 367 - 5 - - - Σ_q statt Σ_p

\- 368 - 4 - oben - $\overset{n+1}{\mathfrak{p}}_{x_k}$ statt $\overset{n+1}{\mathfrak{p}}_{n_k}$

\- - - 1 - unten - $\overset{4}{P}$ statt $\overset{4}{\mathfrak{p}}$

\- 374 - 1 - - - $\overset{n}{Q}_{k,m}$ statt $\overset{n}{\mathfrak{Q}}_{k,m}$

\- 375 - 1 - - - $\overset{n}{\mathrm{A}}_p \overset{n}{\mathrm{A}}_p = \{\overset{n}{\mathrm{A}}_p\}^2$ statt $\overset{n}{\mathrm{A}}_p \overset{n}{\mathrm{A}}_p \{\overset{n}{\mathrm{A}}_p\}^2$.

LXVII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite t accompagnée d'extraits de manuscrits inédits, par . Woepcke, Docteur agrégé à l'Université de Bonn, lembre de la société asiatique de Paris. Paris. 851. 8.

Es ist uns seit längerer Zeit kein so interessanter und wich-iger Beitrag zur Geschichte der Mathematik vorgekommen, als lie vorliegende Uebersetzung eines bisher gewiss einem grossen Theile der Mathematiker fast ganz unbekannten, mindestens von lenselben wohl nur sehr wenig beachteten arabischen Mathe-matikers, deren Werth noch vielfach durch die von dem Herrn Uebersetzer beigefügten Zusätze erhöht wird. Wir halten es da-her für zweckmässig, eine etwas ausführlichere Anzeige dieses nteressanten Werkes zu liefern, als sonst in diesen literarischen Berichten gewöhnlich ist.

Im Jahre 1742 veröffentlichte Gerard Meerman zu Leiden sein „Specimen calculi fluxionalis". Indem er in ler Vorrede die Verdienste, welche die Araber sich um lie Algebra erwarben, kurz skizzirt, citirt er ein arabisches Ma-uscript von Alkhayyâmi, dessen Uebersetzung uns hier vor-iegt, welches Warner der Bibliothek zu Leiden legirt hatte, nd muthmasset, dass sich in diesem Manuscripte die Auflösung

der cubischen Gleichungen finden könne, was jedoch, wie der Herr Uebersetzer sagt, in der That nicht der Fall ist, obgleich man dieselbe Meinung von Montucla in seiner Histoire des Mathématiques und von Gartz in seiner bekannten, für die Literatur des Euklides wichtigen Schrift über die Uebersetzer und Commentatoren des Euklides, gleichfalls ausgesprochen findet, weil die Entdeckungen des Alkhayyâmî, so sinnreich dieselben auch an sich sind, nichts mit denen der italienischen Algebraisten des 16ten Jahrhunderts gemein haben. Niemand dachte seitdem wieder an die Schrift des Alkhayyâmi, bis L. Am. Sedillot im Nouveau Journal asiatique. Mai. 1834. anzeigte, dass er ein arabisches Manuscript der Königlichen Bibliothek zu Paris entdeckt habe, welches ein sehr interessantes Fragment einer Abhandlung über die Algebra enthalte. Später gab Sedillot eine ausführlichere Analyse dieses Fragments, und Chasles erklärte in seinem Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie. Bruxelles. 1837., dass die Herausgabe des erwähnten Fragments für die Geschichte der Mathematik von wahrem Interesse sein werde. Endlich entdeckte Herr Libri in der königlichen Bibliothek ein vollständiges Manuscript des Werkes, zu welchem jenes Fragment gehörte, und es wurde die Identität seines Verfassers mit dem Verfasser des in der Bibliothek zu Leiden aufbewahrten Manuscripts constatirt. Die Meinung über die Wichtigkeit dieses Werkes war eine völlig ungetheilte, und Libri entschloss sich zur Herausgabe, die aber unterblieben ist. Desto mehr Dank verdient nun Herr Wöpcke, dass er sich, unter Benutzung der drei obigen Handschriften, der Herausgabe mit eben so viel Geschick als Fleiss unterzogen, und dadurch der Literatur der Geschichte der Mathematik ein höchst werthvolles Geschenk gemacht hat.

Die Schrift des Alkhayyâmî führt in der Uebersetzung den Titel:

Mémoire du sage excellent Ghiyâth Eddîn Aboûl Fath Omar Ben Ibrahim Alkhayyâmî de Nîchaboûr (que Dieu sanctifie son âme précieuse!) sur les demonstrations des problèmes de l'Algèbre.

Weder das Jahr der Geburt noch das Jahr des Todes des Alkhayyâmî sind bekannt. Man weiss aber, dass er in Gesellschaft zweier jungen Leute, des Nizhâm Almoulq, Vezir der Sultane Alp-Arslan und Maliq-Chah, und Haçan Ibn Sabbah, Gründer des Ordens der Assasinen, erzogen wurde. Die drei jungen Leute hatten sich das Versprechen gegeben, dass, wenn einer von ihnen zu Ehren und Würden gelangen sollte, er seiner beiden Cameraden gedenken wolle. Nizham Almoulq, der spätere Vezir, entledigte sich seines Versprechens, und gab dem Haçan Ibn Sabbah die Stelle eines Hadjib oder Kanzlers. Er erwies sich jedoch undankbar und ward vom Hofe entfernt. Alkhayyâmî schlug alle ihm angebotenen Gnaden- und Ehrenbezeugungen aus, völlig zufrieden mit einer bescheidenen Lage, die ihm nur hinreichende Zeit zu wissenschaftlichen Arbei-

ten liess. Man weiss jedoch, dass er einen ausgezeichneten Platz unter den Astronomen von Maliq-Chah einnahm, und bei der im Jahre 1079 durch diesen Fürsten eingeführten Reform des Kalenders thätig war. Alkhayyâmî war auch Verfasser einer Schrift über die Ausziehung der Wurzeln höherer Grade, und zugleich Dichter; seine Gedichte trugen ihm aber den Ruf eines Atheisten und Freigeistes ein. Ein anderer arabischer Schriftsteller Alzouzeni schildert ihn in der folgenden interessanten Weise:

„Omar Alkhayyam, imam du Khorâçân, le grand savant du temps, etait versé dans les sciences des Grecs. Il exhortait à chercher le Dieu unique, gouverneur du monde, par la purification des mouvements corporels, de manière à rendre l'âme humaine exempte de toute impureté. Il recommandait aussi une étude persévérante de la politique, fondée sur les bases de cette science établies par les philosophes grecs. Les Soufis des temps postérieurs ont acueilli le sens apparent d'une partie de ses poésies et puis les ont accommodées à leurs doctrines, de sorte qu'ils en font l'objet de discussions dans leurs assemblées et dans leurs réunions privées. Mais le sens caché de ses poésies consiste en axiomes de la religion universelle, et en principes généraux embrassant les devoirs pratiques. Comme les hommes de son temps blamaient ses opinions religieuses, et mettaient à découvert ce qu'il cachait en secret, il craignit pour sa vie, et mit un frein aux écarts de sa langue et de sa plume. Il fit le pelerinage grâce plutot à une rencontre fortuite que par piété; et son exterieur trahit ses pensées secrètes, bien que rien n'en parût dans ses paroles. Lorsqu'il fut arrivé à Bagdad, les personnes qui s'étaient livrées aux mêmes études que lui en fait de sciences anciennes accoururent auprès de lui; mais il leur ferma la porte, en homme qui avait renoncé à ces études, et non pas en homme qui fût resté leur confrère. Après être retourné de son pèlerinage dans son pays, il se rendait au lieu des prierès le soir et le matin, et cachait ses secrets, qui pourtant ne pouvaient pas manquer de se révéler. Il était sans pareil dans l'astronomie et dans la philosophie; et sa capacité éminente dans ces sciences aurait passé en proverbe, s'il avait reçu en partage le respect des convenances. On a de lui des poésies legères dont le sens caché perce à travers leurs expressions voilées, et dans lesquelles la conception poetique est troublée par l'impureté de l'intention cachée. Poésie:

„Comme mon âme se contente d'une aisance modeste et facile à obtenir, que toutefois ma main et mon bras ne me procurent qu'avec effort,

„Je suis à l'abri de toutes les vicissitudes de la fortune, et, dans mes malheurs, ma main et les projets que je forme sont mon refuge.

„Les sphères dans leurs mouvements n'ont elles pas prononcé l'arrêt, que toutes les étoiles heureuses finissent par décliner vers une position funeste?

„Persévérance donc, ô mon ame, dans ton repos! Tu en fais seulement croufer le sommet, en voulant en consolider ses bases.“

Die hier im arabischen Grundtexte und einer französischen Uebersetzung mitgetheilte Schrift des Alkhayyâmi zerfällt in die folgenden fünf Theile:

1. Einleitung, enthaltend eine Vorrede, die Erklärungen der Grundbegriffe der Algebra, und eine Uebersicht der Gleichungen, welche der Verfasser zu discutiren beabsichtigt.

2. Die Auflösung der Gleichungen der zwei ersten Grade.

3. Die Construction der Gleichungen des dritten Grades.

4. Die Discussion der Gleichungen mit gebrochenen Gliedern, welche zum Nenner Potenzen der Unbekannten haben.

5. Bemerkungen und Zusätze.

Als eine Eigenthümlichkeit dieser Algebra wird von dem Herrn Herausgeber mit Recht hervorgehoben, dass der Verfasser jederzeit mit der geometrischen Construction einer Gleichung die numerische oder arithmetische Auflösung derselben verbindet; und wenn er auch bei den cubischen Gleichungen mit der geometrischen Construction sich zu begnügen genöthigt ist, so bezeichnet er dies doch den künftigen Algebraisten als eine noch auszufüllende Lücke.

Die Additions A, B, C, D, E enthalten sehr werthvolle Zusätze zu der Uebersetzung der Algebra des Alkhayyâmi, und sind grösstentheils aus Manuscripten der Bibliothek zu Leiden und der Bibliotheque nationale entlehnt.

Diese Zusätze betreffen hauptsächlich die bekannte Aufgabe, auf welche Archimedes die Theilung einer Kugel in zwei Segmente nach einem gegebenen Verhältnisse gründet, nämlich die Aufgabe:

D |———————— B ———— T ————| Z

Wenn eine Linie DZ gegeben ist, und in derselben zwei Punkte B, T, so dass B zwischen D und T liegt: in der Linie DZ einen Punkt X so zu bestimmen, dass

$$XZ:ZT=BD^2:DX^2$$

ist.

Bezeichnet man BD, ZT, ZD, DX durch a, b, c, x, so giebt dies die Proportion

$$c-x:b=a^2:x^2,$$

elche zu der cubischen Gleichung

$$x^3 + a^2b = cx^2$$

ihrt.

Ferner betreffen die Zusätze die Trisection des Winkels, und ie Beschreibung des regulären Neunecks und Siebenecks in den reis, wobei zu bemerken ist, dass die Araber die erstere auf ine Gleichung des dritten Grades zurückführten, und zu der Seite es letzteren mittelst des Durchschnitts zweier Kegelschnitte gengten. Ausserdem enthalten die Zusätze aber auch noch vieles ndere sehr Bemerkenswerthe, was wir der Beschränktheit des aumes wegen hier leider nicht Alles namhaft machen können.

In Summa hat der Herr Herausgeber und Uebersetzer durch iese Schrift aus den handschriftlichen Quellen den Beweis zu ühren gesucht, dass, während bisher die Meinung allgemein anenommen war, dass die Araber sich begnügt hätten, die Werke er griechischen Geometer als das non plus ultra mathematischer orschung zu bewundern und höchstens zu verstehen, dieselben ielmehr im XIten Jahrhunderte ungefähr den Standpunkt einnahen, der in der Entwickelung der modernen europäischen Mathematik durch Vieta repräsentirt wird. Während man oft genug ehauptet hat, die Araber seien nie über die Behandlung der Gleihungen zweiten Grades hinaus gegangen, ist in dieser Schrift ersucht worden, von ihren Arbeiten im Gebiete der Gleichungen es dritten und selbst des vierten Grades, ja selbst theilweise och höherer Grade, eine möglichst umfassende Darstellung zu eben, was in der That nicht zu den geringsten Verdiensten derelben gehört.

Die Punkte, welche einer mathematischen Erläuterung bedurfen, hat der Herr Herausgeber nirgends auf diesem Wege zu rläutern unterlassen, und dabei die von der neuern Mathematik argebotenen Erleichterungen mit Recht niemals verschmähet.

Seine in der Vorrede ausgesprochene Befürchtung, zu viel lementar-mathematische Entwickelungen der Schrift beigefügt zu aben, ist ungegründet, weil seine Bemerkungen bei Weitem dem rössten Theile nach nicht ohne Werth sind, namentlich für weiger mit den Resultaten mathematischer Forschung vertraute eser, insbesondere für Sprachforscher und Literarhistoriker, für elche diese Schrift doch auch von Wichtigkeit und Interesse ist.

Ausser wegen ihrer Wichtigkeit für die Geschichte der Mahematik, müssen wir aber unsern Lesern diese Schrift auch och aus einem anderen Gesichtspunkte empfehlen. Dieselbe entält nämlich hauptsächlich in den Zusätzen und in den häufigen Noten unter dem Texte einen ziemlichen Reichthum mathematischer, namentlich geometrischer, Sätze und geometrischer Constructionen, die dem grössten Theile nach nicht gerade sehr bekannt sein dürften, und oft nicht geringes Interesse darbieten;

ja es werden Lehrer der Mathematik gewiss viele dieser Dinge selbst als Stoff zu Uebungen für ihre Schüler benutzen, oder wenigstens an dieselben dergleichen Uebungen anknüpfen können, namentlich was geometrische Constructionen, auch die sogenannten organischen, zu deren Ausführung mittelst eines stetigen Zugs meistens besondere Instrumente erforderlich sind, betrifft.

Die Schrift ist mit französischer Eleganz gedruckt und dem Erbprinzen von Anhalt-Dessau gewidmet, welcher dafür, dass er an den Arbeiten des Herrn Verfassers das wärmste Interesse nahm und dieselben dadurch wesentlich förderte, gewiss den Dank aller Freunde der Geschichte der Mathematik, einem Felde, das lange Zeit hindurch nur wenig bebaut worden ist, in hohem Grade verdient. Möge deshalb der Herr Verf. eifrig fortfahren, seine erfolgreichen Studien diesem gewiss noch viele schöne Früchte tragen könnenden Felde zuzuwenden. Wir wünschen sehr, ihm recht bald wieder auf demselben zu begegnen.

Arithmetik.

Grundzüge der algebraischen Analysis. Als Leitfaden bei öffentlichen Vorträgen und zum Selbststudium. Von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. 1851. 8.

In diesen Grundzügen der algebraischen Analysis sind die Forschungen der neueren Analytiker, namentlich die auf eine bessere Begründung der Analysis bezüglichen, auf eine sehr geschickte Weise benutzt, und, ohne für den beabsichtigten Zweck des Buches das nothwendige Maass zu überschreiten, in compendiarischer Kürze auf sehr ansprechende Weise zusammengestellt, so dass diese Schrift, da auch eigne Forschungen des Herrn Vfs. in derselben keineswegs fehlen, wenn man dieselben mit vielen anderen Schriften, die, fast wie es scheint, mit Absicht, oder — um die Sache mit ihrem wahren Namen zu nennen — wegen Faulheit und Unkenntniss ihrer Verfasser, denen es an der nöthigen Energie fehlt, den Staub der alten combinatorischen und Reihen-Analysis, nebst der Methode der unbestimmten Coefficienten, u. s. w. u. s. w., die sie in hinreichend bekannten sogenannten combinatorischen u. s. w. Schulen erlernt haben, von den Füssen zu schütteln, mit den neueren Forschungen sich gehörig bekannt zu machen, und auf eine für ihre Schüler zweckmässige Weise zu verarbeiten, vergleicht, jedenfalls einen sehr angenehmen Ein-

druck macht. Gewiss muss man den Schülern der polytechnischen Schule zu Karlsruhe Glück wünschen, wenn sie gleich am Anfange ihrer mathematischen Studien die Ansprüche, welche die neuere strengere Analysis macht, kennen lernen und mit denselben vertraut gemacht werden. Denn dass diese neueren Ansichten sich doch endlich allgemein Bahn brechen, und den alten Schlendrian ganz bei Seite schieben werden, ist jetzt nicht mehr zu bezweifeln; mag auch die Methode der Darstellung und Entwickelung noch mancherlei Umgestaltungen erfahren, woran wir selbst gar nicht zweifeln: immer werden doch die Grundansichten, denen dieselbe ihre Entstehung verdanken, ihre volle Geltung behalten. Nur denjenigen halten wir für einen wahren Lehrer der Mathematik, der wie der Herr Verf. der vorliegenden Schrift seine Schüler schon jetzt mit diesen neueren Ansichten so viel als möglich bekannt macht; wer dies nicht thut, versündigt sich nach unserer Meinung an seinen Schülern in hohem Grade, weil er sie in dem Irrgarten der alten Analysis nur an der Nase herumführt, und ihnen Dinge lehrt, die sie doch über kurz oder lang wieder vergessen müssen, wie dies leider vielen an Jahren älteren unter den jetzigen Mathematikern gegangen ist, die auch in jenen alten Schulen aufgewachsen sind. Wir heissen daher diese Schrift von Herzen willkommen, und sind überzeugt, dass sie zur grösseren Verbreitung der neueren strengeren Ansichten über die Lehren der Analysis das Ihrige beitragen wird. Der Inhalt derselben ist folgender: Erste Abtheilung. I. Der binomische Satz. II. Die imaginären Formen. III. Bestimmung einer Function aus gegebener Eigenschaft. IV. Bestimmung aus gegebenen Werthen. Interpolation. V. Von der Reihen-Summirung einiger Reihen. VI. Unendliche Reihen. Convergenz und Divergenz. Summirung der unendlichen Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots..$$

VII. Die natürliche Exponenzreihe. Nächste Folgerungen daraus. VIII. Die Binomialreihe. Folgerungen daraus. IX. Die Reihe für den natürlichen Logarithmus und für arc $(\mathrm{tg}=x)$. X. Die Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens. XI. Die Zerfällung in Partialbrüche. XII. Die recurrenten Reihen. XIII. Die Differenzreihen. XIV. Allgemeine Betrachtung der Functionen, Stetigkeit, Gränzwerthe. — Zweite Abtheilung. I. Uebersichtliche Betrachtung der Gleichungen des zweiten Grades. II. Auflösung der Gleichungen des dritten Grades. III. Auflösung der Gleichungen des vierten Grades (nach Euler). IV. Allgemeine Betrachtungen über die algebraischen Gleichungen. Nachweis der Existenz der (reellen oder imaginären) Wurzeln (nach Cauchy). Zerfällung der Wurzelfactoren. Zerfällung in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades. Aufsuchung der ganzen Wurzeln. Abgeleitete Functionen und ihre Anwendung. Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Polynome. V. Der Sturm'sche Satz. Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung vermittelst Kettenbrüchen (nach Lagrange). Bestimmung der Gränzen der reellen Wurzeln. VI. Bestimmung der reellen Wurzeln einer Gleichung (nach Horner),

Division eines Polynoms durch $x-\alpha$. Anwendung auf die Bestimmung der reellen Wurzeln. Untersuchung des Falls, da mehrere Wurzeln fast gleich sind. Die Newton'sche Annäherungsmethode. Wiederholte Betrachtung des obigen schwierigen Falls. Kurze Andeutung der Möglichkeit der Bestimmung imaginärer Wurzeln. Anhang. I. Die trigonometrischen Functionen für imaginäre Bogen u. s. w. II. Allgemeine Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten (nach Grunert). III. Die Fourier'sche Näherungsmethode zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer (algebraischen) Gleichung.

Auch die Vorrede enthält noch einige sehr lesenswerthe Betrachtungen, namentlich über die Folgerungen, die sich aus der Gleichheit zweier Bogen rücksichtlich des Verhaltens ihrer goniometrischen Functionen ziehen lassen, Betrachtungen, die oft mit grossem Unrecht selbst bei die ersten Elemente überschreitenden Vorträgen der Trigonometrie vernachlässigt werden, zum grössten Schaden für das weitere analytische Studium der Schüler.

Man sieht aus dieser Uebersicht des Haupt-Inhaltes auch sogleich, einen wie grossen Reichthum schöner Methoden und Sätze diese Schrift auf dem geringen Raume von nur 216 Seiten enthält, und wir empfehlen dieselbe daher nochmals aus vollkommenster Ueberzeugung unsern Lesern zu sorgfältiger Beachtung, welche dieselbe gewiss in vorzüglichem Grade verdient.

Mechanik.

Traité de Balistique, par Is. Didion, Chef d'escadron d'Artillerie. Paris 1848. 8. 2 Thlr. 27 Sgr.

Dieses Buch ist uns leider bis jetzt entgangen; wir glauben aber alle diejenigen, welche sich für das Balistische Problem interessiren, auf dasselbe nachträglich aufmerksam machen zu müssen, indem es eine ziemlich vollständige Zusammenstellung aller der Untersuchungen, welche bisher über das genannte wichtige Problem angestellt worden sind, und auch manches Neue enthält, namentlich die bisher noch nirgend bekannt gemachten Untersu-

chungen von Français. Die folgende Uebersicht des Inhalts wird dieses Urtheil bestätigen.

Avant-Propos. Préliminaires. Definition et objet. Historique. *Section I* Mouvement des projectiles dans le vide. *Section* II. Résistance de l'air. *Section* III. Mouvement des projectiles dans l'air. *Section* IV. Mouvement des projectiles sous les petits angles de projection. §. I. Tir sous les petits angles. §. II. Mouvement des projectiles, abstraction faite de la pesanteur. §. III. Hypothèse de la résistance de l'air, proportionelle au quarré de la vitesse du mobile. *Section* V. Mouvement des projectiles, en supposant la résistance de l'air proportionelle au quarré de la vitesse du mobile. §. I. Propriétés générales des trajectoires. §. II. Méthode des quadratures et méthode d'Euler. §. III. Methode des series (Lambert, Borda, Tempelhof, Français.). §. IV. Méthodes d'approximation (Borda, Bezout, Legendre, Français.). *Section* VI. Tracé des trajectoires et solutions graphiques de divers problèmes de balistique. *Section* VII. Lois de la pénétration des projectiles dans les milieux résistants. *Section* VIII. Mesure de la vitesse des projectiles. *Section* IX. Déviations des projectiles. *Section* X. Des différents espèces de tir, pointage, vitesses et tables de tir.

Physik.

Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction des cristaux a trois axes obliques. Par A. J. Ångström. (Extrait des Acta Reg. Soc. Upsal.). A Upsal. 1849. 4°.

Dieses Memoire ist zwar schon im Jahre 1849 erschienen; wir glauben aber seiner Wichtigkeit wegen eine Anzeige desselben hier nachholen zu müssen, weil es die Aufmerksamkeit der Freunde der Theorie des Lichts jedenfalls in hohem Grade verdient, und überdies mit einer sehr genauen Kenntniss dieser Theorie und der analytischen Methoden, deren Anwendung dieselbe bedarf, verfasst ist, wobei auch die Eleganz der ganzen Darstellung und der analytischen Entwickelungen insbesondere rühmend hervorgehoben werden muss. Auch ist zu bemerken,

dass dasselbe eigentlich fast ganz für sich, ohne auf frühere Arbeiten zurückgehen zu müssen, verständlich ist, was demselben ebenfalls bei vielen Lesern zu besonderer Empfehlung gereichen wird, wobei zugleich der Herr Verf. auch mehrere Punkte verschiedener früherer Theorien kritisch beleuchtet. Als Hauptzweck seiner Untersuchungen, worauf wir uns der Beschränktheit des Raumes wegen hier nur noch einlassen können, giebt aber der Herr Verf. p. 5. — p. 6. folgenden an, wobei wir jedoch die Leser überhaupt auf die ganze höchst lehrreiche Introduction p. 1. — p. 6., verweisen:

Il y a encore une classe de phénomènes optiques, laissée jusqu'à présent presque entièrement intacte par l'analyse mathématique, et qui semble au premièr coups d'oeil s'opposer à toute explication plus approfondie suivant les maximes, supposés par la théorie d'une valeur générale; à cette classe appartiennent les cristaux nommés *clinoïdriques**). Environ 1832 M. Nörremberg avait déja découvert, en même temps que Herschel**), une distribution non-symétrique des anneaux colorés autour des axes optiques dans le Borax; et, peu de temps après il trouva que la même chose, quoique sous une autre forme, avait lieu pour le gypse, ou sulfate de chaux dans un mémoire détaillé sur les qualités optiques du chaux sulfaté M. Neumann***) a démontré plus tard que ces phénomènes annoncent l'existence de différents axes d'élasticité pour les différentes couleurs, et, en vérifiant la découverte de M. Mitscherlich†), que les axes optiques du gypse coïncident à 58° Réaum., il trouva aussi, que la ligne qui divise l'angle des axes optiques, c'est à dire le plus grand et le plus petit axe d'élasticité, en partant d'une température de 15,3° Réaum. tourne en même temps 3° 50′ sur l'axe moyen d'élasticité.

Ces phénomènes ne se laissent en aucune manière reconcilier avec la théorie de Fresnel pour la surface d'élasticité dont les trois axes rectangulaires doivent nécessairement avoir une situation fixe dans le corps. Aussi, M. Neuman dit-il, dans le mémoire cité: „Es ist um so mehr hervorzuheben, dass dem Phaenomen eine neue, mit der Fresnelschen Theorie in keinem Zusammenhange stehende, ja ihr widersprechende Thatsache zum Grunde liegt.“ MacCullagh††), le seul, à ce que nous sa-

*) Par Nauman; cristaux des deux systèmes à prisme oblique de Dufrénoy.

**) Corresp. Math. et phys. T. I. p. 275.

***) Pogg. Ann. XXXV. 81. et 203. Dans le même traité se trouve aussi la notice de la découverte de M. Nörremberg sur le Sulfate de chaux.

†) Pogg. Ann. VIII. 519.

††) Phil. Magaz. Ser. III. Vol. XXI. p. 294.

vons, qui ait, jusqu' à présent, entrepris de traiter ces phénomènes d'une manière analytique, s'exprime aussi en ces termes: „They are inconsistent with all received notions, and contradict every theory that has been hitherto proposed.“ A quel point, au contraire, sa propre théorie, admettant même la justesse de l'hypothèse mathématique qui lui sert de base, soit satisfaisante, nous savons d'autant moins juger, qu'il nous manque tous les détails là-dessus, et que ceux qui sont contenus dans le mémoire cité sont trop incomplets, pour porter la-dessus un jugement.

L'objet principal donc de ce traité, c'est d'essayer de faire disparaître cette contradiction, apparente plutôt que réelle, qui a lieu entre la théorie de Fresnel et les phénomènes observés des cristaux clinoïdriques: de montrer, comment cette dernière théorie est à considérer comme une solution spécielle d'un problème plus étendu, dont la solution nous fournit aussi une explication des qualités optiques des cristaux en question.

Möge diese schöne Abhandlung nochmals allen denen, welche für die physikalische Theorie des Lichts sich interessiren, bestens empfohlen sein!

Druckfehler im 16ten Theile.

S. 343. Z. 6. Statt der Formel

$$h\varkappa + 1 = \frac{k}{\varkappa(A+B)}$$

setze man

$$h\varkappa + 1 = \frac{h}{\varkappa(A+B)}.$$

Druckfehler im 17ten Theile.

S. 190. Z. 4. v. u. statt

$$\tang w = \frac{\tang(C - \overline{\omega})\cos v}{\cos(i-v)}$$

setze man

$$\tang \omega = \frac{\tang(L - \overline{\omega})\cos v}{\cos(i-v)}.$$

LXVIII.

Literarischer Bericht.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (zu Wien) für das Jahr 1851. Wien. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei.

Wir glauben, dass der Inhalt dieses Almanachs für die Leser des Archivs von mehrfachem Interesse sein wird. Zunächst führen wir ihn indess hier hauptsächlich deshalb an, weil er sehr vollständige Verzeichnisse aller von mehreren trefflichen Mathematikern, Astronomen und Physikern, die ordentliche Mitglieder der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften sind, herausgegebenen grösseren Schriften und einzelnen Abhandlungen und Aufsätzen enthält, welche deshalb grosses Interesse haben, da man sie anderwärts nicht in dieser Vollständigkeit finden dürfte. Wir weisen in dieser Beziehung u. A. nur hin auf die Herren Andreas Baumgartner in Wien, Adam v. Burg in Wien, Franz Carlini in Mailand, Christian Doppler in Wien, Andreas v. Ettingshausen in Wien, Marian Koller in Wien, Carl Kreil in Prag, Joseph Petzval in Wien, Johann Joseph Ritter v. Prechtl in Wien, Giovanni Santini in Padua, Anton Schrötter in Wien, Simon Stampfer in Wien. Die künftigen Jahrgänge des Almanachs werden in der obigen Beziehung noch vollständiger sein, auch Lebensbeschreibungen enthalten, und in dieser Weise jedenfalls einen sehr beachtens- und dankenswerthen Beitrag zur Geschichte und Literatur der oben genannten Wissenschaften liefern, weshalb wir hier auf deren für die Folge verbürgtes regelmässiges Erscheinen aufmerksam machen.

Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1851. Bruxelles. 1851. 8.

In diesem Jahrgange des Annuaire der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Brüssel findet sich eine von Herrn Quetelet verfasste Notice sur Henri-Chrétien Schumacher, Associé de l'Académie, welche ein höchst anziehendes Bild von dem trefflichen Dahingeschiedenen liefert, und um so lebhafter und interessanter ist, als Herr Quetelet dabei zum grossen Theile aus eigner Anschauung geschöpft hat. Viele Stellen aus Schumachers Briefen werden mitgetheilt, von denen wir eine, die astronomischen Instrumente und insbesondere Trougthon betreffende, unsern Lesern nicht vorenthalten können. Herr Quetelet sagt: „Les instruments n'inspirent ces passions qu'aux hommes qui savent s'en servir. C'est aussi pour ces hommes que les plus grands mecaniciens réservent toutes leurs tendresses. Le plus habile ingénieur d'Angleterre, le célèbre Troughton, avait pour Schumacher une amitié toute particulière. Comme il hésitait à nous envoyer les grands instruments que lui avait commandés le gouvernement déchu;" und fährt dann fort: „Schumacher me proposa de lui écrire. „Pour moi" — disait il — „le vieux Troughton fait l'impossible; tout ce que je désire, est aussitôt expédié. Il s'obstine même à faire, lui-même, les dernières rectifications. Comme il parait, que je suis son enfant gaté, il sera peut-être bon que je lui écrive pour vos instruments, et vous pouvez compter que je le ferai à la première occassion." Am Schlusse dieser interessanten Notice sagt Herr Quetelet über Schumacher: „La complaisance de Schumacher était extrême; il suffisait de lui témoigner un désir, pour qu'il appliquât toute son activité et celle de ses amis aux moyens d'y satisfaire. Ceux qui l'ont visité, savent qu'il exerçait l'hospitalité de la manière la plus grande et la plus affectueuse. Son commerce était très agréable; avec une instruction fort étendue, il causait d'une manière attrayante sur les sujets les plus divers: sciences, lettres, arts, les objets même futiles en apparence, rien ne paraissait lui être étranger*). Sa conversation était gaie, spirituelle, relevée même par un leger grain de causticité qui jamais ne blessait personne, mais qui tendait à mettre en relief le coté plaisant des choses."

Wir empfehlen diese sehr interessante Notiz über einen unserer ausgezeichnetsten Astronomen und Mathematiker recht sehr der Beachtung der Leser des Archivs, und weisen bei dieser Gelegenheit auch, wie schon in früheren literarischan Berichten, nochmals auf die gleichfalls von Herrn Quetelet verfassten Notices biographiques über Pierre François Verhulst (Annuaire. 1850

---

*) Il avait une prédilection pour les arts du dessin et lui même en effet dessinait fort bien; pendant le sejour que je fis chez lui en 1829 il me fit la proposition de dessiner mon portrait pour l'offrir à ma femme. On conçoit que j'acceptai avec reconnaissance une proposition qui tendait à nous procurer une aussi agréable souvenir de notre visite à Altona.

p. 97.), **Pierre Germinal Dandelin** (Annuaire 1848. p. 125.), **Alexis Bouvard** (Annuaire. 1844. p. 79.), **A. Levy** (Annuaire 1844. p. 138.) als gleich interessante Beiträge zur Geschichte und Literatur der Mathematik hin.

Arithmetik.

Entwickelungsmethoden des Binomialtheorems. Dargestellt von Fr. Xaver Lehmann, Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften am Lyceum zu Constanz. Constanz. 1852. 4.

Die verschiedenen Beweise des Binomialtheorems, auch die Entwickelung der Potenz eines Binomiums in einen continuirlichen Bruch, sind in dieser Schrift mit ziemlicher Vollständigkeit zusammengestellt; auf die Bedingungen der Convergenz und Divergenz der Binomialreihe hätte wohl noch etwas bestimmter Rücksicht genommen, und dieselben hätten hin und wieder wohl noch etwas schärfer hervorgehoben werden sollen. Sonst verdient die Schrift von denen, die in möglichster Kürze die verschiedenen Beweisarten des Binomialtheorems kennen lernen wollen, wohl beachtet zu werden.

Geometrie.

A. G. Alings, de superficierum curvatura. Supplementum.

Dies ist der zweite Theil der in dem Literar. Ber. Nr. LIII. S. 736. angezeigten, und dem Titel nach vollständig angegebenen sehr fleissigen und gründlichen Dissertation des Herrn Doctor **Alings**, die wir von Neuem zur sorgfältigen Beachtung recht sehr empfehlen. Der Inhalt dieser zweiten Abtheilung ist: *Pars II.* **Caput II. Formulae curvaturam spectantes ad generalius coordinatorum systema relatae. — Cap. III. De punctis quibusdam singularibus. — Cap. IV. De lineis curvaturae.** *Pars III.* Historia, in welchem dritten Theile eine sehr vollständige Geschichte und Literatur der Theorie der Krümmung geliefert wird.

Ueber Abwicklung einfach krummer Flächen. Inaugural-Dissertation von Wilhelm Schell, Praktikant am Gymnasium zu Marburg. Marburg 1851. 4.

Eine recht gute, sehr fleissig und keineswegs ohne Eigenthümlichkeit verfasste Dissertation, die zu allgemeinerer Beach-

tung empfohlen zu werden verdient. Ihr Inhalt ist im Allgemeinen folgender: I. Ueber einfach krumme Flächen im Allgemeinen. II. Von der Explication einfach krummer Flächen. III. Allgemeine Eigenschaften der auf abwickelbaren krummen Flächen liegenden Curven rücksichtlich ihres Uebergangs in die entsprechenden ebenen Curven. IV. Die Abwicklung der Cylinderflächen. V. Die Abwicklung der Kegelflächen. VI. Die Abwicklung einfach krummer Flächen mit Rückgratcurve. — Die Schrift ist ein guter Beitrag zur höheren Geometrie und darf auch namentlich Anfängern zur Uebung in derselben empfohlen werden.

Trigonometrie.

Summarium der Goniometrie en der rectilijnige of vlakke Trigonometrie, eene handleiding, bij het volgen van academische lessen over deze onderwerpen der meetkunde. Tweede druk. Leiden. 1850. 8.

Dieses Lehrbuch der Goniometrie und ebenen Trigonometrie, dessen Verfasser Herr Professor G. J. Verdam in Leiden ist, enthält auf dem verhältnissmässig sehr geringen Raume von 152 Seiten eine ungemein vollständige Darstellung der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Ja es ist uns fast keine Schrift von so geringem Umfange bekannt, in welcher man alle Formeln der Goniometrie, natürlich und ganz besonders auch in Betreff der goniometrischen Reihen und der goniometrischen Auflösung der Gleichungen, und der ebenen Trigonometrie, in solcher Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit beisammen fände wie hier, wobei auch selbst die Elliptische und Hyperbolische Goniometrie, S. 56. und S. 58., nicht fehlt. Wir wünschen daher sehr, dass diese Schrift auch in Deutschland alle Beachtung finden möge, die sie gewiss bei ihrer Vollständigkeit auf sehr mässigem Raume in hohem Grade verdient. Leider ist die holländische mathematische Literatur bei uns immer noch nicht hinreichend bekannt, was sehr zu bedauern ist, da die meisten auf diesem Gebiete in Holland erscheinenden Schriften sich namentlich durch grosse Gründlichkeit und Vollständigkeit auszeichnen, und von manchen deutschen Schriftstellern, die oft mehr als billig nach möglichster Leichtigkeit der Darstellung streben, zum Muster genommen zu werden verdienen. Besonders gilt dies aber von den Schriften des Herrn Professor Verdam, die uns immer mit besonderer Hochachtung vor ihrem Verfasser erfüllt haben, und dem wir daher so oft als möglich auf dem Gebiete unserer Wissenschaft zu begegnen wünschen.

Praktische Mechanik.

Ueber die Reibung an cylindrischen Zapfen. Einladungsschrift zu den Prüfungen der Schüler der technischen Lehranstalten in Augsburg am Schlusse des Studienjahres 1850/51, von G. Decher, Prof. der Physik und Mechanik an der Königl. polytechnischen Schule. Augsburg. 4.

Der Herr Verfasser tadelt im Eingange seiner Schrift im Allgemeinen das bisher meistens befolgte Verfahren bei der Auflösung der Aufgaben der praktischen Mechanik, und sagt dann, dass ein solches tadelnswerthes Verfahren besonders bei allen Aufgaben der Maschinenlehre, wo die Reibung in Betracht gezogen wird, gang und gäbe gewesen sei, und es deshalb auch gar nicht zu verwundern sei, wenn die meisten Schriftsteller in diesem Fache zu ganz verschiedenen Ergebnissen kommen, wie z. B. die Herren Brix und Weisbach über die Zapfenreibung, Navier und Poncelet über die Reibung an der scharfgängigen Schraube u. s. w. Es dürfe deshalb nicht überflüssig sein, bei diesen Untersuchungen einen mehr wissenschaftlichen Weg einzuschlagen, um wenigstens nach dem bis jetzt als richtig angenommenen Gesetze, dass die Reibung unter sonst gleichen Umständen dem Drucke proportional und von der Geschwindigkeit unabhängig sei, für die einzelnen Fälle richtige Ergebnisse abzuleiten. Die in dieser Schrift mitgetheilte Betrachtung über die Reibung an der Mantelfläche cylindrischer Zapfen möge als ein Versuch dieser Art angesehen werden. Auf S. 14—16 sucht der Herr Vf. die völlige Unrichtigkeit der von den Herren Weisbach und Brix gegebenen Theorien nachzuweisen.

Wir empfehlen dieses Programm den Liebhabern der praktischen Mechanik zur Beachtung, aber auch zur sorgfältigen Prüfung der darin vorgetragenen Lehren. Mit den über die Behandlung der Aufgaben dieser Wissenschaft ausgesprochenen Ansichten des Herrn Vfs. sind wir im Allgemeinen einverstanden, und glauben allerdings auch, dass diese Wissenschaft einer völligen Reform bedürfe. Oft genug sind wir schon erstaunt über solche von dem Herrn Vf. gleichfalls gerügte Willkührlichkeiten, die man in namentlich bei Technikern beliebten Lehrbüchern der praktischen Mechanik findet; und Schade ist es nur, dass letztere gewöhnlich Alles als baare Münze annehmen, was doch nur oft genug falsches Geld ist. Auch sieht man öfters Leute, die sich für Mathematiker halten, mit dergleichen Aufgaben in einer Weise umgehen, bei der dem wahren Mathematiker das Herz weh thut. Geht also der Herr Vf. des vorliegenden Programms — über dessen eigentlichen Inhalt wir ein Urtheil hier absichtlich nicht aussprechen, da wir uns dann auch auf eine Kritik anderer Theorien einlassen müssten, wozu uns hier der Raum fehlt, — damit um, die Aufgaben der praktischen Mechanik auf eine genügendere Weise als bisher zu behandeln, so ist dieses Unternehmen jedenfalls ein

Dieser Kalender enthält manche interessante Notizen, nicht bloss in nautischer Rücksicht, sondern auch in allgemein wissenschaftlicher mathematischer Beziehung, und verdient zur Beachtung empfohlen zu werden.

Nautischer Almanach mit sämmtlichen Mondsdistanzen zum Gebrauch des Seefahrers. Ein Auszug aus The nautical Almanac and astronomical Ephemeris. Für das Jahr 1852. Berechnet für den Greenwicher Meridian. Kopenhagen. 1851. 1 Thlr.

Wir freuen uns sehr, dass dieser ausgezeichnete und von uns schon früher empfohlene Schiffer-Almanach, den wir aus eignem Gebrauch bei astronomischen Beobachtungen kennen, und welcher für die Jahre 1849, 1850 und 1851 von dem leider zu früh verstorbenen Professor G. F. Ursin herausgegeben wurde, keine Unterbrechung erlitten hat. Der jetzige Herausgeber ist der Premierlieutenant und Lehrer der Navigation beim See-Cadettencorps, Herr J. C. Tuxen in Kopenhagen, welcher die Herausgabe im Auftrage des Vereins zur Beförderung der Seefahrt besorgt. Wir wüssten in der That keinen Almanach, welchen wir zum Gebrauch der Schiffer mehr empfehlen könnten als diesen, da er alles irgend Erforderliche in grosser Zweckmässigkeit enthält, und überall den die Bedürfnisse des praktischen Seewesens vollkommen kennenden Herausgeber verräth. Möge die Herausgabe nie unterbrochen werden, was wohl auch nicht zu erwarten steht, da der oben genannte Verein sich an die Spitze der Herausgabe gestellt hat. Auch der Preis von 1 Thlr. ist bei der schönen Ausstattung sehr mässig.

Vermischte Schriften.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung in Frauenfeld den 2., 3. und 4. August 1849. 34ste Versammlung. Frauenfeld.

Die Anzeige dieser Verhandlungen ist zufällig verspätet worden. Die Verhandlungen von 1848 sind im Liter. Ber. Nr. LIV. S. 758., die von 1850 im Liter. Ber. Nr. LXIV. S. 837. angezeigt worden. Auch die Verhandlungen der 34. Versammlung in Frauenfeld enthalten manches Interessante, z. B. einen namentlich für Lehrer sehr beachtungswerthen Vortrag des Herrn Prof. Schinz über den naturwissenschaftlichen Unterricht in Volksschulen. S. 50.; — einen Vortrag des Herrn Kummer über den Vogelflug. S. 59.; — Blanchet: sur les combustions dans les êtres organisés et inorganisés. S. 68.; — Prof. Heer: Zur Geschichte der Insekten. S. 78.; — Prof. Schönbein: Ueber die chemische Theorie der Voltaschen Säule. S. 98., und manches Andere in den Berichten über die Verhandlungen der Kantonalgesellschaften, was sich hier nicht Alles namhaft machen lässt, weshalb wir nur noch auf einen mathematischen Aufsatz von Herrn Prof. Dr. Emil Schinz aus Aarau: „über die grösste Spannweite in Drähten" aufmerksam machen, und, wie die früheren, auch diese Verhandlungen unseren Lesern zur Beachtung recht sehr empfehlen.

Thei

Taf. I.

y

x'

x''

x

Fig. 4*

y''

y

Fig. IV

K

C_3

z

S

C_1

Grun

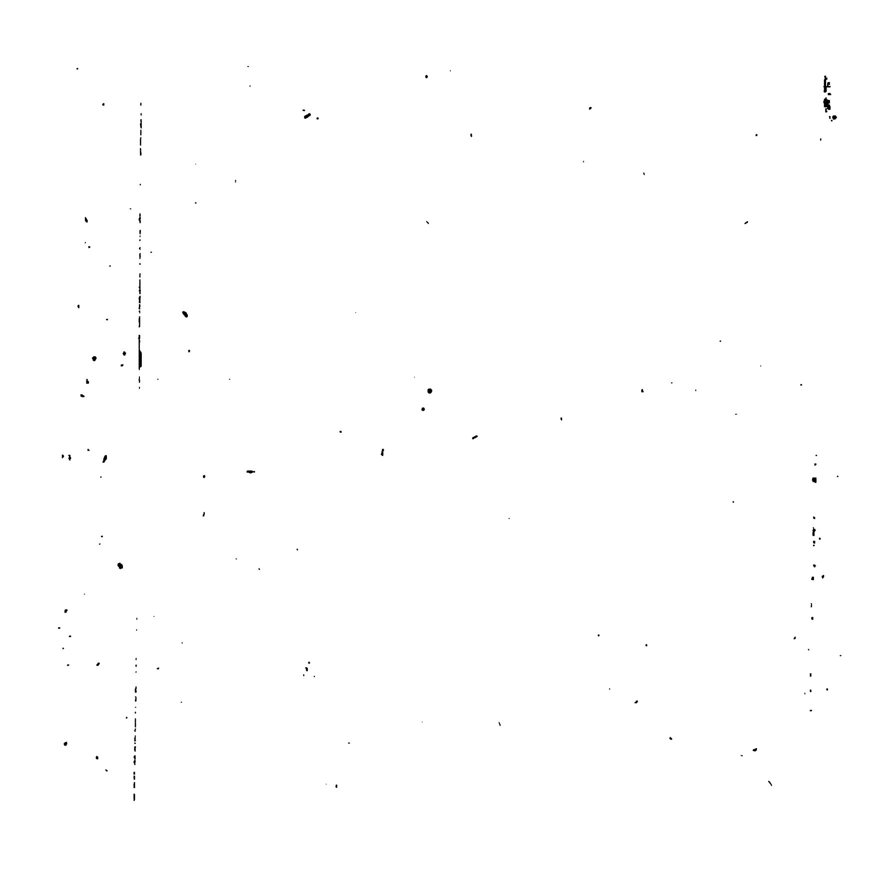


Fig. 6.

Fig. 5.

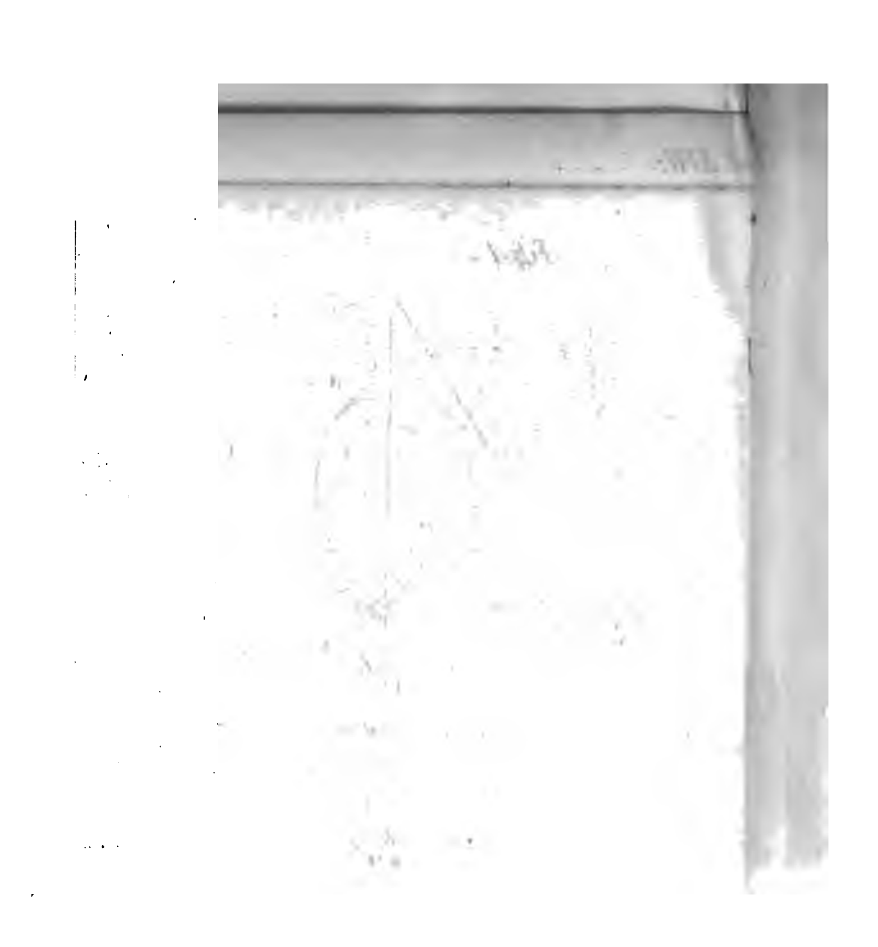


Fig.

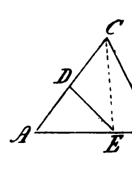


Fig. 4.

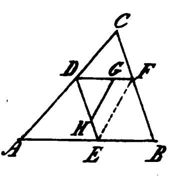


Fig. 7.

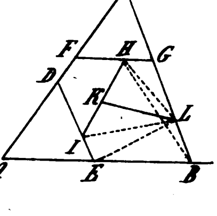


Fig.

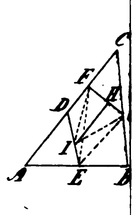


Fig. 8.

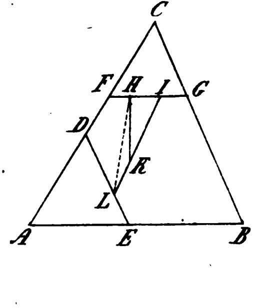




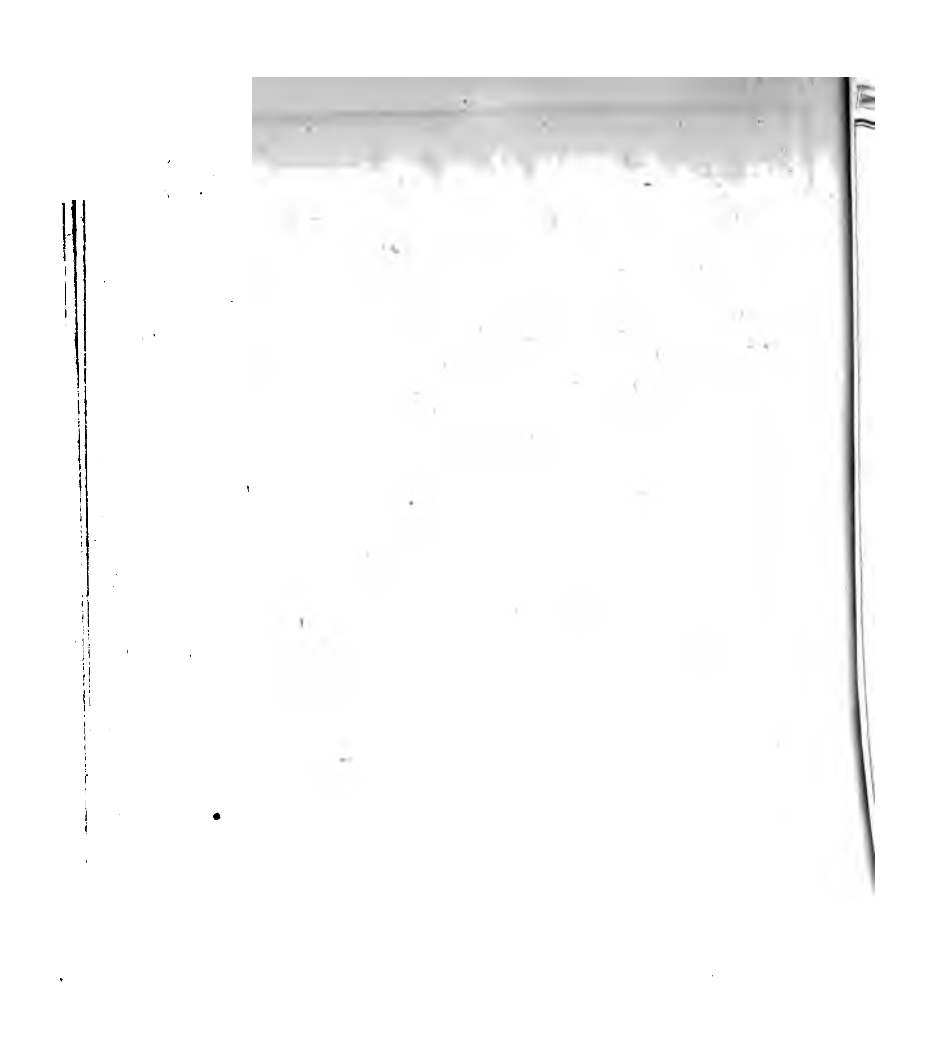
Fig. 4.

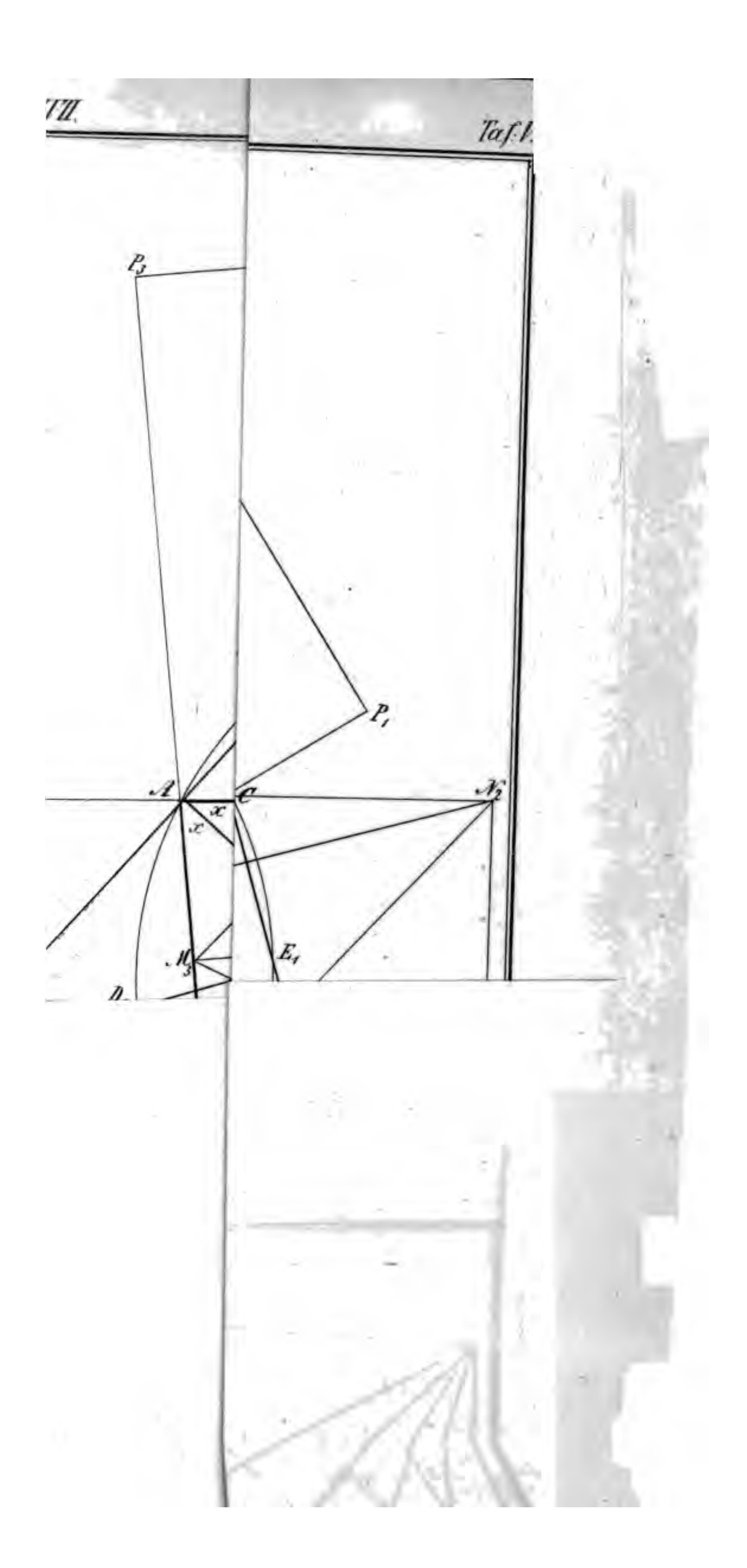
Fig. 7.

Fig. 8.

Fig.

Fig.





Taf. VII.
Taf. V
P_3
P_1
A
C
N_2
x
x
E_1
M_3



XVII.

Taf. VI.

y

z

O_1

Grunert

